アルゴリズム 23－4
(1991. 9. 19)

単一化における項のサイズを考慮した項の平均比較回数の近似的解析

中嶋卓雄　　中村良三

熊本大学　工学部

あらまし　単一化アルゴリズムにおける項の比較回数は，項のサイズの線形オーダであることが知られている．しかし，項のサイズが同じでも，現実的には項の構造上の差異により，項の比較回数は大きく左右される．

本論文では，単一化対象の項に含まれる固有な変数は，項の内部では高々１回しか出現しないと制限し，項のサイズから生成可能なすべての項の構造を木によって表す．そして，項の単一化は，Robinsonのオリジナルな単一化アルゴリズムに準じて，２つの木を行きがけ順になぞりながら各節点の単一化可能性を調べ，任意の比較回数で単一化に成功する確率と失敗する確率とを求め，単一化に要する項の平均比較回数を解析する．

提示する解析から導出された評価式は，前述の制限を許容すれば，項のサイズと項の構造を考慮に入れて，項の平均比較回数を適切に評価することができる．

An Approximate Analysis of the Average Number of Term Comparisons Considering the Term Size for Unification of Terms

Takuo Nakashima　　Ryozo Nakamura

Faculty of Engineering, Kumamoto University

39-1, Kurokami 2-chome, Kumamoto-shi 860, Japan

Abstract　The time complexity of linear unification algorithm is known as linear in the size of the input terms, however, the number of term comparisons for unification depends on the stractures of term. In this paper, we analyze the average numberof term comparisons in consideration of the size of the input terms and its structures in conformity to Robinson's original unification algorithm. In the analysis, first we represent the term by the tree structures on the assumption that there are no shared variable in a term. Next, we evaluate the average number of term comparisons for successful and unsuccessful unification.

1．まえがき

論理プログラムの時間計算量は，反駁証明手続きであるレゾリューション(resolution)における単一化アルゴリズムの計算量に大きく依存している．これまで種々の単一化アルゴリズムが提案されてきたが[1],[2]，それらの中で最良のアルゴリズムを判定する一致した見解はない．PatersonとWegmanのアルゴリズム[1]では，項をdag(directed acyclic graph)で表し，dagをなぞる方法を工夫することによって，時間計算量は，出現チェックを考慮しても，高々入力される項のサイズ[3]の線形オーダであることが知られている．しかし，具現化に際してシステムに負荷がかかり現実的には使用されていない．一方，MartelliとMontanariのアルゴリズム[2]やRobinsonのアルゴリズム[4]は，最悪な場合にはその時間計算量が指数オーダになるにもかかわらず，具現化の容易さなどから多くのアプリケーションにおいて使われ続けている．

また，実行時間を判定する尺度としては，入力される項のサイズによる項の比較回数が用いられてきたが，現実的には，項のサイズが同じであっても，項の構造上の差異により，その比較回数は大きく左右される．したがって，項のサイズと項の構造とを考慮にいれて，項の比較回数を平均的に把握することは重要である．

本論文では，単一化の対象である２つの項のサイズが与えられたとき，項の構造を考慮に入れて，単一化に成功するときと失敗するときの項の平均比較回数を解析する．提示する解析では，項の内部では共有変数を持たない，すなわち項の内部では固有な変数は高々１回しか出現しないという制限のもとで，項を木によって表現する．そして，Robinsonのオリジナルな単一化アルゴリズムに準じて，木を行きがけ順(preorder)になぞりながら節点を比較することによって，単一化に成功するときと失敗するときの項の平均比較回数を解析する．

以下，第２章では，まず，項のサイズに基づき項を木によって表現し，項と木の節点との関係を定義する．次に，項を木で表したときの節点の構造を定式化する．第３章では，２つの項の単一化を２つの木の節点を比較する手続きによって表す．次に，任意の比較回数で単一化に成功する場合と失敗する場合との確率を求め，単一化に要する項の比較回数の平均値を解析する．第４章では，具体的な解析例を示す．

2．項の木による表現

はじめに，与えられた項のサイズから生成される相異なる木の総数を算定する．次に，項を木で表したときの節点の構造を定式化する．

2．1　項のサイズと木構造

Shapiro[3]に従い，項のサイズとはその文字表現中の記号の数と定義する．すなわち，単一の記号からなる定数や変数のサイズは１であり，また，関数のサイズは，その引数のサイズの和に１を加えた数とする．たとえば，関数f(e(x), y)は，e(x)のサイズが２，yのサイズが１であるので，f(e(x), y)の項のサイズは４となる．また，リスト[a, b]は，Lispに準じて２引数の関数consを用いれば，cons(a, cons(b, nil))となるので，その項のサイズは5となり，一般にn個の要素からなるリストの項のサイズは2n+1となる．

また，論理プログラムにおける項の定義[5]において，項の内部では固有な変数は高々１回しか出現しないと仮定すれば，項を順序木（以降簡単に木と表現する）で表現することができる．

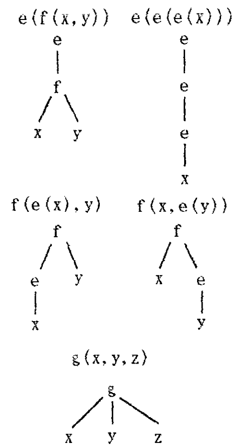


図１　項のサイズが４の相異なる項の構造とその木表現

たとえば，項のサイズが４である項は，１引数の関数をe，２引数の関数をf，３引数の関数をgと仮定すれば，g(x,y,z)，f(e(x),y)，f(x,e(y))，e(f(x,y))，e(e(e(x)))のような相異なる項を生成できる．これらの項は図１のように節点数が４の相似(similar)でない木構造で表現できる．このように項を木で表現すると，項のサイズを木の節点数に対応づけて考察することができる．

ここで，項を木で表現したとき，項と木の節点との関係を次のように定義する．

【定義】項と木の節点との関係

1.項における変数または定数は木の端節(terminal node)によって表す．
2.項における関数は，その引数の数の部分木を持つ枝節(branch node)で表し，その部分木の数を次数(degree)と呼ぶ．

次に，与えられた項のサイズから生成される相異なる木の総数を計算する．参考文献6)から，木を２分木として表現したとき，その２分木の根は右部分木を持たないため，n個の節点からなる木の総数はn-1個の節点を持つ２分木の総数b_{n-1}に等しい[6]．

n個(n≧0)の節点からなる２分木の総数b_nは，n>0のときは，左部分木にk個の節点，右部分木にn-1-k個の節点を配置する組合せの数として次のように表される．

$$b_n=\begin{cases} b_0 b_{n-1}+b_1 b_{n-2}+\cdots+b_{n-1} b_0, & (n\geq 1) \\ 1 & (n=0) \end{cases} \quad (1)$$

さらに，一般式として次のように表される．

$$b_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \quad (2)$$

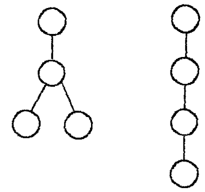
ところで，n個の節点からなる木をその根の次数h(0<h≦n-1)により分類すると，根の次数がhとなる木の総数t(n,h)は，その根における各部分木がそれぞれ$n_1, n_2, \cdots, n_h$個の節点から構成される場合の数として，次のように表すことができる．

$$t(n,h)=\sum_{\substack{n_1+n_2+\cdots n_h=n-1 \\ n_1\geq 1, n_2\geq 1, \cdots, n_h\geq 1}} b_{n_1-1} b_{n_2-1}\cdots b_{n_h-1} \quad (3)$$

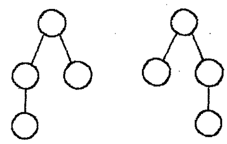
【例１】項のサイズから木の総数を算定する具体例として，項のサイズが4の場合を示す．サイズが4の項から生成される木を根の次数により分類したものを図２に示す．このとき，根の次数が１となる木の総数t(4,1)は，図２(a)に示すように，３個の節点を持つ部分木の総数すなわちb_2=2個となる．同様に根の次数hがh=2,3の場合の木の総数は，

$t(4,2)=b_0b_1+b_1b_0=2$，　$t(4,3)=b_0b_0b_0=1$

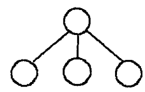
となり，根の次数が2,3のそれぞれの木を図２の(b)，(c)に示す．



(a) 根の次数が1の場合



(b) 根の次数が2の場合



(c) 根の次数が3の場合

図２　節点数が4個の相異なる木の総数

上記の結果，項のサイズnが与えられたとき，木の根の次数がhとなる確率を$\rho(n,h)$とすると，$\rho(n,h)$は(3)式から次のように表される．

$$\rho(n,h)=t(n,h)/b_{n-1} \quad (4)$$

【例２】図２の項のサイズが４のときに対応する木において，確率$\rho(n,h)$は次のようになる．

$\rho(4,1)=t(4,1)/b_3=2/5$

$\rho(4,2)=t(4,2)/b_3=2/5$

$\rho(4,3)=t(4,3)/b_3=1/5$

２．２　項の構造の定式化

項のサイズから生成可能な項の構造を木で表すと，項と木の節点との関係から，端節は項における変数と定数との両者を表す．また，枝節は項における関数を表し，同じ引数の個数を持つ関数は同じ次数を持つ枝節となり同じ木の形となる．

したがって，端節における変数と個々の定数との区別，ならびに枝節においては同じ引数の

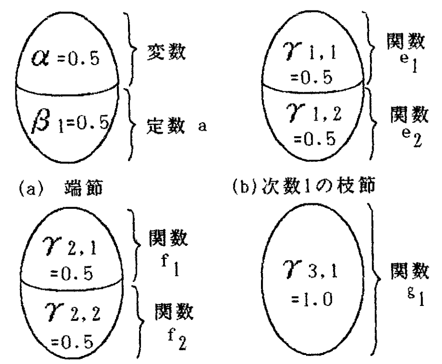
個数を持つ固有な関数をそれぞれ区別するため，下記のように端節および枝節の構成を確率化する．この確率化は木の端節および枝節に対して一様に行われる．

【端節】端節が変数となる確率をαとし，端節が定数となる場合には，固有な定数の数をp個とすれば，個々の定数に識別番号を付けて区別し，識別番号iの定数が端節に配置される確率をβ_iとする．このとき，任意の端節は次の式を満足すると仮定する．

$$\alpha+\sum_{i=1}^{p}\beta_i=1 \qquad (5)$$

【枝節】次数hの枝節の場合には，h個の引数を持つ固有な関数の数をq_h個とすれば，それらの固有な関数に識別番号を付けて区別し，識別番号iの関数がその枝節に配置される確率を$\delta_{h,i}$とする．このとき，任意の次数hの枝節は，次の式を満足すると仮定する．

$$\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}=1 \qquad (6)$$



(a) 端節　(b)次数1の枝節

(c)次数2の枝節　(d)次数3の枝節

図3　節点の確率表現の具体例

次に，下記の【例3】において，具体的に項として定数，変数および関数を与え，各節点の確率化を示す．

【例3】節点の構造を確率化する具体例として，項が変数x，定数a，1個の引数を持つ関数e_1, e_2，2個の引数を持つ関数f_1, f_2および3個の引数を持つ関数g_1から構成される場合について示す．まず，端節では定数aに識別番号1を付け，変数xと定数aとが一様に出現すると仮定すれば，任意の端節の確率は，$\alpha=0.5$, $\beta_1=0.5$となる．

次に，1引数の関数e_1, e_2に識別番号1,2を付け，2引数の関数f_1, f_2に識別番号1,2，3引数の関数g_1に識別番号1を付けて，引数の数がh(=1,2,3)の各関数が一様に出現すると仮定すると，次数が1の任意の枝節の確率は$\delta_{1,1}=\delta_{1,2}=0.5$となる．同様に次数が2および3の各枝節の確率は$\delta_{2,1}=\delta_{2,2}=0.5$および$\delta_{3,1}=1.0$となる．

このとき，端節の確率分布は図3(a)となり，次数1,2および3の枝節の確率分布は，それぞれ図3の(b), (c)および(d)となる．

3．項の単一化における平均比較回数の解析

はじめに，2つの項の単一化を2つの木の節点を比較する手続きによって表す．次に，任意の比較回数で項が単一化に成功する場合と失敗する場合の確率を求め，項の比較回数の平均値を解析する．

3．1　項の単一化

項の単一化はRobinsonのオリジナルな単一化アルゴリズム[4)]に準ずるが，項に含まれる固有な変数は高々1回しか出現しないという仮定のもとで項を木で表しているので，項の単一化は，前節の項の木による表現に基づき，2つの木を行きがけ順になぞりながら，2つの木の節点を比較する次のような手続きとなる[7)]．

A0［初期化］

項のサイズがmとnの単一化対象な2つの項をそれぞれ木T_1とT_2によって表し，2つの木T_1とT_2との単一化の試みをunify(T_1, T_2)によって表す．

A1［単一化の判定，unify(T_1, T_2)］

a)T_1とT_2とが共に端節の場合(m=n=1)

a1)単一化に成功する場合には，項が変数同士，変数と定数および同じ定数同士の単一化となり，

$$\alpha^2+2\alpha\sum_{i=1}^{p}\beta_i+\sum_{i=1}^{p}\beta_i^2$$

の確率で単一化に成功する．

a2)単一化に失敗する場合には，項が相異なる定数同士の単一化となり，

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{p}\beta_i\beta_j,$$

の確率で単一化に失敗する．

b) T_1が端節でT_2が枝節の場合（T_2が端節でT_1が枝節の場合）（$(m>1, n=1)$または$(m=1, n>1)$）

b1) 単一化に成功する場合には，端節が変数である場合のみであるから，

$$\alpha$$

の確率で単一化に成功する．

b2) 単一化に失敗する場合には，

$$1-\alpha$$

の確率で単一化に失敗する．

c) T_1とT_2とが共に枝節の場合 $(m>1, n>1)$

c1) 単一化に成功するには，項が同じ関数同士すなわち枝節が同じ次数をもちかつ同じ関数である必要があり，

$$\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)} \rho(m,h)\,\rho(n,h) \sum_{i=1}^{q_h} \delta_{h,i}^{2} \quad ☆$$

の確率で単一化に成功する．そして，枝節T_1とT_2との最左からの部分木を順次それぞれ$t_{1,1}, t_{1,2}, \cdots, t_{1,h}$と$t_{2,1}, t_{2,2}, \cdots, t_{2,h}$で表すと，unify$(t_{1,1}, t_{2,1})$，unify$(t_{1,2}, t_{2,2})$，$\cdots$，unify$(t_{1,h}, t_{2,h})$の順にA1を再帰的に呼び出す．

c2) 単一化に失敗する場合には，

$$1-\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)} \rho(m,h)\,\rho(n,h) \sum_{i=1}^{q_h} \delta_{h,i}^{2}$$

の確率で単一化に失敗する．そして，木のなぞりを終了する．

3．2　項の平均比較回数の解析

単一化の対象となる2つの項のサイズをmとnとし，2つの項が丁度k回の比較で単一化に成功する確率を$\psi(m,n,k)$，失敗する確率を$\tilde{\psi}(m,n,k)$とする．

まず，2つの項が1回の比較で単一化に成功する確率$\psi(m,n,1)$は，端節と端節，または端節と枝節とが単一化に成功する場合であるから，確率$\psi(m,n,1)$は次のようになる．

$$\psi(m,n,1)=\begin{cases} \alpha^2+2\alpha\sum_{i=1}^{p}\beta_i+\sum_{i=1}^{p}\beta_i^2, & \text{if } m=n=1; \\ \alpha, & \text{if } (m=1,n>1) \text{ or } (m>1,n=1); \\ 0, & \text{if } (m>1,n>1). \end{cases} \quad (7)$$

一方，1回の比較で単一化に失敗する確率$\tilde{\psi}(m,n,1)$は，次のようになる．

$$\tilde{\psi}(m,n,1)=\begin{cases} \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1\,(i\neq j)}^{p}\beta_i\beta_j, & \text{if } m=n=1; \\ 1-\alpha, & \text{if } (m=1,n>1) \text{ or } (m>1,n=1); \\ 1-\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)}\rho(m,h)\,\rho(n,h)\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}, & \text{if } (m>1,n>1). \end{cases} \quad (8)$$

次に，サイズがmとnの2つの項が2回の比較で単一化に成功する確率$\psi(m,n,2)$は，1回目の比較で次数1の枝節同士が単一化に成功し，次に，その引数となる部分木が1回の比較で単一化に成功する場合である．したがって，その確率$\psi(m,n,2)$は次のようになる．

$$\psi(m,n,2)=\rho(m,1)\,\rho(n,1)\sum_{i=1}^{q_1}\delta_{1,i}^{2}\,\psi(m-1,n-1,1)$$

一方，2回の比較で単一化に失敗する確率$\tilde{\psi}(m,n,2)$は，1回目の比較で次数h $(1\leq h\leq \min(m-1, n-1))$の枝節同士が単一化に成功し，次に，その最左の部分木が1回の比較で単一化に失敗する場合であるから，確率$\tilde{\psi}(m,n,2)$は次のようになる．

$$\tilde{\psi}(m,n,2)=\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)}\rho(m,h)\,\rho(n,h)\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_h=m-1\\ n_1+\cdots+n_h=n-1\\ (m_j>0,\,n_j>0,\,1\leq j\leq h)}}\tilde{\psi}(m_1,n_1,1)$$

ただし，$m_j, n_j, (1\leq j\leq h)$は次数$h$の枝節の最左からの各部分木の節点数を表す．

同様にサイズがmとnの2つの項が3回の比較で単一化に成功する確率$\psi(m,n,3)$は，1回目の比較で次数1の枝節同士が単一化に成功し，その部分木が2回の比較で単一化に成功する場合と，1回目の比較で次数2の枝節同士が単一化に成功し，その2つの部分木がそれぞれ1回の比較で単一化に成功する場合との和になる．前者の確率は

$$\rho(m,1)\,\rho(n,1)\sum_{i=1}^{q_1}\delta_{1,i}^{2}\;\psi(m-1,n-1,2)$$

となり，後者の確率は

$$\rho(m,2)\,\rho(n,2)\sum_{i=1}^{q_2}\delta_{2,i}\sum_{\substack{m_1+m_2=m-1\\ n_1+n_2=n-1}}\psi(m_1,n_1,1)\;\;\psi(m_2,n_2,1)$$

となるので，確率$\psi(m,n,3)$は次のようになる．

☆ $\min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$は$x_1, x_2, \cdots, x_n$の最小値を与える関数

$$\psi(m,n,3)=\rho(m,1)\,\rho(n,1)\sum_{i=1}^{q_1}\delta_{1,i}{}^2\,\psi(m-1,n-1,2)$$

$$+\rho(m,2)\,\rho(n,2)\sum_{i=1}^{q_2}\delta_{2,i}{}^2\sum_{\substack{m_1+m_2=m-1\\ n_1+n_2=n-1}}\psi(m_1,n_1,1)\,\psi(m_2,n_2,1)$$

一方，３回の比較で単一化に失敗する確率$\tilde{\psi}(m,n,3)$は，１回目の比較で次数hの枝節同士が単一化に成功し，その最左の部分木が２回の比較で単一化に失敗する場合と，その最左の部分木が１回の比較で単一化に成功し，左から２番目の部分木が１回の比較で単一化に失敗する場合との和となり，次のように表される．

$$\tilde{\psi}(m,n,3)=\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)}\rho(m,h)\,\rho(n,h)\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}{}^2 *$$

$$*\Big\{\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_h=m-1\\ n_1+\cdots+n_h=n-1\\ (m_j>0,\,n_j>0,\,1\le j\le h)}}\tilde{\psi}(m_1,n_1,2)+\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_h=m-1\\ n_1+\cdots+n_h=n-1\\ (m_j>0,\,n_j>0,\,1\le j\le h)}}\psi(m_1,n_1,1)\quad\tilde{\psi}(m_2,n_2,1)\Big\}$$

したがって，単一化の対象となる２つの項のサイズをmとnとするとき，２つの項が丁度k回(k>1)の比較で単一化に成功する確率$\psi(m,n,k)$と，失敗する確率$\tilde{\psi}(m,n,k)$は，それぞれ次のように一般化される．

まず，k回の比較で単一化に成功するには，対応する木の節点が逐次単一化可能で丁度k回の比較で単一化が終了する必要があるので，成功する確率$\psi(m,n,k)$は，予め対応する木の根や枝節の次数を等しく定めて次のように表される．

$$\psi(m,n,k)=$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{h=1}^{k-1}\rho(m,h)\,\rho(n,h)\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}{}^2 * \\ \displaystyle\quad *\sum_{\substack{m_1+m_2+\cdots+m_h=m-1\\ n_1+n_2+\cdots+n_h=n-1\\ k_1+k_2+\cdots+k_h=k-1\\ (m_j>0,\,n_j>0,\,k_j>0,\,1\le j\le h)}}\psi(m_1,n_1,k_1)\,\psi(m_2,n_2,k_2)\cdots\quad\psi(m_h,n_h,k_h) & \text{if}\,(k>1,\,m\ge k,\,n\ge k); \\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{9}$$

一方，k回の比較で単一化に失敗するには，k-1回の比較までは単一化に成功し，丁度k回の比較で単一化に失敗する確率を求めることになるので，失敗する確率$\tilde{\psi}(m,n,k)$は次のように表される．

$$\tilde{\psi}(m,n,k)=$$

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{h=1}^{\min(m-1,n-1)}\rho(m,h)\,\rho(n,h)\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}{}^2\sum_{j=1}^{h} * \\ \displaystyle\quad *\sum_{\substack{k_1+k_2+\cdots+k_j=k-1\\ m_1+m_2+\cdots+m_h=m-1\\ n_1+n_2+\cdots+n_h=n-1\\ (m_j>0,\,n_j>0,\,k_j>0,\,1\le j\le h)}}\psi(m_1,n_1,k_1)\cdots\psi(m_{j-1},n_{j-1},k_{j-1})\quad\tilde{\psi}(m_j,n_j,k_j) & \text{if}\,(k>1,\,m\ge k,\,n\ge k); \\ 0.0 & \text{otherwise.}\end{cases}\tag{10}$$

上記の結果，単一化する２つの項のサイズmとnが与えられたとき，単一化に成功するときの項の平均比較回数をS(m,n)，および単一化に失敗するときの項の平均比較回数をU(m,n)とすると，それらの平均比較回数はそれぞれ次のように表される．

$$S(m,n)=\frac{\sum_{k\ge1}k\,\psi(m,n,k)}{\sum_{k\ge1}\psi(m,n,k)}\tag{11}$$

$$U(m,n)=\frac{\sum_{k\ge1}k\,\tilde{\psi}(m,n,k)}{\sum_{k\ge1}\tilde{\psi}(m,n,k)}\tag{12}$$

4．解析例

２つの項のサイズ(m=4,n=4)を与え，単一化に成功するときと失敗するときの項の平均比較回数を具体的に解析する．

【例４】 固有な定数の個数pをp=3とし，その３個の定数が一様に出現すると仮定する．また，端節が変数となる確率αを$\alpha=0.5$と仮定すれば，(5)式から端節の構造は次のように確率化される．

$\alpha=0.5$，$\beta_1=0.167$，$\beta_2=0.167$，$\beta_3=0.167$

また，h(h=1,2,3)個の引数を持つ固有な関数の数q_hを，それぞれ$q_1=3$，$q_2=2$，$q_3=2$とし，同じ引数の数の関数が一様に出現すると仮定すれば，枝節の構造は(6)式から次のように確率化される．

$\delta_{1,1}=\delta_{1,2}=\delta_{1,3}=0.333$，$\delta_{2,1}=\delta_{2,2}=0.5$

$\delta_{3,1}=\delta_{3,2}=0.5$

上記のように，項の構造と木の端節および枝節との確率化に基づき，２つの項が単一化に成功する確率と失敗する確率は，次のように算定される．

まず，１回の比較で単一化に成功する確率$\psi(4,4,1)$および失敗する確率$\tilde{\psi}(4,4,1)$は，(7)および(8)式に，【例２】で算定した木の構造に関する確率$(\rho(n,h))$と上記の節の構造に関する確率$(\delta_{h,i})$を用いて，次のようになる．

$$\psi(4,4,1)=0.0$$

$$\tilde{\psi}(4,4,1)=1-\sum_{h=1}^{3}\rho(4,h)^2\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}{}^2$$

$$=1-(0.4^2*3*0.333^2+0.4^2*2*0.5^2+0.2^2*2*0.5^2)$$

$$=0.847$$

次に2回の比較で単一化に成功する確率ψ(4,4,2)は，(9)，(7)式から次のようになる．

$$\psi(4,4,2)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\psi(3,3,1)=0$$

一方，2回の比較で単一化に失敗する確率$\bar{\psi}$(4,4,2)は，(10)式から次のように展開される．

$$\bar{\psi}(4,4,2)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\bar{\psi}(3,3,1)$$
$$+\rho(4,2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}^2(\bar{\psi}(2,2,1)+\bar{\psi}(2,1,1)+\bar{\psi}(1,2,1)+\bar{\psi}(1,1,1))$$
$$+\rho(4,3)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}^2\bar{\psi}(1,1,1)$$

上記の右辺を(8)，(4)，(3)式に基づき展開すると，次のようになる．

$$\bar{\psi}(3,3,1)=1-\sum_{h=1}^{2}\rho(3,h)^2\sum_{i=1}^{q_h}\delta_{h,i}^2$$
$$=1-((t(3,1)/b_2)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2+(t(3,2)/b_2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}^2)$$
$$=1-(0.5^2*3*0.333^2+0.5^2*2*0.5^2)=0.792$$

$$\bar{\psi}(2,2,1)=1-\rho(2,1)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{1,i}^2$$
$$=1-(t(2,1)/b_1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2$$
$$=1-3*0.333^2=0.667$$
$$\bar{\psi}(2,1,1)=\bar{\psi}(1,2,1)=1-\alpha=0.5$$
$$\bar{\psi}(1,1,1)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{j=1\\(i\neq j)}}^{3}\beta_i\beta_j=6*0.167^2=0.167$$

したがって，2回の比較で単一化に失敗する確率$\bar{\psi}$(4,4,2)は次のようになる．

$$\bar{\psi}(4,4,2)=0.4^2*3*0.333^2*0.792$$
$$+0.4^2*2*0.5^2(0.667+0.5+0.5+0.167)$$
$$+0.2^2*2*0.5^2*0.167$$
$$=0.192$$

次に3回の比較で単一化に成功する確率ψ(4,4,3)は，(9)式から，次のように導き出される．

$$\psi(4,4,3)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\psi(3,3,2)$$
$$+\rho(4,2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}^2(\psi(1,1,1)\underline{\psi(2,2,1)}+\psi(1,2,1)\psi(2,1,1)$$
$$+\psi(2,1,1)\psi(1,2,1)+\underline{\psi(2,2,1)}\psi(1,1,1))$$

上記の右辺を(9)，(7)式によって展開すると，下線の部分は値が0となり，下記のようになる．

$$\psi(3,3,2)=\rho(3,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\psi(2,2,1)=0$$
$$\psi(1,2,1)=\psi(2,1,1)=\alpha=0.5$$
$$\psi(1,1,1)=\alpha^2+2\alpha\sum_{i=1}^{3}\beta_i+\sum_{i=1}^{3}\beta_i^2$$
$$=0.5^2+2*0.5*0.5+3*0.167^2=0.833$$

したがって，3回の比較で単一化に成功する確率 ψ(4,4,3)は次のようになる．

$$\psi(4,4,3)=0.4^2*(0.5^2+0.5^2)(0.5^2+0.5^2)=0.04$$

一方，単一化に失敗する確率$\bar{\psi}$(4,4,3)は(10)式から，次のように導き出される．

$$\bar{\psi}(4,4,3)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\bar{\psi}(3,3,2)$$
$$+\rho(4,2)\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}(\underline{\bar{\psi}(1,1,2)}+\underline{\bar{\psi}(2,1,2)}+\underline{\bar{\psi}(1,2,2)}+\bar{\psi}(2,2,2)$$
$$+\psi(1,1,1)\bar{\psi}(2,2,1)+\psi(2,1,1)\bar{\psi}(1,2,1)$$
$$+\psi(1,2,1)\bar{\psi}(2,1,1)+\underline{\psi(2,2,1)}\bar{\psi}(1,1,1))$$
$$+\rho(4,3)\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}(\underline{\bar{\psi}(1,1,2)}+\psi(1,1,1)\ \bar{\psi}(1,1,1))$$

上記の右辺を(10)，(8)式によって展開すると，下線の部分は値が0となり，下記のようになる．

$$\bar{\psi}(3,3,2)$$
$$=\rho(3,1)\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}\ \bar{\psi}(2,2,1)+\rho(3,2)\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}^2\bar{\psi}(1,1,1)$$
$$=0.5*3*0.333*0.667+0.5*2*0.5*0.167=0.076$$

$$\bar{\psi}(2,2,2)=\rho(2,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\bar{\psi}(1,1,1)$$
$$=3*0.333^2*0.167=0.056$$

したがって，3回の比較で単一化に失敗する確率$\bar{\psi}$(4,4,3)は次のようになる．

$$\bar{\psi}(4,4,3)=0.4^2*3*0.333^2*0.076$$
$$+0.4^2*2*0.5^2(0.056+0.833*0.667+0.5^2+0.5^2)$$
$$+0.2^2*2*0.5^2*0.833*0.167$$
$$=0.093$$

次に4回の比較で単一化に成功する確率ψ(4,4,4)と失敗する確率$\bar{\psi}$(4,4,4)は(9)式と(10)式から，次のように導き出される．

$$\psi(4,4,4)$$
$$=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\psi(3,3,3)$$
$$+\rho(4,2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}^2(\psi(1,1,1)\psi(2,2,2)+\underline{\psi(1,1,2)\psi(2,2,1)}$$
$$+\psi(1,2,1)\underline{\psi(2,1,2)}+\underline{\psi(1,2,2)}\psi(2,1,1)$$
$$+\psi(2,1,1)\underline{\psi(1,2,2)}+\underline{\psi(2,1,2)}\psi(1,2,1)$$
$$+\underline{\psi(2,2,1)}\psi(1,1,2)+\psi(2,2,2)\psi(1,1,1))$$
$$+\rho(4,3)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}^2(\psi(1,1,1)\psi(1,1,1)\ \psi(1,1,1))$$

$$\bar{\psi}(4,4,4)$$
$$=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}^2\bar{\psi}(3,3,3)$$
$$+\rho(4,2)\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}(\underline{\bar{\psi}(1,1,3)}+\underline{\bar{\psi}(2,1,3)}+\underline{\bar{\psi}(1,2,3)}+\underline{\bar{\psi}(2,2,3)}$$
$$+\psi(1,1,1)\bar{\psi}(2,2,2)+\psi(2,1,1)\underline{\bar{\psi}(1,2,2)}$$
$$+\underline{\psi(1,1,2)}\bar{\psi}(2,2,1)+\underline{\psi(2,1,2)}\bar{\psi}(1,2,1)$$
$$+\psi(1,2,1)\underline{\bar{\psi}(2,1,2)}+\underline{\psi(2,2,1)}\bar{\psi}(1,1,2)$$
$$+\underline{\psi(1,2,2)}\bar{\psi}(2,1,1)+\psi(2,2,2)\bar{\psi}(1,1,1))$$

$$+\rho(4,3)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}{}^2(\underline{\tilde{\psi}(1,1,3)}$$
$$+\psi(1,1,1)\underline{\tilde{\psi}(1,1,2)}+\underline{\psi(1,1,2)}\tilde{\psi}(1,1,1)$$
$$+\psi(1,1,1)\psi(1,1,1)\ \tilde{\psi}(1,1,1))$$

上記の右辺をさらに(9)，(7)式と(10)，(8)式によって展開すると，下線の部分は値が0となり，下記のように整理される．

$$\psi(4,4,4)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}{}^2\psi(3,3,3)$$
$$+\rho(4,2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}{}^2(\psi(1,1,1)\psi(2,2,2)+\psi(2,2,2)\psi(1,1,1))$$
$$+\rho(4,3)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}{}^2(\psi(1,1,1)\psi(1,1,1)\psi(1,1,1))$$

$$\tilde{\psi}(4,4,4)=\rho(4,1)^2\sum_{i=1}^{3}\delta_{1,i}{}^2\tilde{\psi}(3,3,3)$$
$$+\rho(4,2)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{2,i}{}^2(\psi(1,1,1)\tilde{\psi}(2,2,2)+\psi(2,2,2)\tilde{\psi}(1,1,1))$$
$$+\rho(4,3)^2\sum_{i=1}^{2}\delta_{3,i}{}^2(\psi(1,1,1)\psi(1,1,1)\tilde{\psi}(1,1,1))$$

上記の各確率を前述と同様に算定すると，4回の比較で単一化に成功する確率$\psi(4,4,4)$と失敗する確率$\tilde{\psi}(4,4,4)$は次のようになる．

$$\psi(4,4,4)=0.4^2*3*0.333^2*0.110$$
$$+0.4^2*2*0.5^2*2*0.2778*0.833$$
$$+0.2^2*2*0.5^2*0.833^3$$
$$=0.0545$$

$$\tilde{\psi}(4,4,4)=0.4^2*3*0.333^2*0.022$$
$$+0.4^2*2*0.5^2(0.833*0.056\ +0.2778*0.167)$$
$$+0.2^2*2*0.5^2*0.833^2*0.167$$
$$=0.011$$

上記の結果から，単一化に成功するときの項の平均比較回数S(4,4)，単一化に失敗するときの項の平均比較回数U(4,4)は次のように評価される．

$$S(4,4)=\sum_{k=1}^{4}k*\psi(4,4,k)/\sum_{k=1}^{4}\psi(4,4,k)$$
$$=(3*0.04+4*0.0545)/(0.04+0.0545)$$
$$=3.577$$

$$U(4,4)=\sum_{k=1}^{4}k*\tilde{\psi}(4,4,k)/\sum_{k=1}^{4}\tilde{\psi}(4,4,k)$$
$$=(1*0.847+2*0.192+3*0.093+4*0.011)$$
$$/(0.847+0.192+0.093+0.011)$$
$$=1.360$$

次に，項のサイズと端節が変数となる確率とを変化させたとき，単一化に成功および失敗するときの項の平均比較回数について数値計算した結果を示す．

まず，端節および枝節の構造が【例４】で与えた構造と同一とし，２つの項のサイズをそれぞれ1から4まで変化させたときの単一化に成功するときと失敗するときの項の平均比較回数を図４と図５に示す．

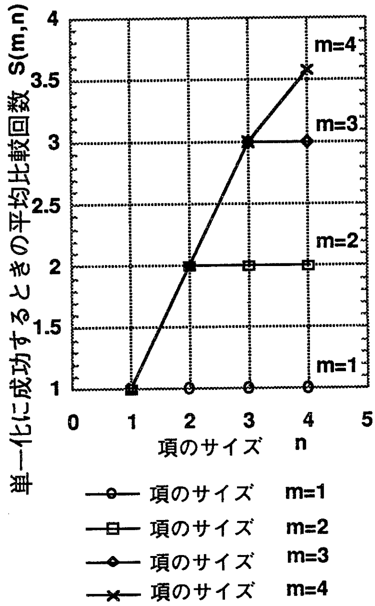


図４単一化に成功するときの項の平均比較回数

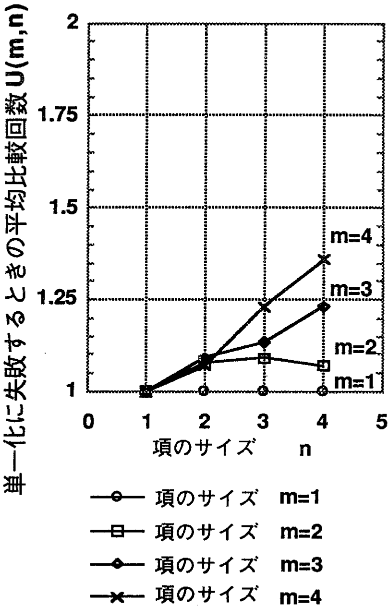


図５単一化に失敗するときの項の平均比較回数

単一化に成功するときの項の平均比較回数は項のサイズの最小値と同程度に増加する．また，単一化に失敗するときには，1回目の比較である根において単一化に失敗する確率が高くなり，項の平均比較回数はあまり増加しない．

次に，端節が変数となる確率を0から1まで変化させたときの項の平均比較回数への影響について調べる．

項のサイズがm=4とn=4の２つの項がk回（k=1，2，3，4）の比較で単一化に成功するとき，変数となる確率の変化に伴う単一化に成功する確率の変化を図６に示す．

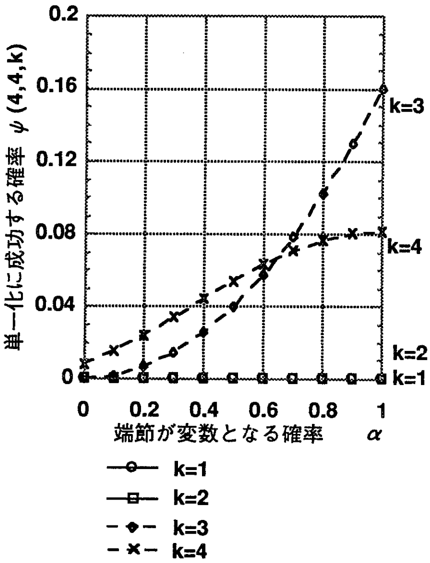


図６　単一化に成功する確率

項のサイズが4の項の構造から，比較回数が1回および2回で単一化に成功する確率は0となり，端節と端節，端節と枝節の比較される場合が多いk=3のときに変数となる確率の増加が単一化に成功する確率に反映しているのがわかる．

一方，単一化に失敗する確率の変化を図７に示す．項のサイズが4のとき根節点は必ず枝節となるのでk=1場合は変数となる確率に影響されない．またk=2の場合は，変数となる確率の増加が影響して単一化に失敗する確率は減少している．kが大きくなるにつれて，k-1までの成功する確率が累積されるので失敗する確率も小さくなり必ずしも単調に変化するとは限らない．

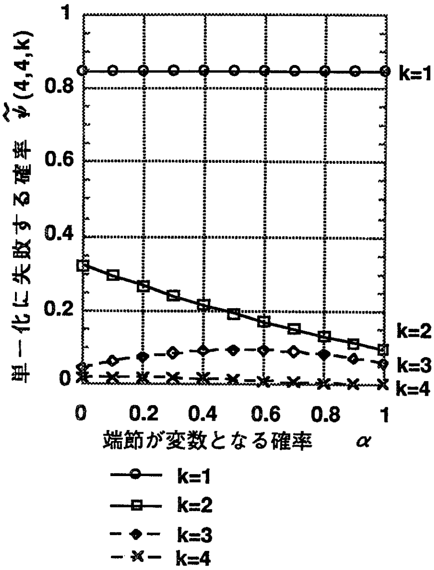


図７　単一化に失敗する確率

このように，端節が変数となる確率の変化に伴って，単一化に成功および失敗する確率は増加および減少するが，平均的な項の比較回数は図８のように変化する．

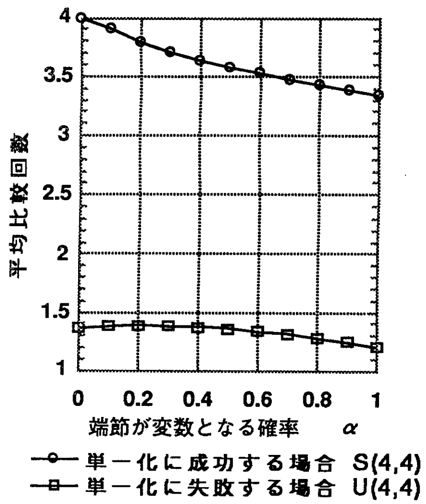


図８　項の平均比較回数

単一化に成功するときには，図６に示したk=3の値に影響され項の平均比較回数は減少する．
単一化に失敗するときには，図７に示したk=1の値に影響され項の平均比較回数はあまり変化しない．

このように，項の構造を考慮し解析を行った結果，より厳密に項の平均比較回数を評価することができる．また，提示した評価式において，項が定数，変数となる確率や関数の構造をパラメータとして与えることによって項の平均比較回数を評価することができる．

5. むすび

提示した解析では，単一化する項のサイズが与えられたとき，項の構造上の差異を考慮にいれて単一化に成功するときと失敗するときとの項の平均比較回数を評価した．

この解析では，まず，項の内部には共有変数を持たない，すなわち項に含まれる固有な変数は高々１回しか出現しないという仮定のもとで，項を木によって表し，項のサイズから生成可能なすべての項の構造を相異なる木の数によって算定し数量化した．次に，変数ならびに固有な定数および関数の出現頻度を考慮に入れて，木の端節および枝節がどのような項によって構成されているかを確率化した．そのモデルのもとで，任意の比較回数で単一化に成功する確率と失敗する確率を求め，単一化に要する平均比較回数を導出した．

したがって，提示する解析から導出された評価式は，仮定した制限を許容すれば，項のサイズと項の構造を考慮に入れて，項の単一化に要する平均比較回数を適切に評価することができる．

参考文献

1) Paterson, M.S. and Wegman, M.N. : Linear Unification, J. of Computer and Systems Science, **16**, pp.158-167 (1978).

2) Martelli, A. and Montanari, U. : An Efficient Unification Algorithm, ACM Trans. on Programming Languages and Systems, **Vol.4**, No.2, April, pp.258-282 (1982).

3) Sterling, L. and Shapiro, E.Y.: The Art of Prolog, MIT Press, Mass. (1986).

4) Robinson, J.A.: A Machine Oriented Logic Based on the Resolution Principle, J. of ACM, **Vol.12**, No.1, pp.23-41 (1965).

5) Loyd, J.W. : Foundations of Logic Programming, Springer-Verlag, New York (1984).

6) Knuth, D.E: The Art of Computer Programming, **Vol.1**, Fundamental Algorithms, pp.305-422, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1968).

7) Gallier, J.H.: Logic for Computer Science, pp.381-395, Harper & Row, New York (1986).