

2-パスの最適普遍グラフ

北角 智洋 上野 修一

東京工業大学 工学部 電気・電子工学科

点数 p のグラフの一つの族 Γ に対し, Γ に属する任意のグラフを全域部分グラフとして含むようなグラフを Γ の普遍グラフと呼ぶ。また, 枝数のオーダーが最小の普遍グラフは最適普遍グラフと呼ばれる。最適普遍グラフに関する従来の結果は木の場合に限られており, Γ が木の族であるときには, 枝数 $O(p \log p)$ の最適普遍グラフの構成法が知られている。また, 点の次数が制限されている木の族に対しては, 枝数 $O(p)$ かつ次数が制限されている最適普遍グラフが構成できることが知られている。

$p - 1$ 点からなるパスとそれら全点に隣接するような 1 点からなるグラフを扇と呼び, 扇に 2 同型なグラフを 2-パスと呼ぶ。2-パスは特別な 2-木である。小文では, 2-パスの族に対して, 枝数 $O(p \log p)$ の最適普遍グラフが構成できること, 及び, 点の次数が制限されている場合には, 枝数が $O(p)$ で点の次数が制限されているような最適普遍グラフが構成できることを示す。

OPTIMAL UNIVERSAL GRAPHS FOR 2-PATHS

Tomohiro KITAKAKU and Shuichi UENO

Department of Electrical and Electronic Engineering
Tokyo Institute of Technology
O-okayama, Meguro-ku, Tokyo, 152, Japan

Given a family Γ of graphs with p vertices, a graph H is called a universal graph for Γ if any graph of Γ is a spanning subgraph of H . A universal graph H for Γ is said to be optimal if the number of edges of H is minimal to within constant factors. An optimal universal graph with $O(p \log p)$ edges for trees, and a bounded-degree optimal universal graph with $O(p)$ edges for bounded-degree trees are known.

A 2-path is a generalization of the path and a special case of the 2-tree. We construct an optimal universal graph with $O(p \log p)$ edges for 2-paths. We also construct a bounded-degree universal graph with $O(p)$ edges for bounded-degree 2-paths.

1. まえがき

Γ^p を p 点からなるグラフの一つの族とする。 Γ^p に属する任意のグラフを全域部分グラフとして含むようなグラフを“ Γ^p の普遍グラフ(universal graph)”と呼ぶ。 Γ^p の最適普遍グラフの構成問題とは、 Γ^p の普遍グラフのうち、枝数がオーダとして最小であるようなグラフ(これを最適普遍グラフと呼ぶ)を構成する問題である。

最適普遍グラフには、次のような応用が考えられる。いくつかの並列アルゴリズム A_1, A_2, \dots, A_n が与えられており、アルゴリズム A_i の構造が p 点からなるグラフ G_i で表現されているとする。任意の G_i を部分グラフとして含むような構造を持つ並列計算機を最小数のプロセッサで実現する時、通信線数が最小となるようなプロセッサ間の結線構造はどういうものであろうか。この問題は $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ の最適普遍グラフの構成問題として定式化される。

従来の結果に触れておく。木の族については、枝数 $O(p \log p)$ の最適普遍グラフが構成されている[2]。また、点の次数がある定数で制限されているような木の族については、枝数が $O(p)$ かつ点の次数が $O(1)$ であるような最適普遍グラフが構成できることが知られている[1]。次数が制限されている場合は、プロセッサに接続する通信線の数が制限されている場合に対応しており、応用上実際的である。このとき、最適普遍グラフの次数も制限されていることが望ましいことは言うまでもない。

小文では、2-パス(特別な2-木)の族について、枝数 $O(p \log p)$ の最適普遍グラフを構成するとともに、点の次数がある定数で制限されている場合には、枝数が $O(p)$ かつ点の次数が $O(1)$ であるような最適普遍グラフを構成する。

2. 2-パス

小文では、単純無向グラフを対象とする。グラフ G の点集合を $V(G)$ で、 G の枝集合を $E(G)$ で表す。また、グラフ G における点 v の次数を $d^G(v)$ と表す。

以下のように再帰的に定義されるグラフは、2-木と呼ばれている:

- ① K_2 は 2-木である。
- ② G を n 点からなる 2-木とし、 $(u, v) \in E(G)$ とする。このとき、 G に新たに 1 点 w 及び枝 (u, w) と (v, w) を付加して得られるグラフは、 $n + 1$ 点からなる 2-木である。■

2-パスは 2-木の特別なものであり、次のように再帰的に定義される:

- ① K_2 は 2-パスである。
- ② G を n 点からなる 2-パスとする。また、 $(u, v) \in E(G)$ であり、 $d^G(u) \leq$

2 あるいは $d^G(v) \leq 2$ であるとする。このとき、 G に新たに 1 点 w および枝 (u, w) と (v, w) を付加して得られるグラフは、 $n + 1$ 点からなる 2-パスである。■

2-パスに関して、次のようなことが容易にわかるであろう。

【補題 2. 1】

点数が 4 以上の 2-パスには、次数が 2 である点がちょうど 2 つある。■

【補題 2. 2】

グラフ G が 2-パスであるとき、 $|E(G)| = 2|V(G)| - 3$ である。■

【補題 2. 3】

2-パスは 2 連結である。■

【補題 2. 4】

2-パスに任意に 2 同型変換を施したグラフは 2-パスである。逆に、任意の 2 つの 2-パスは 2 同型である。■

【補題 2. 5】

2-パス G が与えられているとする。次数が 2 である G の点を v とし、 v に隣接する点の 1 つを u とする。点 u, v 及び枝 (u, v) からなる K_2 に次々に点を加えて G を構成していくとき、構成順序は一意である。■

【例 2. 1】

$K_{1,p-1}$ の次数 $p-1$ の点を v_0 、次数 1 の点を v_1, v_2, \dots, v_{p-1} とした時、 $K_{1,p-1}$ に $p-2$ 本の枝 (v_i, v_{i+1}) (但し $1 \leq i \leq p-2$) を付加して得られるグラフを扇と呼び、 F^p で表す。 F^p は 2-パスである。 F^8 を(図 2. 1) に示す。■

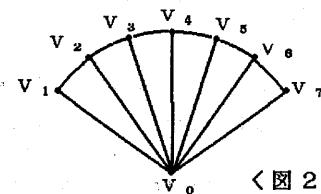


図 2. 1) F^8

3. 2-パスの普遍グラフの枝数の下界

p 点からなるグラフ G の次数系列を

$$D(G) = (d^G_1, d^G_2, d^G_3, \dots, d^G_p)$$

但し、 $d^G_1 \geq d^G_2 \geq d^G_3 \geq \dots \geq d^G_p$ と書き表すこととする。また、 p 点からなる 2 つのグラフ G と H の次数系列について、

$$D(H) \geq D(G)$$

$\Leftrightarrow d^H_1 \geq d^G_1, d^H_2 \geq d^G_2, \dots, d^H_p \geq d^G_p$ と定義する。

Γ^p を p 点からなるグラフの一つの族であるとする。

【補題 3. 1】

グラフ $H = (V(H), E(H))$ が Γ^p の普遍グラフであれば、 Γ^p に属する任意のグラフ $G = (V(G), E(G))$ に対し、

$$D(H) \geq D(G)$$

である。

[証明]

もし $d^H_k < d^G_k$ なる k が存在したとすると, G には次数 d^G_k 以上の点が少なくとも k 個存在しているが, H には次数が d^G_k 以上の点は高々 $k - 1$ 個しか存在しないことになる。従って, H は G を部分グラフとして含めない。しかし、これは H が Γ^P の普遍グラフであることに反する。■

Ψ^P を p 点からなる 2-パスの族とする。

[補題 3. 2]

グラフ H が Ψ^P ($p \geq 4$) の普遍グラフであれば、その次数系列は、次のような条件を満たす。

$$\begin{aligned} d^H_1 &= p-1, \quad d^H_2 \geq \lfloor (p-4)/2 \rfloor + 3, \dots, \\ d^H_i &\geq \lfloor (p-4)/i \rfloor + 3, \dots, \\ d^H_{p-4} &\geq \lfloor (p-4)/(p-4) \rfloor + 3, \quad d^H_{p-3} \geq 3, \\ d^H_{p-2} &\geq 3, \quad d^H_{p-1} \geq 2, \quad d^H_p \geq 2 \end{aligned}$$

[証明]

グラフ G が点数 4 以上の 2-パスであれば、補題 2. 1 より、次数が 2 である点はちょうど 2 つあり、他の点の次数は 3 以上である。そこで、任意の $G \in \Psi^P$ の次数系列は、

$$\begin{aligned} D(G) = (3+\delta_1, \quad 3+\delta_2, \quad \dots, \\ 3+\delta_{p-2}, \quad 2, \quad 2) \end{aligned}$$

但し、 δ_i : 非負整数,

$$\delta_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-2}$$

と書け、 $d^G_{p-1} = d^G_p = 2$ である。次数の総和をとると、

$$\sum d^G_i = \sum \delta_i + 3 * (p-2) + 2 * 2$$

となるが、補題 2. 2 より、 $\sum d^G_i = 2 * |E(G)| = 2 * (2p-3)$ であるから、

$$\sum \delta_i = p-4$$

であることがわかる。 δ_i は非負整数であるから、常に $\delta_{p-1} = \delta_{p-2} = 0$ である。ゆえに、 $d^G_{p-3} = d^G_{p-2} = 3$ である。

次に、 $i \leq p-4$ の時には、 $d^G_i = \lfloor (p-4)/i \rfloor + 3$ であるような 2-パスが存在することを示す。

まず、扇 F^P は 2-パスであり、その次数系列は、

$$D(F^P) = (p-1, 3, 3, \dots, 3, 3, 2, 2)$$

であるから、 $d^F_1 = \lfloor (p-4)/1 \rfloor + 3 = p-1$ である。

$2 \leq i \leq p-4$ について、 $k = \lfloor (p-4)/i \rfloor$ と置き、以下のような 2-パスを考える。扇 F^P において、 $i-1$ 本の枝 $(v_0, v_{k+2}), (v_0, v_{2k+2}), (v_0, v_{(i-1)k+2})$ の両端点についてそれぞれ 2 同型変換を施して得られるグラフを Q_i とする。補題 2. 4 から、 Q_i も 2-パスである。 Q_i においては、次数が $\lfloor (p-4)/i \rfloor + 3$ 以上である点が i 個あり、そのうち次数がちょうど $\lfloor (p-4)/i \rfloor + 3$ である点が少なくとも $(i-1)$ 個ある。故に、 $d^Q_i = \lfloor (p-4)/i \rfloor + 3$ である。

従って、任意の i ($i \leq p-4$) に対して、 $d^Q_i = \lfloor (p-4)/i \rfloor + 3$ となる $G \in \Psi^P$ が存在する。

以上のことと補題 3. 1 より、この補題を得る。■

補題 3. 2 より、2-パスの普遍グラフの枝数に関する次の定理が導かれる。

[定理 3. 3]

Ψ^P の普遍グラフの枝数は少なくとも $\Omega(p \log p)$ である。

[証明]

Ψ^P の普遍グラフ H の枝数を q とすると、

$$2q = \sum d^H_i$$

である。補題 3. 2 を用いると、

$$2q \geq \sum \{\lfloor (p-4)/i \rfloor + 3\} + 3 + 3 + 2 + 2$$

であり、 $\lfloor x \rfloor > x - 1$ なので、 $\lfloor x \rfloor$ を $x - 1$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} 2q &> \sum \{(p-4)/i + 2\} + 10 \\ &= (p-4)(1+1/2+1/3+\dots+1/(p-4)) \\ &\quad + 2p + 2 \end{aligned}$$

となる。よって、普遍グラフの枝数は少なくとも $\Omega(p \log p)$ である。■

4. 2-パスの最適普遍グラフ

4. 1. K-グラフ

次に示すようなアルゴリズムによって構成される p 点からなるグラフを K-グラフと呼び、 K^P と表すことにする。このグラフが Ψ^P の最適普遍グラフであることを 4. 2 で示す。

グラフ G の 2 点 u, v 間の最短パスの長さを G における u, v 間の距離と呼び、 $d_G(u, v)$ で表す。

[アルゴリズム 4 A]

Step 1

点数 p のサイクルを作る。このグラフを C とする。点を閉路の順に $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}$ とする。

Step 2

全ての m ($0 \leq m \leq p-1$) に対して、 v_m と $d_C(v_m, v_n) = 2$ である v_n とを枝で結ぶ。

Step 3

全ての k ($2 \leq k \leq \lceil \log_2(p-1) \rceil - 1$) に対して以下の操作を行う：

2^{k-1} の倍数である m ($0 \leq m \leq p-1$) に対し、 v_m と $2^{k-1} + 1 \leq d_C(v_m, v_n) \leq 2^k$ である全ての v_n とを枝で結ぶ。■

例 4. 1

アルゴリズム 4 A に従って構成した K^{2^0} を (図 4. 1) に示す。■

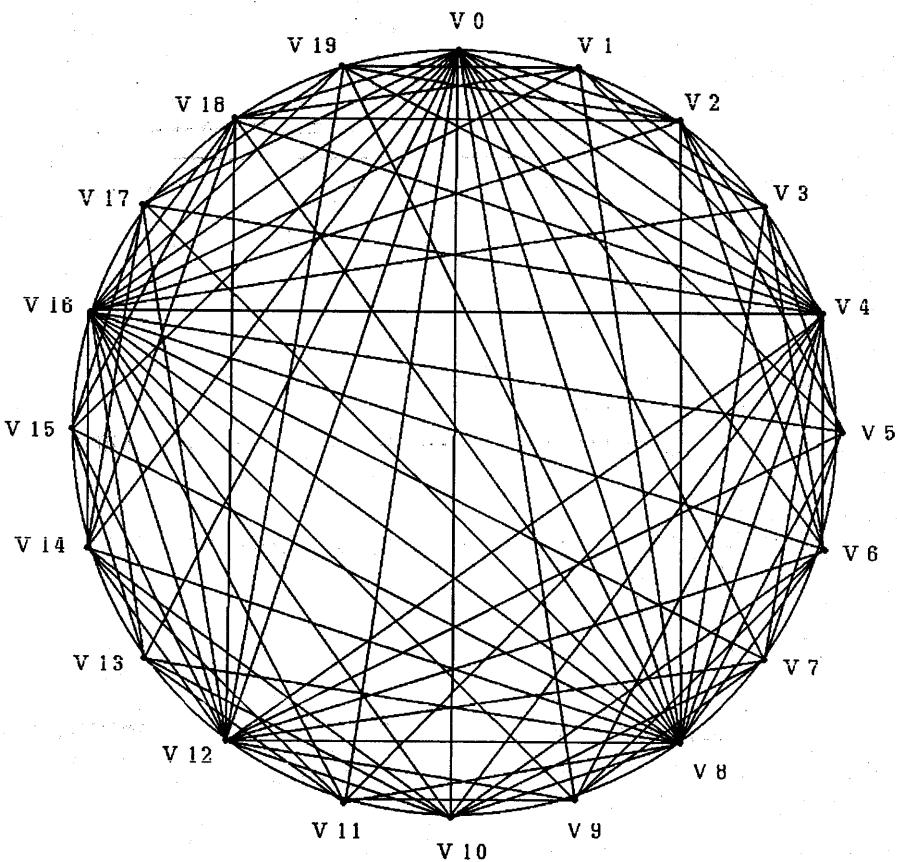
K-グラフに関して、以下のような補題が成立する。

[補題 4. 1]

m が 2^i ($i \geq 0$) の倍数であれば、 K^P において、 v_m は $d_C(v_m, v_n) \leq 2^{i+1}$ であるような任意の v_n と枝で結ばれている。

[証明]

i に関する帰納法で証明する。



〈図4.1〉 K^{20}

(1) $i = 0$ のとき

アルゴリズム4 A の step 1, 2において、任意の m について、 $d_c(v_m, v_n) \leq 2$ であるような v_m と v_n を枝で結ぶから、 $i = 0$ の時は明らか。

(2) $i = j - 1$ のとき補題が成立すると仮定する。 m が 2^j の倍数であれば、 m は 2^{j-1} の倍数でもあるから、仮定より、 v_m は、 $d_c(v_m, v_n) \leq 2^j$ であるような任意の v_n と枝で結ばれている。また、 m が 2^j の倍数（ただし、 $j \leq \lceil \log_2(p-1) \rceil - 2$ ）であれば、アルゴリズム4 A の step 3 で $k = j + 1$ のとき、 $2^{j+1} \leq d_c(v_m, v_n) \leq 2^{j+1}$ であるような全ての v_n は v_m と枝で結ばれる。（なお、 $j \geq \lceil \log_2(p-1) \rceil - 1$ であれば、 v_m は既に全ての点との間に枝があるので、自明。）結果、 m が 2^j の倍数であれば、 v_m は $d_c(v_m,$

$v_n) \leq 2^{j+1}$ であるような v_n と v_m との間には必ず枝がある。ゆえに、 $i = j$ の時も正しい。したがって、帰納法によりこの補題は証明された。■

【補題4.2】

①点数 p が偶数のとき、 K^p において、任意の点 v_m は $d_c(v_m, v_n) \leq 3$ であるような v_n と枝で結ばれている。

②点数 p が奇数のとき、 v_1 と v_{p-2} の間に枝がないことを除けば、 K^p において、任意の点 v_m は $d_c(v_m, v_n) \leq 3$ であるような v_n と枝で結ばれている。

【証明】

m が偶数のときは、補題4.1より明らかである。

m が奇数のときは、補題4.1より、 v_m は $d_c(v_m, v_n) \leq 2$ であるような任意の v_n

と枝で結ばれている。さらに、 $n = m \pm 3$ について、 n が偶数であるから v_m と v_n の間には枝がある。但し、点数が奇数の時、 v_1 と v_{p-2} は C 上で距離が3であるが、1も $p-2$ も奇数であるため、両者の間には枝がない。

この場合を除けば、 v_m は $d_G(v_m, v_n) \leq 3$ であるような v_n と枝で結ばれていることがわかる。■

さて、ここで K^p の枝数を評価してみよう。

【定理4.3】

K^p の枝数は、高々 $O(p \log p)$ である。

【証明】

アルゴリズム4AのStep1, Step2において加えられる枝の数をそれぞれ q_0 , q_1 とすると、 $q_0 = p$, $q_1 = p$ であることが容易にわかる。次に、Step3について考えてみる。Step3で $k = i$ の時に加えられる枝の数を q_i とする。Step3で $k = i$ の時には、 $\lceil p / 2^{i-1} \rceil$ 個の点について、 C 上の距離が $2^{i-1} + 1$ 以上 2^i 以下であるような2点間に枝を渡す。ある点からの C 上の距離が $2^{i-1} + 1$ 以上 2^i 以下であるような点は、閉路に沿って順方向及び逆方向にそれぞれ 2^{i-1} 個ある。よって、

$$q_i < 2 * 2^{i-1} * \lceil p / 2^{i-1} \rceil$$

である。そこで、 K^p の枝数 q に関して次の式が得られる。

$$q = \sum q_i < p + p + 2 * (2 * \lceil p / 2 \rceil + 4 * \lceil p / 4 \rceil + \dots + 2^{a-1} * \lceil p / 2^{a-1} \rceil)$$

(但し、 $a = \lceil \log_2(p-1) \rceil - 1$)

$\lceil x \rceil < x + 1$ であるから、 $\lceil x \rceil$ を $x + 1$ で置き換えて、

$$\begin{aligned} q &< 2p + 2 * (2 * p / 2 + 4 * p / 4 + \dots + 2^{a-1} * p / 2^{a-1}) \\ &\quad + 2 * (2 + 4 + \dots + 2^{a-1}) \\ &= 2p + 2p * (\lceil \log_2(p-1) \rceil - 2) + 0(p) \end{aligned}$$

したがって、 K^p の枝数は高々 $O(p \log p)$ である。■

4.2. K-グラフの最適普遍性の証明

定理3.3で、 Ψ^p の普遍グラフの枝数は少なくとも $\Omega(p \log p)$ であることを示した。また、定理4.3で K^p の枝数は高々 $O(p \log p)$ であることを示したので、 K^p が Ψ^p の普遍グラフになっていることを示せば、 K^p が Ψ^p の最適普遍グラフであることが言える。

$p = 2$ ($p = 3$) の時には自明に K_2 ($K_3 = K^3$) が最適普遍グラフである。そこで、以後 $p \geq 4$ と仮定する。

4.2.1. 2-パスの点のラベル付け

まず、 $G \in \Psi^p$ の点に以下のアルゴリズムによってラベルを付ける。

【アルゴリズム4B】

Step1

次数が2である点 v を1つ選び、 v に1とラベルを付ける。 v に隣接する2点のうち、次数が小さくない方の点に0とラベルを付

ける。 $i \leftarrow 1$ 。

Step2

ラベル i が付されている点に隣接する無ラベルの点の中で、 $i-1$ 以下のラベルが付されている点に隣接しているものにラベル $i+1$ を付ける。 $i \leftarrow i+1$ 。

Step3

$i = p-1$ ならば終了。そうでなければStep2へ戻る。■

簡単にわかるように、アルゴリズム4Bで付された各点のラベルは、0及び1とラベルされた2点からなる K_2 から再帰的に1点を附加して G を構成するときの各点の付加される順番に対応している。補題2.5からわかるように、Step2で $i+1$ とラベル付けされる点は一意的に定まる。以後、アルゴリズム4Bでラベル i を付された G の点を u_i と記すことにする。

【例4.2】

〈図4.2〉に、 $G \in \Psi^{2^0}$ の一例とアルゴリズム5Aによって付された各点のラベルを示す。■

4.2.2. 2-パスのK-グラフへの埋め込み

$G \in \Psi^p$ とする。アルゴリズム4Bのラベル付けを用いて、 G の点集合は $V(G) = \{u_0, u_1, \dots, u_{p-1}\}$ と表されているものとする。ここで、

$\ell_i = \max \{d \mid (u_i, u_{i+d}) \in E(G)\}$ と定義する。 $i \geq 3$ の時は、 $\ell_i = d_G(u_i) - 2$ であることが簡単にわかる。

G に対して、以下の手順で写像 $\phi: V(G) \rightarrow V(K^p)$ を定める。

【アルゴリズム4C】

Step1

$\phi(u_0) = v_0$ とする。

$i \leftarrow 1$ 。

Step2

$i > 2$ ならばStep3へ進む。

$\phi(u_i) = v_i$ とする。

$i = p-1$ ならば終了。

$i \leftarrow i+1$ 。

Step2へ戻る。

Step3

$m \leftarrow \lceil \log_2 \ell_i \rceil$

$i \leq h \leq i + 2^{m-1} - 1$ である 2^{m-1} の倍数を h として、 $\phi(u_i) = v_h$ とする。

$i \leftarrow i+1$ 。

Step4

$i > h$ ならば、Step2へ戻る。

$\phi(u_i) = v_{i-1}$ とする。

$i \leftarrow i+1$ 。

Step4へ戻る。■

【例4.3】

〈図4.2〉の $G \in \Psi^{2^0}$ にアルゴリズム4Cを適用して、 G を K^{2^0} に埋め込むと、(図4.3)の実線のようになる。■

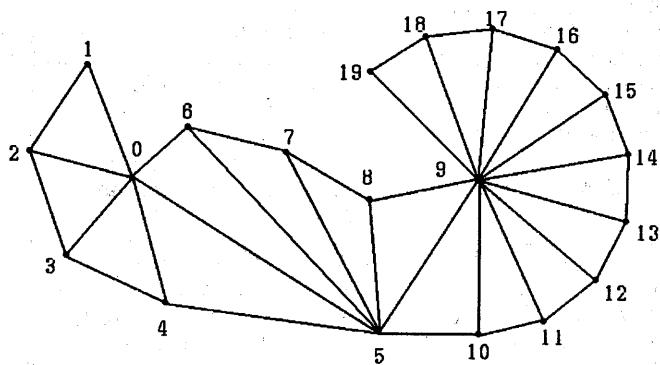


図4.2 $G \in \Psi^{20}$ の一例とそのラベル付け

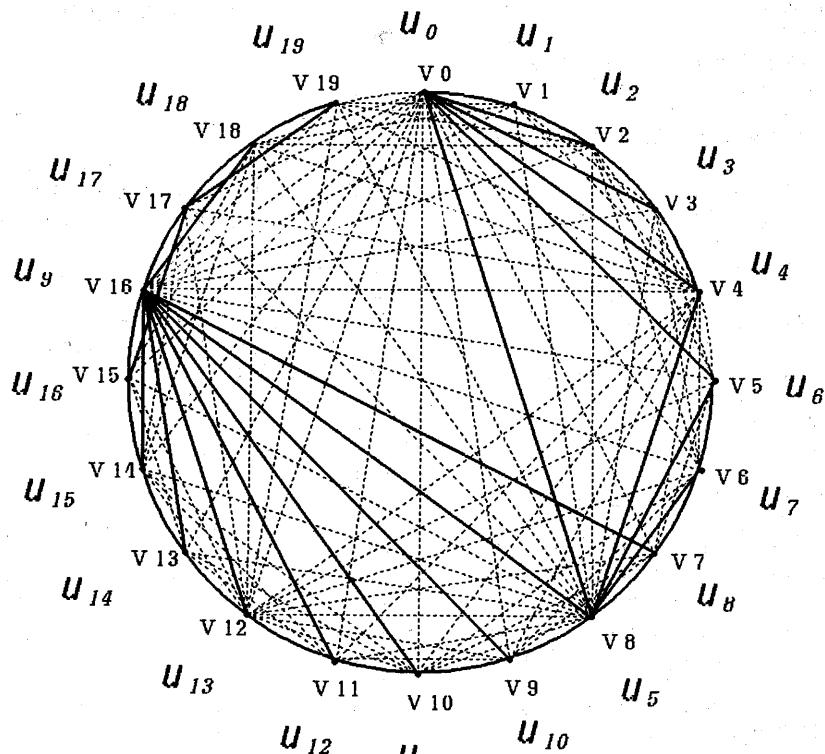


図4.3 写像の一例

アルゴリズム4Cによって定められた写像 ϕ が1対1写像であることは明らかであろう。さらに、 ϕ に関して次のことが成立する。

【補題4.4】

$(u_i, u_j) \in E(G)$ ならば、 $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^p)$.

[証明]

一般性を失うことなく、 $i < j$ であると仮定する。また u_0 について、 $\phi(u_0) = v_0$ は全ての点との間に枝があるから、自明である。よって、 $i \geq 1$ の場合について考察する。

$m = \lceil \log_2 l_i \rceil$, $n = \lceil \log_2 l_j \rceil$ とおく。

(1) $l_i \leq 2$, $l_j \leq 2$ のとき:

$l_i \leq 2$ より、 $j - i \leq 2$ である。 $\phi(u_i)$

と $\phi(u_j)$ が決定されるのはアルゴリズム 4 C の Step 2 あるいは Step 4 であるから, $d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) \leq j - i + 1 \leq 3$ であることがわかる。従って, 补題 4. 2 より, $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^P)$ である。

(2) $\ell_i > 2$, $\ell_j \leq 2$ のとき:

ℓ の定義より, $j - i \leq \ell_i \leq 2^n$ は明らかである。 $\phi(u_i) = v_h$ (但し, h は $i \leq h \leq i + 2^{n-1} - 1$ を満たす 2^{n-1} の倍数) であるので,

$$\begin{aligned} d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) &= d_c(v_h, \phi(u_j)) \\ &\leq \max\{h-i, i+\ell_i-h\} \\ &\leq 2^n \end{aligned}$$

という関係が導ける。今, h が 2^{n-1} の倍数であるので, 补題 4. 1 より v_h との距離が 2^n 以下であるような任意の点は v_h と枝で結ばれている。従って, $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^P)$ である。

(3) $\ell_i \leq 2$, $\ell_j > 2$ のとき:

このとき,

$$\begin{aligned} d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) &= d_c(\phi(u_i), v_j) + d_c(v_j, \phi(u_j)) \\ &= d_c(\phi(u_i), v_j) + d_c(v_j, \phi(u_j)) \end{aligned}$$

である。ここで, $\phi(u_i) = v_i$ 又は $\phi(u_i) = v_{i-1}$ であるから, $d_c(\phi(u_i), v_j) \leq 3$ となることがわかる。また, $\phi(u_j) = v_k$ (k は $j \leq k \leq j + 2^{n-1} - 1$ を満たす 2^{n-1} の倍数) であるから, $d_c(v_j, \phi(u_j)) \leq 2^{n-1} - 1$ となる。今, $n \geq 2$ であるから,

$$\begin{aligned} d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) &= d_c(\phi(u_i), v_k) \\ &= d_c(\phi(u_i), v_k) \leq 2^{n-1} + 2 \leq 2^n \end{aligned}$$

となる。 k が 2^{n-1} の倍数であるので, 补題 4. 1 より, v_k との距離が 2^n 以下であるような任意の点は v_k と枝で結ばれている。従って, $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^P)$ である。

(4) $\ell_i > 2$, $\ell_j > 2$ のとき:

$\phi(u_i) = v_h$ (h は $i \leq h \leq i + 2^{n-1} - 1$ を満たす 2^{n-1} の倍数), $\phi(u_j) = v_k$ (k は $j \leq k \leq j + 2^{n-1} - 1$ を満たす 2^{n-1} の倍数) であるから,

$$\begin{aligned} d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) &= d_c(v_h, v_k) \\ &= k - h \end{aligned}$$

を得る。

(4-1) $n > m$ のとき:

$2^{m-1} \leq j - i \leq 2^n$, $i \leq h \leq i + 2^{n-1} - 1$, $j \leq k \leq j + 2^{n-1} - 1$ であるから,

$$\begin{aligned} d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) &= k - h \leq 2^m + 2^{n-1} - 1 \leq 2^n \end{aligned}$$

となる。 k が 2^{n-1} の倍数であるので, 补題 4. 1 より, v_k との距離が 2^n 以下であるような任意の点は v_k と枝で結ばれている。従って, $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^P)$ である。

(4-2) $n \leq m$ のとき

$j \leq h + 2^n$ であるのは明らかである。 h は 2^{m-1} の倍数であるから, $h + 2^n$ も 2^{m-1} の倍数であり, また, 2^{n-1} の倍数もある。 k は j 以上の最小の 2^{n-1} の倍数であるから, $k \leq h + 2^n$ である。ゆえに,

$$d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) = k - h \leq 2^n$$

となる。 h が 2^{m-1} の倍数であるので, 补題 4. 1 より, v_h との距離が 2^n 以下であるような

任意の点は v_h と枝で結ばれている。従って, $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(K^P)$ である。■

補題 4. 4 は, Ψ^P に属する任意の 2-パス G が K^P に部分グラフとして含まれていることを示している。すなわち, K^P は Ψ^P の普遍グラフである。従って, 定理 3. 3, 定理 4. 3 と合わせて, 以下の定理を導くことができる。

【定理 4. 5】

K^P は Ψ^P の最適普遍グラフである。■

5. 次数が制限されている 2-パスの最適普遍グラフ

前節までは一般の 2-パスを扱ってきたが, 本節では, 点の次数が p に独立なある定数で制限されている 2-パスの普遍グラフについて考察する。

次数が r 以下に制限されている点数 p の 2-パスの族を Ψ^P とする。もちろん K^P も Ψ^P に関する普遍グラフであるが, 後に示すように, 最適ではない。本節では, 「 Ψ^P の最適普遍グラフで次数が制限されているものを構成する方法について述べる。手法は, Ψ^P の最適普遍グラフ K^P の場合のそれに少し変更を加えたものである。まず, グラフ「 K^P 」を構成するアルゴリズムを示す。

【アルゴリズム 5 A】

$R = \lceil \log_2 r \rceil$ とする。

Step 1

点数 p のサイクルを作る。このグラフを C とする。点のラベルを閉路の順に $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{p-1}$ とする。

Step 2

全ての m ($0 \leq m \leq p-1$) に対して, v_m と $d_c(v_m, v_n) = 2$ である v_n を枝で結ぶ。

Step 3

全ての k ($2 \leq k \leq R-1$) に対して以下の操作を行う:

2^{k-1} の倍数である m ($0 \leq m \leq p-1$) に対し, v_m と $2^{k-1} + 1 \leq d_c(v_m, v_n) \leq 2^k$ である全ての v_n を枝で結ぶ。

Step 4

2^{R-1} の倍数である m ($0 \leq m \leq p-1$) について, $2^{R-1} + 1 \leq d_c(v_m, v_n) \leq r$ であるような全ての v_n を v_m と枝で結ぶ。 $r \neq 2^R$ の時は, 2^{R-1} の倍数である m について, さらに $d_c(v_m, v_n) = 2^R$ であるような v_n を v_m と枝で結ぶ。■

「 K^P 」が K^P の部分グラフになっていることは, 構成法から明らかであろう。

「 K^P 」が, 「 Ψ^P 」に関する普遍グラフであることは, 前節と同じ方法で示すことができる。アルゴリズム 4 B によって $G \in \Psi^P$ にラベルを付け, アルゴリズム 4 C によって点の写像 $\phi: V(G) \rightarrow V(K^P)$ を定めてやる。このとき, 一般的の 2-パスの場合と同じように, 次の補題が成り立つ。

【補題 5. 1】

G が Ψ^P に属する任意の 2-パスであるとすると、アルゴリズム 4 C によって定められた写像 ϕ は、次の条件を満たす。

$$(u_i, u_j) \in E(G) \text{ ならば,}$$

$$(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(\Gamma K^P).$$

[証明]

ℓ_i が r 以下に制限されていることを除けば、補題 4. 4 の証明と同様に証明できる。

(1) $\ell_i \leq 2$, $\ell_j \leq 2$ のとき, (2) $2 < \ell_i \leq 2^{R-1}$, $\ell_j \leq 2$ のとき, (3) $\ell_i \leq 2$, $2 < \ell_j \leq 2^{R-1}$ のとき, そして, (4) $2 < \ell_i \leq 2^{R-1}$, $2 < \ell_j \leq 2^{R-1}$ のときは、補題 4. 4 の証明をそのまま使えるので、ここではそれ以外の時にについて論じる。

(2') $2^{R-1} < \ell_i \leq r$, $\ell_j \leq 2$ のとき:

アルゴリズム 4 C に従うと、 $\phi(u_i) = v_h$ (h は $i \leq h \leq i + 2^{R-1} - 1$ を満たす 2^{R-1} の倍数), $\phi(u_j) = v_j$ or v_{j-1} となる。また、 $j-i \leq \ell_i \leq r$ である。そこで、 $d_c(\phi(u_i), \phi(u_j)) \leq r$ であることがわかる。グラフの構成法より、 v_h は $d_o(v_h, v_n) \leq r$ であるような任意の v_n と枝で結ばれているから、 $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(\Gamma K^P)$ である。

(3') $\ell_i \leq 2$, $2^{R-1} < \ell_j \leq r$ のとき:

$$d_o(\phi(u_i), \phi(u_j))$$

$$= d_o(\phi(u_i), v_j) + d_o(v_j, \phi(u_j))$$

である。ここで、 $\phi(u_j) = v_k$ (k は $j \leq k \leq j + 2^{R-1} - 1$ を満たす 2^{R-1} の倍数), $\phi(u_i) = v_i$ または v_{i-1} であるから、 $d_o(\phi(u_i), v_j) \leq 3$, $d_o(v_j, \phi(u_j)) \leq 2^{R-1} - 1$ であることがわかる。故に、

$$d_o(\phi(u_i), \phi(u_j)) \leq 2^{R-1} + 2$$

となる。ここで $r \geq 2^{R-1} + 2$ であれば、 $d_o(\phi(u_i), \phi(u_j)) \leq r$ は明らかであり、 v_k は $d_o(v_k, v_n) \leq r$ であるような任意の v_n と枝で結ばれていることより、 $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(\Gamma K^P)$ であることがわかる。次に、 $r = 2^{R-1} + 1$ のときを考えてみる。 $i \geq 3$ ならば $\ell_i = d_G(u_i) - 2$ であるから、実際には $\ell_i \leq r - 2 = 2^{R-1} - 1$ (但し、 $i \neq 0$) であることがわかる。すなわち、 $r = 2^{R-1} + 1$ の場合には、(3') のようなケースはない。

(4) $2^{R-1} < \ell_i \leq r$, $2^{R-1} < \ell_j \leq r$ のとき:

$\phi(u_i) = v_h$ (h は $i \leq h \leq i + 2^{R-1} - 1$ を満たす 2^{R-1} の倍数), $\phi(u_j) = v_k$ (k は $j \leq k \leq j + 2^{R-1} - 1$ を満たす 2^{R-1} の倍数) である。ところで、 $h < i + 2^{R-1} \leq j \leq i + r < h + 2^R$ ので、 $k = h + 2^{R-1}$ or $h + 2^R$ であり、

$$d_o(\phi(u_i), \phi(u_j))$$

$$= d_o(v_h, v_k) = k - h = 2^{R-1} \text{ or } 2^R$$

となる。いずれにしても、アルゴリズム 6 A の Step 3 あるいは 4 で枝が加えられており、 $(\phi(u_i), \phi(u_j)) \in E(\Gamma K^P)$ である。

さて、このグラフ ΓK^P の枝数を評価してみよう。

【補題 5. 2】

ΓK^P の枝数は高々 $O(p)$ である。

[証明]

$R = \lceil \log_2 r \rceil$ とする。定理 4. 3 の証明と同様に、次のような式を導くことができる。

$$\begin{aligned} q &= \sum q_i \\ &< p+p+2*(2*\lceil p/2 \rceil + 4*\lceil p/4 \rceil + \dots \\ &\quad + 2^{R-1}*\lceil p/2^{R-1} \rceil) \\ &< p+p+2*(2*p/2+4*p/4+\dots+2^{R-1}*p/2^{R-1}) \\ &\quad + 2*(2+4+\dots+2^{R-1}) \\ &= 2p+2p*(R-1)+2^{R+1}-4 \\ &= 2Rp+2^{R+1}-4 \\ &= 2*\lceil \log_2 r \rceil *p+O(1) \end{aligned}$$

従って、 ΓK^P の枝数は高々 $O(p)$ である。■

また、 ΓK^P の構成法より、その最大次数 $\Delta(\Gamma K^P)$ に関して、次のことがわかる。

【補題 5. 3】

① r が 2 の整数乗で表される場合、

$$\Delta(\Gamma K^P) = 2 \cdot r$$

② ①以外の場合、

$$\Delta(\Gamma K^P) = 2 \cdot (r+1)$$

従って、 ΓK^P の最大次数は $O(1)$ である。

補題 5. 1 は、 ΓK^P は Ψ^P の普遍グラフであることを示している。2-パスの枝数は $O(p)$ なので、普遍グラフの枝数も少なくとも $\Omega(p)$ になる。ゆえに、補題 5. 2 より ΓK^P は Ψ^P の最適普遍グラフである。さらに、補題 5. 3 より、 ΓK^P の次数は制限されている。以上のことまとめると、次の定理になる。

【定理 5. 4】

ΓK^P は Ψ^P の最適普遍グラフであり、 ΓK^P の次数も制限されている。■

6. あとがき

小文で示した 2-パスの最適普遍グラフの構成法を自然に一般化すれば、 K -パスの場合の枝数 $O(p \log p)$ の最適普遍グラフが構成できると予想している。外平面グラフ、直並列グラフ、平面グラフ等の最適普遍グラフの構成問題は今後の課題である。

謝辞：本研究に関して御討論して頂いた東京工業大学の梶谷洋司教授および宮野浩助手に深謝する。

文献

- [1] S. Bhatt, F. Chung, T. Leighton and A. Rosenberg, "Optimal simulations of tree machines," Proc. 27th Annual IEEE Symp. Foundations of Computer Sci., Oct. 1986, pp. 274-282 (1986)
- [2] F. R. K. Chung and R. L. Graham, "On universal graphs for spanning trees," Proc. London Math. Soc., 27 pp. 203-211 (1983) (未確認)