

ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおける プライシングのカオス性変動の解析とその抑制

池田 欽一^{†1} 時永 祥三^{†2}

本報告では、サービスや企業活動を構成要素とする、これまで主に研究されてきた単独のノードのモデルを、ネットワーク構成されたノードへ拡張し、ノードでの入力調整のメカニズムを導入した場合のノードにおけるプライシングのカオス性変動の発生と、システムのパラメータとの関係を分析する。同時に、このような確定的な参加と退去のメカニズムのもとでは、微小な入力を加えることによりカオス性変動を制御できるので、この方法の有効性を示す。

Analysis of Chaotic Fluctuation of Pricing at Nodes in Network under Imposing Controls for Input Flow and Scheme for their Suppressions

YOSHIKAZU IKEDA ^{†1} and SHOZO TOKINAGA ^{†2}

It is known that if the input to a single node is adjusted depending on the state, chaotic fluctuations are found in the waiting cost (called pricing). In this report, to extend single-node case, the network structure are assumed where input to nodes are delivered to further nodes, but depending on the states (pricings) of destination nodes. We show the condition for inducing chaotic fluctuation in pricing based on the simulation studies. Simultaneously, by considering the deterministic decision on input and pricing, we utilize the control (suppression) scheme for the chaotic fluctuation base on the control of chaos.

1. ま え が き

サービスや企業活動を構成要素とするネットワークにおける変動の伝播を解析することは、サービス遅延や倒産の連鎖などリスクを回避する課題の解決に有効であり^{1),2)}、制御モデルとして、ノード(構成要素)の間でのフローのやり取り(入力)を、相手ノードの現在の状況に応じて大きさを調整するケースが考察されている³⁾⁻⁶⁾。

本報告では、ノードへのフロー入力調整を含むネットワークにおけるプライシングのカオス性変動の解析とその抑制について述べる。

本報告では、入力を調整するノードが単独ではなくネットワーク構造で結合された、やや一般的なモデルを仮定する。このネットワークにおいてノードの間のフローの入力は、フロー移動先のノードにおける待ちコストに反比例して配分されると仮定している。さらに単独のノードの場合と異なり、フローはネットワーク外へ退去する仮定はとっていない。このような仮定

のもとでも、入力ノードの個数や分岐するノードの個数によって、カオス性変動が発生することとその原因について述べ、性質を分析する。また、このような確定的な参加と退去のメカニズムのもとでは、微小な入力を加えることによりカオス性変動を制御できる可能性があることに注目し、この方法によるカオス制御の可能性について検討する。

2. では、入力調整の基本モデルとカオス性振動、3. ではネットワーク構成のモデルにおけるカオス性変動、4. で、入力フロー制御によるカオス性振動の抑制を述べ、5. ではシミュレーションによる検討を示す。

2. 入力調整の基本モデルとカオス性変動

2.1 入力調整の基本モデル

まず、ノードが1つの場合の入力調整についてモデルを説明する³⁾⁻⁶⁾。入り口からフローの供給は単位時間当たりについて Λ の割合(率)であると仮定するが、実際には一部が供給されるので潜在入力率とよぶ。フローを供給する主体(客や企業)は、いわゆる待ち時間の予測を行い、この数値をもとにして実際の入力率(実入力率 λ)を決定する。この主体が予測する待ちコストを、次のように最低数量 f と、待ち時間の予測値 $G_\mu(\lambda)$ に単位コスト h をかけたものとの和で表現し、

^{†1} 信州大学
Shinshu University

^{†2} 九州大学
Kyushu University

p として記述する。予測値 $G_\mu(\lambda)$ は λ の単調増加関数であり、ノードの処理能力 (容量) μ に依存する。

$$p = f + hG_\mu(\lambda). \quad (1)$$

この p は待ちコストの予測という意味で、プライシングと呼ばれる。ただし行動主体は、この p そのものではなく、 p に関する予測値 (あとで示す指数平滑化された変数) である π を用いて、次に示す関数にしたがって実入力率 λ を決定すると仮定する。

$$\lambda = \Lambda F(\pi). \quad (2)$$

$$\lambda = \begin{cases} \Lambda & (\text{if } 0 \leq \pi \leq d), \\ \Lambda(a - \pi)/(a - d), & (\text{if } d \leq \pi \leq a), \\ 0 & (\text{if } a \leq \pi). \end{cases} \quad (3)$$

$\pi = f + G_\mu[\Lambda F(\pi)]$ であれば、システムは均衡する。主体は期間 n において行った予測をもとに、期間 $n+1$ における行動 (具体的には実入力率) を決定する。実入力率 λ_n は期間に発生した実入力率であり、 p_n, π_n はそれぞれ、実際に発生した待ちコストと、主体が期間 n において行った待ちコストの予測値である。

$$\pi_{n+1} = (1 - \omega)\pi_n + \omega p_n. \quad (4)$$

$$p_n = f + G_\mu(\lambda_n). \quad (5)$$

$$\lambda_{n+1} = \Lambda F(\pi_{n+1}). \quad (6)$$

ここで、 $0 \leq \omega \leq 1$ である。

2.2 カオス性変動の発生条件

次に、プライシングにカオス性変動が発生する条件については、Stidam により導出されている。容量 μ が制限範囲 $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ にある場合には、待ちコスト p_n はカオス性変動を示す。ここで、 μ_-, μ_+ は、以下の式の 2 つの解である。

$$\mu^2 - (\Lambda' + \kappa)\mu + \beta' \Lambda' \mu = 0. \quad (7)$$

ここで、待ちコストは関数 $G_\mu(\lambda) = hW_\mu(\lambda)$ で与えられ、入力フローは率が λ であるポアソン到着で、処理時間の分布は一般分布で、1 個の窓口を仮定すると平均待ち時間は、

$$W_\mu(\lambda) = (\mu - \lambda\beta')[\mu(\mu - \lambda)]^{-1}, \beta' = (1 - c_s^2)/2. \quad (8)$$

c_s は処理時間の変動係数である。処理の能力にあたる μ が下限 μ_- 、上限 μ_+ の範囲にあるとき、変数 p_n はカオス的な挙動を示す。このカオス性変動発生条件の概要は、Haxholdt らの文献⁵⁾ に示されている。簡単な考察により、 $\mu < \mu_-, \mu > \mu_+$ である場合に均衡解は安定であり、 $\mu_- \leq \mu \leq \mu_+$ の場合には不安定になることが分かる。

なお、遺伝的プログラミング (Genetic Programming: GP) の手法に基づく関数近似推定を用いると、過去のデータから極めて正確に $G_\mu(\lambda)$ の形状を知ることができる¹¹⁾ ので、すべての行動主体はノードにおける関数 $G_\mu(\lambda)$ の形状を知りうると仮定しておく。

3. ネットワーク構成のモデルにおけるカオス性変動

3.1 ネットワーク構成のモデル

N_{in} 個の入力ノードからはある確定的な規則に基づいてフローが流入しており、平均 N_b 個の中間のノードを経由して、 N_{out} 個の出力ノードからネットワーク外部へと出ると仮定する。入力、中間のノードでは、移動先のノードの待ちコストに反比例してフローを配分し、フローの消滅や増加は起こらないと仮定する。

3.2 ネットワークにおけるカオス性変動発生原因

入力ノードからの入力フローの退去がないが、次のような原因により、ノードにおけるプライシングに、カオス性変動が発生する。(1) 特別なノードへの入力規制や退去を仮定しないでも、入力ノードの個数が多くなると、フローの到着のばらつきが発生し、結果的に入力フローの規制や退去を仮定した場合に近い現象が発生する。(2) 中間ノードの平均的な個数が入力ノードの個数より多い場合には、中間ノードにおいて次の階層のノードに配分されるフローは、入力ノードから流入するフローよりも、相対的に小さくなり、ノードへ流入するフローの到着する時刻の間隔においては、入力ノードへの流入フローの到着間隔よりも大きなばらつきが発生し、特別なノードへの入力規制や退去を仮定しないでも、フローの到着のばらつきが発生し、結果的に入力フローの規制や退去を仮定した場合に近い現象を引き起こす。

3.3 カオス性変動発生条件の近似式

カオス性変動が発生する容量の上界 μ_+ は、入力率 Λ の減少関数となる。式 (7) と入力ノードにおける入力フローの入力率は Λ/N_{in} であるとの仮定より、カオス性変動を誘起する μ_+ の限界の値 (μ_+^B とする) は、次式で近似できる。

$$\mu_+^B = k_0 + k_1 N_{in} + k_2 \sqrt{N_{in}}, k_1 < 0, k_2 < 0. \quad (9)$$

この式に含まれるパラメータの推定や、近似式の妥当性については、あとのシミュレーションで確認する。

4. 入力フロー制御によるカオス性変動の抑制

4.1 単一ノードの場合のカオス性変動の抑制

まず、単独のノードにおけるフローの入力調整を用いたカオス制御について述べる⁹⁾⁻¹¹⁾。いま、あるカオス性変動をするシステムのダイナミクスが、状態変数 x_n により記述される関数として、次のように離散表現されていると仮定する。

$$x_{n+1} = f_c(x_n). \quad (10)$$

このとき、状態変数の現在の値 x_n にある入力 u_n を加えて、次の時刻 $n+1$ における状態 \hat{x}_{n+1} を不動点に一致させるような制御を加える。

$$\hat{x}_{n+1} = f_c(x_n + u_n). \quad (11)$$

ノードにおけるプライシングが、期間 n にかかわら

ず均衡する条件は、プライシングの予測 π_n と実際に発生するプライシング p_n が一致すること、すなわち $\pi_n = p_n$ である。このことより制御後のプライシング値を \hat{p}_n として表現すると、

$$\hat{p}_n = (-B + D)/2A. \quad (12)$$

$$A = (a - d)\mu, B = (a - d)\mu[(a - d)\mu - a] - \beta',$$

$$C = -(a - d)\mu + \beta'a, D = \sqrt{B^2 - 4AC}. \quad (13)$$

ノードにおける現在のプライシングを強制的にこの値に置き換えると、カオス性変動を制御することが可能である。同様に、入力するフローに微小な入力を加えて制御することも可能である。

なお、通常のカオス時系列を対象としたカオス制御とはやや異なり、プライシング時系列の場合には、システムの不動点 \hat{x}_{n+1} を見出すことが容易でない場合がある。このような場合には、 $x_{n+1} = f_c(x_n + u_n)$ となるような入力 u_n を探索し、加える制御方法を利用することが可能である(詳細は省略する)¹⁰⁾。

4.2 ネットワーク結合のノードでのカオス制御

プライシングにおけるカオス性変動を抑制できるための条件は、次のようなものであり、シミュレーションを通じた検証で明らかになる。(1) 他のノードからカオス性変動がすぐに伝播するので、同時にすべてのノードで外力印加を開始する。(2) 同じような理由により、外力印加は1時刻でなく数時刻(N_c)継続する

5. 応用例

5.1 カオス性変動発生とパラメータとの関係

入力、出力および中間のノードの総数を N とし、それぞれのノードどうしの結合は、乱数を用いて構成する。以下では、パラメータの範囲を次のように設定しておく。ネットワークのノード総数: $N = 100$, 入力と出力ノード数: $N_{in} = N_{out} = 2 \sim 10$, 中間ノードの分岐個数の平均: $N_b \geq N_{in}$, ノードでの処理時間: $\mu = 0.1 \sim 0.9$ 。

図1には、 $N_{in} = N_{out} = N_b = 2, \mu = 0.5, c_s = 1$ (上)、および $N_{in} = N_{out} = N_b = 5, \mu = 0.4, c_s = 1$ (下)として設定した場合の、あるノードにおけるプライシング p_n の時間変化を示している。この事例においては当該のノードにおける変数の値は、カオス性変動を示し、このような振動は、ネットワークの中のどのノードでも観測される。次に、カオス性変動が誘発される容量 μ_+^B の境界値の近似式である $\mu_+^B = k_0 + k_1 N_{in} + k_2 \sqrt{N_{in}}$ について、シミュレーションをもとにして推定する。入力ノード数を変化させながらそれぞれの N_{in} の値について、乱数を用いてネットワークの初期状態を設定し、30回のカオス生成のシミュレーション結果を用いる。近似式の推定には、最小2乗基準のもとで、係数に関する最急降下法による逐次近似を用いている。表1には $N_{in} = N_b = N_{out}$

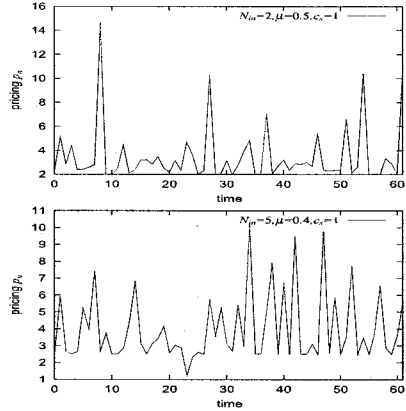


図1 プライシングにおけるカオス性変動の例

Fig.1 Examples for chaotic fluctuation for pricings

表1 プライシングのカオスを誘起する境界値 μ_+^B の推定

Table 1 Estimation of Bounary values μ_+^B .

	$c_s = 1$	$c_s = \sqrt{0.5}$	$c_s = 0$
k_0	0.6709	0.6181	0.6715
k_1	-0.0492	-0.0113	-0.0019
k_2	-0.0027	-0.0002	-0.0013
ϵ^B	0.0062	0.0080	0.0031

とした場合の μ_+^B の近似式の係数と、この場合の μ_+^B のついての相対誤差、すなわち真の値と近似値との差を真の値で割った数値 (ϵ^B としている) を示している。この結果より分かるように、 μ_+^B についての近似は良好であり、容量の境界値はほぼ N_{in} に反比例している。なお、 $N_b > N_{in}$ である場合、 N_b と N_{in} との差が大きくなるにしたがって、容量の限界値 μ_+^B は小さくなる。

5.2 カオス制御手法の応用

以下では、カオス性変動を抑制するシミュレーション結果について述べる。まず図2にはネットワークのパラメータを、 $N_{in} = 5, \mu = 0.45, c_s = 1$ と設定した場合の、あるノードにおけるカオス性変動を示し、図3にはカオス制御の方法を用いてこの変動を抑制した事例と、この場合におけるプライシングへの印加外力の例を示している。この例からも分かるように、カオス性変動を抑制したあとでは、プライシングのレベルはある一定の値に正確には収束しないで、ごく小さな範囲で変化を続けている。この理由としては、ネットワーク構造をもつため、他のノードからの入力を常に受け続けていることがあげられる。

なお外力を加える継続時間 N_c について、カオス性変動を抑制するには最低限どの程度必要(これを N_c^B として示す)かについては、シミュレーション結果をもとにすると、表2のようにまとめられる。ただし表2においては、 $N_{in} = N_b = N_{out}$ として、同時にシ

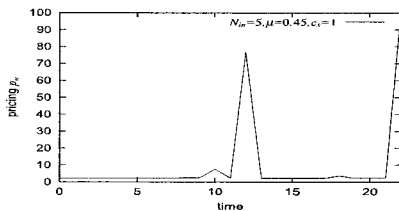


図2 あるノードにおけるカオス性変動

Fig.2 An example of chaotic fluctuation on a node

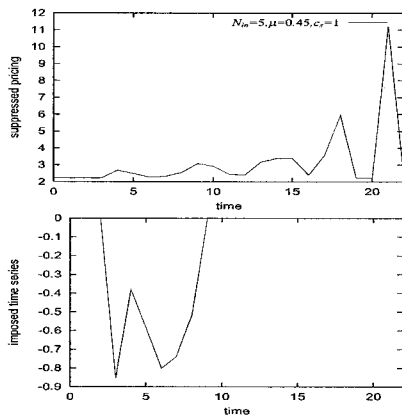


図3 あるノードにおけるカオス性変動を抑制例(上:抑制されたプライシング, 下:印加外力)

Fig.3 An example of suppression of chaotic fluctuation on a node (upper:suppressed pricing, lower:imposed time series)

表2 プライシングを抑制するための N_c の最小値 N_c^B (平均値)

Table 2 Minimum values N_c^B of N_c .

N_{in}	μ	N_c^B
$N_{in} = 2$	$\mu = 0.55$	$N_c^B = 5.8$
$N_{in} = 3$	$\mu = 0.50$	$N_c^B = 6.1$
$N_{in} = 5$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.3$
$N_{in} = 8$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.5$
$N_{in} = 10$	$\mu = 0.45$	$N_c^B = 6.8$

ミュレーションにおける μ の値を示し、結果のデータとして N_c^B の平均値を示している。この結果から分かるように、必要な数値 N_c^B は入力ノードの数 N_{in} に比例しているが、ほぼ6程度の値であり、比較的短い時間だけ外力を継続するだけで、カオス性変動を抑制できることが分かる。

6. むすび

本報告では、単独のノードでのカオス性変動のモデル解析を一般化したネットワーク構成のノードを仮定

し、ノードでの入力調整のメカニズムを導入した場合のノードにおけるプライシングのカオス性変動の発生と、システムのパラメータとの関係を分析した。その結果、カオス性変動が発生する条件を、簡潔に表現する近似式を推定することが可能となった。同時に、このような、プライシングに微小な入力を加えることにより、カオス性変動を制御できることを示した。

今後の課題として、現実のカオス性変動発生現象を、本論文の手法と対応させながら比較分析することがあり、検討を進めていきたい。

参考文献

- 1) Agnew, C. E.: Dynamic modeling and control of congestion-prone systems, *Operations Research*, vol.24, pp.400-419 (1976).
- 2) Dewan, S. and Mendelson, H.: User delay costs and internal pricing for service facility, *Management Science*, vol.36, no.12, pp.1502-1517 (1990).
- 3) Rump, C.M. and Stidham, S. Jr.: Stability and chaos in input pricing for a service facility with adaptive customer response to congestion, *Management Science*, vol.44, no.2, pp.246-261, (1998).
- 4) Stidham, S. Jr.: Pricing and capacity decisions for a service facility: Stability and multiple local optima, *Management Science*, vol.38, no.2, pp.1121-1139 (1992).
- 5) Haxholdt, C., Larsen, E.R. and Ackere, A.V.: Mode locking and chaos in deterministic queueing model with feedback, *Management Science*, vol.49, no.6, pp.816-830 (2003).
- 6) Vvedenskaya, N., Dobrushin, R. and Karpelevich, F.: Queueing system with selection of the shortest of two queues: an asymptotic approach, *Probability of Information*, vol. 32, pp. 15-27 (1996).
- 7) Battiston, S., Delli, D., Gatti, D., Gallegati, M., Greenwald, B. and Stiglitz, J.E.: Credit chains and bankruptcy propagation in production networks, *Journal of Economic Dynamics & Control*, vol.31, pp.2061-2084 (2007).
- 8) Sandefur, J.T.: *Discrete Dynamical Systems*, Clarendon Press, Oxford, England (1990).
- 9) Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A.: Controlling Chaos, *Phys. Rev. Lett.*, vol.64, no.11, pp.1196-1199 (1990).
- 10) Pyragas, K.: Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett.*, vol.170, pp.421-428 (1992).
- 11) 時永祥三, 池田欽一: エージェント理論による企業行動分析—遺伝的プログラミングアプローチ, 白桃書房, 2005.