アルゴリズム 25−2
(1992. 1. 24)

平面グラフの点素な道を求めるアルゴリズム

鈴木均　熊谷智明　西関隆夫

東北大学工学部情報工学科

平面グラフ G といくつかの2端子ネットが与えられたとき G にネットを結ぶ点素な道がある限りそれを具体的に求める線形時間のアルゴリズムを与える．ただし，ネットの端子は G の3つの面の周上にだけ与えられており，各ネットの2つの端子は同一の面の周上にあるとする．

An Algorithm for finding Vertex-Disjoint Paths in Planar Graphs

Hitoshi Suzuki　Tomoaki Kumagai　Takao Nishizeki

Department of Information Engineering
Faculty of Engineering, Tohoku University
Sendai-shi 980, Japan

This paper presents a linear-time algorithm which finds vertex-disjoint paths in a given planar graph, each of which connects two terminals of a net, where all the terminals lie on three specified face boundaries and two terminals of each net lie on the same face boundary.

1. はじめに

VLSI 回路の集積度が増大するにつれ，配線問題を効率良く解くアルゴリズムを開発することが強く望まれてきている．VLSI の river routing やプリント基板の 1 層配線問題は次のように平面グラフで点素な道を求める問題に定式化できる．配線領域は設計規則で定まる最小線幅 (λ) で区切られた平面格子グラフ G で表せる．同電位にしたい端子対はネットと呼ばれ，ネットの端子を結ぶ導線はグラフ G の道に対応する．しかも 1 層配線の場合には各ネットに対応する G の道は互いに共通な点を持ってはいけない，即ち点素でなければならない．このようにして 1 層配線問題は，平面グラフ G 及びネット集合が与えられたとき，グラフ G の点素な道を求める問題として定式化できる．

本論文では格子グラフに限定しないで，任意の平面グラフ G が与えられるとして，G にネットを連結する点素な道がある限りそれを具体的に求める線形時間のアルゴリズムを与える．ただし，ネットの端子は G の 3 つの面の周上にだけ与えられており，各ネットの 2 つの端子は同一の面の周上にあるとする．(図 1 参照)

一般に平面グラフで点素な道を求める問題は NP 完全である [GJ]．しかし，端子が定数 h 個の面の周上にある場合には $O(n^{h+2}\log^2 n)$ 時間のアルゴリズムが知られている[Sch1,Sch2]．ここで，n はグラフの点の個数である．また，各ネットの 2 つの端子が同一の面の周上にある場合には，$O(n^{h-1})$ 時間のアルゴリズムが知られている[SAN1]．これらのアルゴリズムは，各道の "ホモトピー" を列挙して点素な道を求めている．本文のアルゴリズムはホモトピーを列挙しないで点素な道を求める．

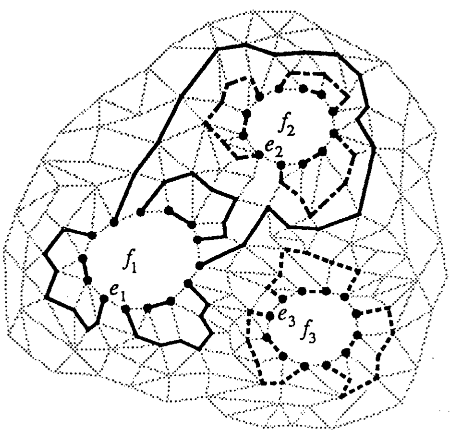

図1. 平面グラフの点素な道

2. 準備

$G=(V,E)$ を点集合 V，辺集合 E からなる無向平面単純グラフとする．簡単のため G は 2 連結であるとする．G の部分グラフ H の点集合，辺集合をそれぞれ，$V(H)$，$E(H)$ と書くこともある．G は平面 $\mathbf{R}^2$ 上に埋め込まれているとする．G の $\mathbf{R}^2$ 上の像を image(G) で表す．同様に G の部分グラフ H，V の部分集合 W，E の部分集合 J の $\mathbf{R}^2$ 上の像をそれぞれ image(H)，image(W)，image(J) と書く．なお，辺の像とは (その両端点を含まない) 開線分である．$W=\{w\}$，$J=\{j\}$ の場合に，それらの像を image(w)，image(j) と書くこともある．また，部分グラフの集合 $\mathcal{H}$ に関しても同様に image$(\mathcal{H})$ を定義する．即ち image$(\mathcal{H})=\bigcup_{H\subseteq\mathcal{H}}$image$(H)$ である．$\mathbf{R}^2-$ image(G) の各連結成分を G の面と呼ぶ．有界でない面を**外面**と呼ぶ．G の部分グラフで各面 f の閉包に含まれる極大なものを，f の**境界**と呼び，$B(f)$ と書く．

G 上の 2 点 $v,w\in V$ が指定されたとき，点 v_i と面 g_i の交互列 $v_0(=v),g_1,v_1,\cdots,g_k,v_k(=w)$ が $\{v_{i-1},v_i\}\subset V(B(g_i))$，$1\le i\le k$，を満足すれば，それを v,w 間の**点面道**と呼び，その**長さ**を k と定義する．指定された 2 点の間の点面道のうちで最小の長さを持つものをその 2 点間の**最短点面道**と呼び，その長さを 2 点間の**距離**と呼ぶ．G の 2 つの部分グラフ H と H' の間の**距離**を，H の点と H' の点の間の距離の最小値と定義する．部分グラフの集合の間の距離も同様に定義する．

G 上の h 個の面 $f_1,f_2,...,f_h$ が指定されているとする．また，これらの同一の面の周上にある 2 点 s,t からなる対 (s,t) を**ネット**または**端子対**と呼び，s,t を端子と呼ぶ．いくつかネットが与えられているとし，その集合を N と書く．$\mathcal{N}=(G,N)$ を **h-平面ネットワーク**と呼ぶ．ネット集合 N を $N_1\cup N_2\cup\cdots\cup N_h$ に分割する．ただし，$(s,t)\in N_i$ ならば，$s,t\in V(B(f_i))$ とする．本文では $B(f_i)$，$1\le i\le h$，の全ての点が端子に指定されているとする．そうでない場合は以下のようにネットワークを変更する．$B(f_i)$ 上にある N_i の端子を時計回りに $t_0,t_1,t_2,...,t_{2m-1},t_{2m}=t_0$ とする．t_j と t_{j+1}，$0\le j\le 2m-1$，を結ぶ 3 辺からなる道を新たに G に加え，加えられた 2 点を新しく端子対とする．元のネットワークに点素な道があるとき，かつその時に限り新しいネットワークに点素な道がある．

各端子対 (s,t) を結ぶ G 上の道を P_{st} とする．道の集合 $\mathcal{P}=\{P_{st}|(s,t)\in N_i,\ 1\le i\le h\}$ が**点素**であるとき，即ちどの異なる二つの道 $P_1,P_2\in\mathcal{P}$ についても，$V(P_1)\cap V(P_2)=\phi$ であるとき，$\mathcal{P}$ は $\mathcal{N}$ の**点素な道**であると言う．N_i のネットを結ぶ $\mathcal{P}$ の道の部分集合を $\mathcal{P}_i$ と書くことにする．即ち $\mathcal{P}_i=\{P_{st}\in\mathcal{P}|(s,t)\in N_i\}$ である．

$\mathcal{N}$ を h-平面ネットワーク，$\mathcal{P}$ をその点素な道とする．一つの面 f_i とその境界に指定されているネット集合 N_i

に注目する．$B(f_i)$上の辺 e が指定されているとする．各ネット $n \in N_i$の両端子について，$B(f_i)$上を辺 e から時計回りに進んで最初に出会う方を**始点**，もう一方を**終点**と呼び，それぞれ$s(n,e)$，$t(n,e)$と書く．ネット n を結ぶ道 Pが指定されているときに$s(P,e)$，$t(P,e)$と書くこともある．各ネット $n \in \mathcal{N}_i$について，その始点から終点までの$B(f_i)$上の道を$\mathrm{BR}(n,e)$と書く．ネット n を結ぶ道 Pが指定されているときに $\mathrm{BR}(P,e)$と書くこともある．$\mathbf{R}^2 - \mathrm{image}(P) \cup \mathrm{image}(\mathrm{BR}(P,e))$の連結成分の内で，$f_i$を含むものを $\mathrm{out}(P,e)$と書く．$\mathrm{in}(P,e) = \mathbf{R}^2 - \mathrm{out}(P,e)$を Pの (e に関する) **内側**と呼ぶ．$\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_i$について，$\mathrm{in}(\mathcal{Q},e) = \bigcup\{\mathrm{in}(P,e) | P \in \mathcal{Q}\}$と定義し，$\mathcal{Q}$ の (e に関する) **内側**と呼ぶ．また，$\mathrm{out}(\mathcal{Q},e) = \mathbf{R}^2 - \mathrm{in}(\mathcal{Q},e)$と定義し，$\mathcal{Q}$ の (e に関する) **外側**と呼ぶ．誤解を招くことがなければ，e を記述しないこともある．$\mathcal{Q}$ の道の両端点である端子対の集合を $N_\mathcal{Q}$と書く．$\mathcal{N}$のいかなる点素な道 $\mathcal{P}'$についても $N_\mathcal{Q}$を結ぶ$\mathcal{P}'$の道の部分集合 $\mathcal{Q}'$について，$\mathrm{in}(\mathcal{Q}',e) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{Q},e)$であるとき，$\mathrm{in}(\mathcal{Q},e)$は ($e$ に関して) **極小**であるという．$\mathcal{Q}$ が極小であるというときもある．

$\mathcal{P}_i$の 2 つの道 P, P'について，$\mathrm{in}(P,e) \subset \mathrm{in}(P',e)$ならば，$P$は P'の**子孫** (P'は Pの**先祖**) であるという．極大な子孫を**子**，極小な先祖を**親**と言う．親を持たない道を**根**という．Pの親を $\mathrm{parent}(P,e)$，子の集合を $\mathrm{Children}(P,e)$，根の集合を $\mathrm{Root}(\mathcal{P}_i,e)$と書く．これらは，道の端点の端子対についていうこともある．$f_j \subseteq \mathrm{in}(P,e)$，$j \neq i$ のとき，Pは f_j(あるいは$\mathcal{P}_j$) の**先祖**であるといい，f_jの極小な先祖を**親**と呼び，$\mathrm{parent}(f_j,e)$と書く．

$j \neq i$ なる各面 f_jについて，$B(f_j)$上の辺 e'で $f_i \subseteq \mathrm{out}(\mathcal{P}_j,e')$なるものが存在する．このような e'は一般に複数本あるが，その任意の 1 辺を e'とし，$e(f_i,\mathcal{P}_j) = e'$と定義する．

辺 e は$B(f_i)$上にあるとする．各道 $P \in \mathcal{P}_i$上の各点 vについて，vが端子であるか vと $\mathrm{Children}(P,e)$の間の距離が 1 であるとき，$\mathcal{P}_i$は (e に関して) **密**であるという．

点集合 $X \subseteq V$をカットと呼ぶことがある．$|X|$ をカット Xの**容量**と呼ぶ．ネット $n \in N$の端子を結ぶ G の道 Pのうちで $|V(P) \cap X|$ が最小なものを P とし，$d(X,n) = |V(P) \cap X|$ と定義する．$d(X) = \sum_{n \in N} d(X,n)$ を Xの**要求量**と呼ぶ．$m(X) = |X| - d(X)$ を Xの**余裕**と呼ぶ．すべてのカット $X \subseteq V$について $m(X) \geq 0$ ならば $\mathcal{N} = (G,N)$ は**カット条件を満足する**という．明らかに次の補題が成立する．

[補題 1] 平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G,N)$ に点素な道が存在するならば，$\mathcal{N}$はカット条件を満足する．(補題終)

各ネット $n \in N_i$について，その始点$s(n,e)$に $B(f_i)$上時計回りに接続する辺を$\epsilon(n,e)$と書く．n を結ぶ道 Pが指定されているときに$\epsilon(P,e)$と書くこともある．

1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_i = (G,N_i)$ の点素な道を $\mathcal{P}_i$とし，$B(f_i)$ 上の辺を e とする．各道 $P \in \mathcal{P}_i$について，$\mathcal{N}_i$の$\epsilon(P,e)$に関して密な点素な道の Pに対応する (同じネットを結ぶ) 道を $\mathrm{rev}(P,e)$と書く．直観的には，道 Pを面 f_iのまわりで逆回転させた道が $\mathrm{rev}(P,e)$である．

3. 1-平面ネットワークの点素な道

本節では 1-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G,N_1)$ において点素な道を求めるアルゴリズムを示し，その点素な道の性質を示す．なお，詳細は[SAN1,SAN3]を参照されたい．

端子はすべて一つの面 f_1の周上の点に指定されている．$B(f_1)$ 上の任意の辺を e とする．次のようにして 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}$の点素な道を求めることができる．

procedure PATH1($\mathcal{N}, e$);
begin
　e から $B(f_1)$ 上を時計回りに回ると，$\mathcal{N}$のネットの終点$t(n_1,e), t(n_2,e), \cdots, t(n_k,e)$がこの順に現れるとする;
　{ 必要ならばネットの番号付けを変更する }
　for $i := 1$ **to** k **do**
　　if n_iの端子が G の異なる連結成分にある **then**
　　　"$\mathcal{N}$に点素な道は存在しない" と出力して終了;
　　$s(n_i,e)$から$t(n_i,e)$までの$B(f_1)$上時計回りの歩道を $W(n_i)$ とする;
　　if 歩道 $W(n_i)$ 上に n_i以外の端子がある **then**
　　　"$\mathcal{N}$に点素な道は存在しない" と出力して終了
　　else
　　　$W(n_i)$ から n_iの端子を結ぶ単純な道 P_iを作る ($W(n_i)$ に閉路や端子でない 1 次の点がなくなるようにいくつか点と辺を除去する);
　　　$G := G - V(W(n_i))$;
　　fi
　rof
end.

アルゴリズムの正当性については文献[SAN3]を参照されたい．手続き PATH1 の計算時間は $O(n)$ であることは容易にわかる．

[定理 2] 1-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G,N_1)$ の点素な道は $O(n)$ 時間で求められる．(定理終)

また，以下の補題が容易に証明できる．

[補題 3] 1-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G,N_1)$ の任意の辺を $e \in B(f_1)$とする．$\mathcal{N}$に点素な道が存在すれば，e に関して密な点素な道 $\mathcal{P}$ も存在し $\mathrm{in}(\mathcal{P},e)$は最小である，即ち $\mathcal{N}$の任意の点素な道 $\mathcal{P}'$に対して $\mathrm{in}(\mathcal{P},e) \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}',e)$である．(補題終)

[補題 4] $\mathcal{N}=(G,N_1)$ を 1-平面ネットワークとし，e を $B(f_1)$ 上の辺とする．$\mathcal{N}$の e に関して密な点素な道を$\mathcal{P}$とし，$\mathcal{N}$の任意の密な点素な道を$\mathcal{P}'$とする．道 $P\in\mathcal{P}$に対応する$\mathcal{P}'$ の道をP'とすると，$P'=P$あるいは $P'=\mathrm{rev}(P,e)$である． (補題終)

4. 2-平面ネットワークの点素な道

本節では 2-平面ネットワーク $\mathcal{N}=(G,N_1\cup N_2)$ に点素な道がある限りそれを求めるアルゴリズムを示す．このアルゴリズムは[SAN1,SAN2]のものを簡単にしたものである．なお$\mathcal{N}$に点素な道がないときにはないと判定するようにアルゴリズムを変更することは容易である．

2-平面ネットワーク $\mathcal{N}=(G,N_1\cup N_2)$ に点素な道 $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\cup\mathcal{P}_2$が存在すると仮定する．明らかに $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1,e_1)\cap\mathrm{in}(\mathcal{P}_2,e_2)=\phi$となるように辺 $e_1\in B(f_1)$ と $e_2\in B(f_2)$を選ぶことができる．従って補題 3 より 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j=(G,N_j)$, $j=1,2$, の e_jに関して密な点素な道$\mathcal{P}'_j$が存在し，$\mathrm{in}(\mathcal{P}'_1,e_1)\cap\mathrm{in}(\mathcal{P}'_2,e_2)=\phi$である．本節のアルゴリズムでは，最初に 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j$, $j=1,2$, の密な点素な道をそれぞれ求め，次にそれらを互いに交わらないように変更する．アルゴリズムを示す前に，2-平面ネットワークに関して成立する 2 つの補題を示す．

[補題 5] 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j=(G,N_j)$, $j=1,2$, の辺 $e_j\in E(B(f_j))$ に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_j$ とする．$\mathrm{Root}(\mathcal{P}_1,e_1)$の 2 本の異なる道を P_1, P'_1 とする．$\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2,e_2)$の道 P_2が P_1に交わり，かつ $\mathrm{rev}(P_2,e_2)$が P'_1に交わるならば，2-平面ネットワーク $\mathcal{N}=(G,N_1\cup N_2)$ に点素な道は存在しない．(図 2 参照)

(証明) $\mathcal{P}_1$は e_1に関して密であり，$\mathcal{P}_2$は e_2に関して密であるから，次の条件 (1) および (2) を満足する点集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_q\}, Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_r\}$ が存在する．(図 3 参照)

(1) $x_1=y_1\in V(P_1)\cap V(P_2)$ であり，$x_q\in V(B(f_1))$ かつ $y_r\in V(B(f_2))$ である．

(2) x_i $(2\le i\le q)$ は x_{i-1}を含む $\mathcal{P}_1$の道の子に含まれ，x_iと x_{i-1}は G の同じ面上にある．y_i $(2\le i\le r)$ は y_{i-1}を含む $\mathcal{P}_2$の道の子に含まれ，y_iと y_{i-1}は G の同じ面上にある．

同様に $x'_1=y'_1\in V(P'_1)\cap V(\mathrm{rev}(P_2,e_2))$ であり，$x'_q\in V(B(f_1))$ かつ $y'_r\in V(B(f_2))$ であり，さらに上の (2) と同様な性質を満足する点集合 $X'=\{x'_1,\cdots,x'_{q'}\}, Y'=\{y'_1,\cdots,y'_{r'}\}$ が存在する．$\mathcal{N}$のカット $W=X\cup Y\cup X'\cup Y'$を考えよう．Wの容量は $|W|\le|X|+|Y|+|X'|+|Y'|-2$ であり，要求量は $d(W)\ge|X|+|Y|+|X'|+|Y'|-1$ である．従って，$\mathcal{N}$はカット条件を満足しないので，補題 1 により点素な道は存在しない． (証明終)

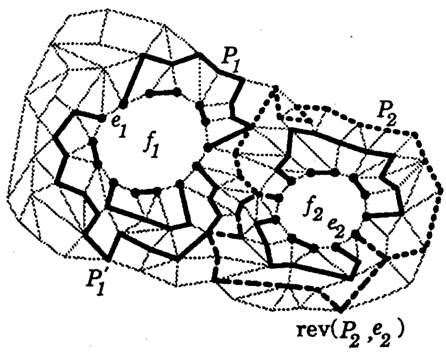

図2. 点素な道が存在しないネットワーク

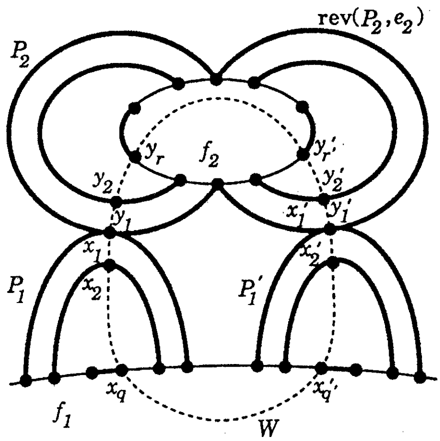

図3. 補題5の証明の説明図

[補題 6] 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j=(G,N_j)$, $j=1,2$, の辺 $e_j\in E(B(f_j))$ に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_j$とする．$P_1\in\mathrm{Root}(\mathcal{P}_1,e_1)$とし $P_2\in\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2,e_2)$とし，2-平面ネットワーク $\mathcal{N}=(G,N_1\cup N_2)$ の任意の点素な道を $\mathcal{Q}$ とする．このとき，G 上で P_1と P_2が交わり，かつ P_1と $\mathrm{rev}(P_2,e_2)$が交わるならば，$P_1\notin\mathcal{Q}$ である．

(証明) P_1と P_2の任意の交点を v, P_1と $\mathrm{rev}(P_2,e_2)$ の任意の交点を wとする．$B(f_2)$上の任意の辺を e'_2 とし，$\mathcal{N}_2$の任意の点素な道を $\mathcal{P}'_2$とする．このとき補題 3 と補題 4 より $\mathrm{image}(P_2)\subseteq\mathrm{in}(\mathcal{P}'_2,e'_2)$あるいは $\mathrm{image}(\mathrm{rev}(P_2,e_2))\subseteq\mathrm{in}(\mathcal{P}'_2,e'_2)$である．従って，$\mathrm{image}(v)\in\mathrm{in}(\mathcal{P}'_2,e'_2)$あるいは $\mathrm{image}(w)\in\mathrm{in}(\mathcal{P}'_2,e'_2)$ であり，P_1を含む $\mathcal{N}$の点素な道は存在しない． (証明終)

まず，1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j$, $j=1,2$, に次の (1) および (2) を満足する $e_g\in E(B(f_g))$ に関して密な点

素な道 $\mathcal{P}_j$が存在する時に 2-平面ネットワーク $\mathcal{N}$の点素な道を求める方法を示す.

(1) $\mathcal{P}_g$, $g=1$ または 2, の道 Pがあり, Pの子孫は $\mathcal{P}_h$, $h \neq g$, と交わらない.

(2) Pを含む $\mathcal{N}$の点素な道は存在しない.

(2) と補題 4 より, $\mathcal{N}$の点素な道は $\mathrm{rev}(P, e_g)$を含むとしてよい. 従って, 以下のようにして $\mathcal{N}$の点素な道を求めることができる.

procedure $\mathrm{Clear}(\mathcal{P}_g, \mathcal{P}_h, P)$;
$P \in \mathcal{P}_g$と Pの先祖からなる集合を $\mathcal{P}_a$とする. 各道 Pについてそのネットを $\mathrm{net}(P)$と書く. また, 各点 vについて $\mathrm{mark}(v)$を導入し, vを通る道 Pが "決定" したときに $\mathrm{mark}(v) = \mathrm{net}(P)$とする.
begin
  for each $v \in V$ **do** $\mathrm{mark}(v) := nil$;
  $\mathcal{P}_g := (\mathcal{P}_g - \mathcal{P}_a) \cup \{\mathrm{rev}(P, e_g) | P \in \mathcal{P}_a\}$;
  $e_g := \epsilon(P, e_g)$;
  for $\mathrm{rev}(P, e_g)$とその子孫の各道 Q **do**
    for 各点 $v \in Q$ **do** $\mathrm{mark}(v) := \mathrm{net}(Q)$;
  for $\mathrm{mark}(v) \neq \mathrm{net}(P^*)$なる点 vを含む各道 $P^* \in \mathcal{P}_j (j = g, h)$ **do**
    $\mathcal{P}_j := (\mathcal{P}_j - P^*) \cup \{\mathrm{rev}(P^*, e_j)\}$;
    $e_j := \epsilon(P^*, e_j)$;
    for $\mathrm{rev}(P^*, e_j)$上の各点 v **do** $\mathrm{mark}(v) := \mathrm{net}(P^*)$
  rof
end;

以下の手続き PATH2 によって 2-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2)$ の点素な道が求められる.

procedure $\mathrm{PATH2}(G, N_1 \cup N_2)$;
begin
  $B(f_2)$上の任意の辺を e_2とし, e_2に関して密な点素な道 $\mathcal{P}_2$を $\mathrm{PATH1}(\mathcal{N}_2, e_2)$ を適用して求める. もし $f_1 \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2)$ならば, f_1の親である $\mathcal{P}_2$の道 Q について, e_2を新たに $e_2 := \epsilon(Q, e_2)$とし, $\mathrm{PATH1}(\mathcal{N}_2, e_2)$ を適用して $\mathcal{N}_2$の点素な道 $\mathcal{P}_2$を求め直す. こうして, $f_1 \subseteq \mathrm{out}(\mathcal{P}_2, e_2)$なる $\mathcal{N}_2$の点素な道が求められた.
  $B(f_1)$上の任意の辺を e_1とする.
  辺 e_1から $B(f_1)$上を時計回りに進むと, N_1のネットの終点 $t(n_1, e_1)$, $t(n_2, e_1)$, $\cdots$, $t(n_{k_1}, e_1)$がこの順に現れるとする. 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1 = (G, N_1)$ の e_1に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_1$とする. ネット $n_i, 1 \leq i \leq k_1$, を結ぶ $\mathcal{P}_1$の道を P_iとする.
  for $i := 1$ **to** k_1 **do**
    if P_iが $P \in \mathcal{P}_2$と交わる **then**
      if P_iが $\mathrm{rev}(P, e_2)$と交わらない **then**
        $\mathcal{P}_2$を $\epsilon(P, e_2)$に関して密な $\mathcal{N}_2$の点素な道に置き換える. 即ち,
        $\mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}_2 - \{P\}) \cup \{\mathrm{rev}(P, e_2)\}$;
        $e_2 := \epsilon(P, e_2)$
      else { 補題 5 より $\mathrm{rev}(P, e_2)$は P_iとその先祖以外には交わらない. 従って P_iは $\mathrm{rev}(P, e_2)$と交わり, 補題 6 より P_iを含む $\mathcal{N}$の点素な道は存在しない. 補題 4 より, $\mathcal{N}$の点素な道は $\mathrm{rev}(P_i, e_1)$を含むとしてよい }
        $\mathrm{Clear}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, P_i)$
        終了 (点素な道が求まった)
      fi
  rof
end;

次に手続き PATH2 の計算時間について考えよう. 手続き PATH1 は $O(n)$ 時間で実行できるので, アルゴリズムの最初で $\mathcal{P}_2$及び $\mathcal{P}_1$を見つけるのに要する時間は $O(n)$ である. 手続き PATH2 中で各道 $P \in \mathcal{P}_2$が $\mathrm{rev}(P, e_2)$に置き換えられる回数は補題 5 より高々 1 回である. また, 手続き Clear 中で各道 $P^* \in \mathcal{P}_h$が $\mathrm{rev}(P^*, e_h)$に置き換えられる回数も高々 1 回である. 従って, アルゴリズムを通して道の書き換えにかかる時間はグラフ G の点数 n に比例する. 以上より, 次の定理が得られる.

[定理 7] 2-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2)$ の点素な道は $O(n)$ 時間で求められる. (定理終)

2-平面ネットワークに関して次の補題が成立する.

[補題 8] $B(f_1)$上の任意の辺を e とする. 2-平面ネットワーク $\mathcal{N}$の点素な道 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$で, $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$が極小であるものを $\mathcal{P}$とする. 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1 = (G, N_1)$ の e に関して密な点素な道を $\mathcal{Q}_1$とする. $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e) \neq \mathrm{in}(\mathcal{Q}_1, e)$であれば, 以下の条件 (a)-(d) を満足する $\mathcal{N}$の点素な道 $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \cup \mathcal{P}_2^*$が存在する.

(a) $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1^*, e) = \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$.

(b) $\mathcal{P}_2^*$は 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_2 = (G, N_2)$ で辺 $e(f_1, \mathcal{P}_2)$ に関して密である.

(c) $\mathcal{P}_1^*$は 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1' = (G - \mathcal{P}_2^*, N_1)$ で辺 e に関して密である.

(d) $\mathcal{P}_2^*$の 2 つの異なる根 $P_2, P_2' \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_2^*, e(f_1, \mathcal{P}_2^*))$ が存在し, P_2と $\mathrm{Children}(\mathrm{parent}(f_2, e), e)$の間の距離は 1 であり, P_2'と $\mathrm{Children}(\mathrm{parent}(f_2, e), e)$の間の距離は 2 以下である. (図 4 参照)

(証明) $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e) \neq \mathrm{in}(\mathcal{Q}_1, e)$なので, $\mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e(f_1, \mathcal{P}_2)) \subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$である. まず, (b) を満足するように $e(f_1, \mathcal{P}_2)$ に関して密な $\mathcal{N}_2$の点素な道 $\mathcal{P}_2^*$を選ぶ. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ が $\mathcal{N}$の点素な道であるから $\mathcal{P}_2^*$は $G - \mathcal{P}_1$に存在し, $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2^*$は $\mathcal{N}$の点素な道である. 次に, (c) を満足するように $\mathcal{P}_1^*$を選ぶ. $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2^*$が $\mathcal{N}$の点素な道であるから, $\mathcal{P}_1$は $\mathcal{N}_1'$の点素な道である. 従って $\mathcal{P}_1^*$は存在し, $\mathcal{P}_1^* \cup \mathcal{P}_2^*$は $\mathcal{N}$の点素な道である. $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1^*, e) \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$であるから, $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$の極小性から $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1^*, e) = \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$である.

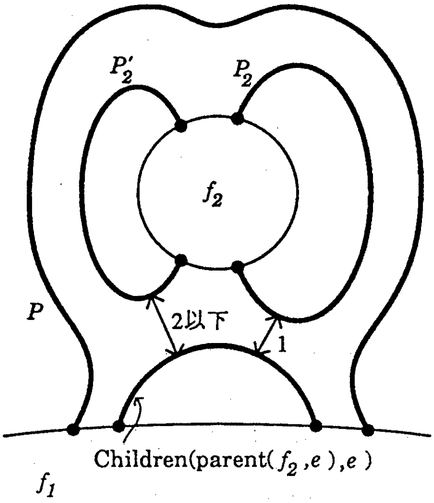

図4. 補題8の説明図

以上で (a),(b),(c) の全てを満足する $\mathcal{N}$の点素な道 $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}_1^* \cup \mathcal{P}_2^*$が存在することを示した．以下では，これが (d) も満足することを示す．

(d) を満足しない 2-平面ネットワークが存在すると仮定する．そのようなネットワークで端子対数が最小のものを $\mathcal{N}$とする．$P = \mathrm{parent}(f_2, e)$とすると，$P \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_1^*, e)$であることが容易にわかる．

もし $\mathrm{Children}(P, e) = \phi$ならば，$P$の端子対 (s, t) は G の辺である．従って，$\mathcal{P}^*$の道 Pを辺 (s, t) で入れ換えたものも $\mathcal{N}$の点素な道であり，しかも $\mathrm{image}((\mathcal{P}_1^* - \{P\}) \cup \{(s, t)\}) \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_1^*, e)$ であるので，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$の極小性に反する．従って $\mathrm{Children}(P, e) \neq \phi$ である．

Pの両端点を結ぶ $\mathcal{Q}_1$の道を Q とする．$\mathcal{P}_2^*$と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離が 2 以上であると仮定する．$\mathcal{P}_1^*$は $\mathcal{N}_1$の点素な道だから $\mathrm{in}(\mathcal{Q}_1, e) \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_1^*, e)$ である．もし，$\mathrm{image}(\mathcal{Q}_1) \cap \mathrm{image}(\mathcal{P}_2^*) = \phi$ならば，$\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{P}_2^*$は $\mathcal{N}$の点素な道であり，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$の極小性あるいは $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e) \neq \mathrm{in}(\mathcal{Q}_1, e)$に反する．従って $\mathrm{image}(\mathcal{Q}_1) \cap \mathrm{image}(\mathcal{P}_2^*) \neq \phi$である．$P \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_1^*, e)$ と (c) より，$\mathcal{Q}_1 - Q = \mathcal{P}_1^* - P$としてよい．従って，$Q$ と $\mathcal{P}_2^*$が交わる．ところが Q 上の各点と $\mathrm{Children}(P, e)$ の間の距離は 1 であるから Q と $\mathcal{P}_2^*$が交わることはない．よって，$\mathcal{P}_2$の根 P_2が存在し，P_2と Pの子の間の距離は 1 である．

$\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2^*, e_2) - P_2$と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離が 3 以上であると仮定すると矛盾することを示そう．$e_2 = e(f_1, \mathcal{P}_2)$とする．1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_2$の $e_2' = e(P_2, e_2)$に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_2^{**}$とする．$\mathcal{P}_2^{**} = (\mathcal{P}_2^* - P_2) \cup \{\mathrm{rev}(P_2, e_2)\}$ である．したがって，$\mathcal{P}_2^{**} - \mathrm{rev}(P_2, e_2) = \mathcal{P}_2^* - P_2$である．$\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2^*, e_2) - P_2 = \mathrm{Children}(\mathrm{rev}(P_2, e_2), e_2')$であるから，$\mathrm{rev}(P_2, e_2)$ と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離は 2 以上である．また，P_2と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離が 1 であるから $\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2^{**}, e_2) - \mathrm{rev}(P_2, e_2) = \mathrm{Children}(P_2, e_2)$ と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離は 2 であるはずである．従って，$\mathcal{P}_2^{**}$と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離は 2 である．従って $\mathcal{Q}_1$と $\mathcal{P}_2^{**}$は交わらず，$\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{P}_2^{**}$は $\mathcal{N}$の点素な道であり，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$の極小性か $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e) \neq \mathrm{in}(\mathcal{Q}_1, e)$に反する．よって，$\mathrm{Root}(\mathcal{P}_2^*, e_2) - P_2$と $\mathrm{Children}(P, e)$の間の距離は 2 以下であり，(d) を満足する．　(証明終)

補題 8 より次の定理が導かれる．

[定理 9] $\mathcal{N}$は 2-平面ネットワークとし，eを$B(f_1)$上の辺とする．$\mathcal{N}$のあらゆる点素な道 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$を考えたとき，極小な $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e)$は高々 2 通りしかない．

(定理終)

5. 3-平面ネットワークの点素な道

本節では 3-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ において点素な道がある限り点素な道を求めるアルゴリズムを示す．なお $\mathcal{N}$に点素な道がないときにはないと判定するようにアルゴリズムを変更することは容易である．次の補題は明らかである．

[補題 10] 3-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ の点素な道 $\mathcal{P}$が存在したとする．このとき，$N_i, i = 1, 2, 3,$ の添字を適当に付け換え，適当な辺 $e_i \in E(B(f_i)), i = 1, 2, 3,$ を選べば，

$$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2)$$
$$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$$
$$\mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$$
$$\mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1)$$
$$\mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3) \not\subset \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2)$$

とすることができる．　(補題終)

補題 10 より，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1), \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2), \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$ が互いに素であるか，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2) \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1)$かつ $\mathrm{in}(\mathcal{P}_1, e_1) \cap \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3) = \phi$であるとしてよい．従って $\mathcal{P}_j$, $j = 2, 3,$ はそれぞれ 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_j = (G, N_j)$ の e_jに関して密な点素な道であり，$\mathcal{P}_1$は 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1' = (G - \mathcal{P}_2, N_1)$ の e_1に関して密な点素な道であるとしてよい．本節のアルゴリズムはこのような点素な道を求める．

以下の 2 つの補題が補題 1 から得られる．

[補題 11] 補題 10 のように e_1, e_2, e_3を定める．1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_l = (G, N_l), l = 1, 2, 3,$ の辺 $e_l' \in E(B(f_l))$ に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_l'$とする．$P_l' \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_l', e_l')$ とする．G で P_1'が P_2'と交わり，$\mathrm{rev}(P_2', e_2')$が P_3'と交

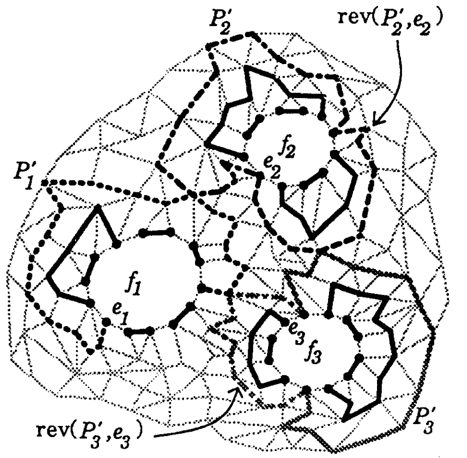

図5. 補題11の説明図

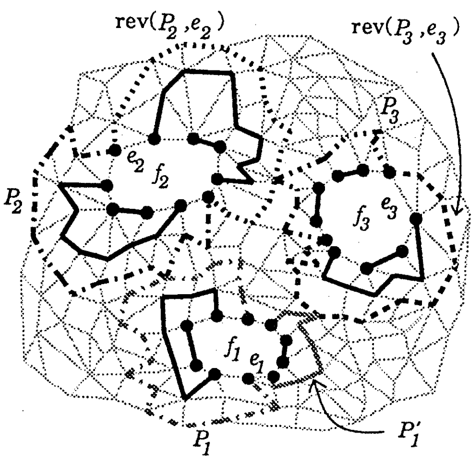

図6. 補題12の説明図

わり，$\mathrm{rev}(P_3', e_3)$が$\mathrm{rev}(P_2', e_2)$あるいはP_1'と交わるならば，e_1は$\mathrm{BR}(P_1', e_1')$上にある．(図 5 参照) (補題終)

次の補題が補題 5 と同様に証明できる．

[補題 12] 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_l = (G, N_l), l = 1, 2, 3,$ の $e_l \in E(B(f_l))$ に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_l$とする．$P_1 \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_1, e_1)$, $P_1' \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_1, e_1) - P_1$, $P_2 \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_2, e_2)$, $P_3 \in \mathrm{Root}(\mathcal{P}_3, e_3)$とする．$G$ で P_1と P_2が交わり，$\mathrm{rev}(P_2, e_2)$ と P_3が交わり，P_1'と $\mathrm{rev}(P_3, e_3)$ が交わるならば，3-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ に点素な道は存在しない．同様に，G で P_1と P_3が交わり，$\mathrm{rev}(P_3, e_3)$ と P_2が交わり，P_1'と $\mathrm{rev}(P_2, e_2)$ が交わるならば，$\mathcal{N}$に点素な道は存在しない．(図 6 参照) (補題終)

以下に 3-平面ネットワーク $\mathcal{N} = (G, N_1 \cup N_2 \cup N_3)$ の点素な道を求めるアルゴリズム PATH3 を示す．PATH2 と同様に，まず 2-平面ネットワーク $\mathcal{N}_{23} = (G, N_2 \cup N_3)$ の点素な道と 1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1 = (G, N_1)$ の点素な道をそれぞれ求め，次にそれらの交わりがなくなるように道を変更する．なお，添字の組合せは 6 通りだけなので補題 10 の関係を満たす添字の組合せはすでにわかっているものとする．PATH3 の中で呼び出される手続き PATH3*は PATH3 とほぼ同様であり，これは補題 11 が適用される時に用いられる．

procedure PATH3;
begin
  PATH2 を用いて 2-平面ネットワーク $\mathcal{N}_{23} = (G, N_2 \cup N_3)$ の点素な道 $\mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$を求める．$e_2 \in E(B(f_2))$ と $e_3 \in E(B(f_3))$ を適当に選べば，$\mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2) \cap \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3) = \phi$であり，しかも $\mathcal{P}_h, h = 2, 3,$ は e_hに関して密となる．
  if $f_1 \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2) \cup \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$ **then**
    $f_1 \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2)$とし，$f_1$の親の $\mathcal{P}_2$の道を Q とする;
    $\mathrm{Clear}(\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, Q)$
    {$f_1 \subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$の場合も同様である }
  fi
  { 今 $f_1 \not\subseteq \mathrm{in}(\mathcal{P}_2, e_2) \cup \mathrm{in}(\mathcal{P}_3, e_3)$である }
  $B(f_1)$上の任意の辺を e_1とする;
  辺 e_1から$B(f_1)$上を時計回りに進むと，N_1のネットの終点$t(n_1, e_1), t(n_2, e_1), \cdots, t(n_{k_1}, e_1)$がこの順に現れるとする;
  1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1 = (G, N_1)$ の e_1に関して密な点素な道を $\mathcal{P}_1$とする;
  ネット $n_i, 1 \leq i \leq k_1,$ を結ぶ $\mathcal{P}_1$の道を P_iとする;
  $\mathcal{P}_1^i = \{P_1, P_2, \cdots, P_i\}$ とする;
  for $i := 1$ **to** k_1 **do**
    if P_iが $Q_2 \in \mathcal{P}_2$と交わる **then**
      if P_iが $\mathrm{rev}(Q_2, e_2)$と交わらない **then**
        if $\mathrm{rev}(Q_2, e_2)$が $\mathcal{P}_3$と交わらない **then**
          $\mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}_2 - \{Q_2\}) \cup \{\mathrm{rev}(Q_2, e_2)\}$;
          $e_2 := \epsilon(Q_2, e_2)$
        else {$\mathrm{rev}(Q_2, e_2)$が $Q_3 \in \mathcal{P}_3$と交わる }
          if $\mathrm{rev}(Q_3, e_3)$が $\mathcal{P}_1^i \cup (\mathcal{P}_2 - Q_2) \cup \{\mathrm{rev}(Q_2, e_2)\}$ と交わらない **then**
            $\mathcal{P}_2 := (\mathcal{P}_2 - \{Q_2\}) \cup \{\mathrm{rev}(Q_2, e_2)\}$;
            $e_2 := \epsilon(Q_2, e_2)$;
            $\mathcal{P}_3 := (\mathcal{P}_3 - \{Q_3\}) \cup \{\mathrm{rev}(Q_3, e_3)\}$;
            $e_3 := \epsilon(Q_3, e_3)$
          else {$\mathrm{rev}(Q_3, e_3)$は $\mathrm{rev}(Q_2, e_2)$あるいは P_iと交わる．補題 11 より補題 10 の e_1は $\mathrm{BR}(P_i, e_1)$ 上にある }
            PATH3*を実行して終了
          fi
        fi

else {P_iが $\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$と交わる }
2-平面ネットワーク $\mathcal{N}'_{13}=(G-\mathcal{P}_2, N_1\cup N_3)$ の点素な道を PATH2 を適用して求める．もし $\mathcal{N}'_{13}$ に点素な道が存在しなければ，2-平面ネットワーク $\mathcal{N}''_{13}=(G-(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}, N_1\cup N_3)$ の点素な道を求める．$\mathcal{N}''_{13}$にも点素な道が存在しなければ PATH3*を実行して終了．
fi
fi
if P_iが $Q_3\in\mathcal{P}_3$と交わる **then**
if P_iが $\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$と交わらない **then**
if $\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$が$\mathcal{P}_2$と交わらない **then**
$\mathcal{P}_3:=(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$;
$e_3:=\epsilon(Q_3,e_3)$
else {$\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$が $Q_2\in\mathcal{P}_2$と交わる }
if $\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$が$\mathcal{P}_1^i\cup(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$と交わらない **then**
$\mathcal{P}_2:=(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}$;
$e_2:=\epsilon(Q_2,e_2)$;
$\mathcal{P}_3:=(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$;
$e_3:=\epsilon(Q_3,e_3)$
else {$\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$が $\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$か P_iと交わる }
PATH3*を実行して終了
fi
fi
else {P_iが $\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$と交わる }
PATH3*を実行して終了
fi
fi
rof
end;

procedure PATH3*;
begin
$e_1:=\epsilon(P_i,e_1)$;
辺 e_1から $B(f_1)$ 上を時計回りに進むと，N_1のネットの終点$t(n_1,e_1), t(n_2,e_1),\cdots,t(n_{k_1},e_1)$がこの順に現れるとする;
1-平面ネットワーク $\mathcal{N}_1=(G,N_1)$ の e_1に関して密な点素な道を$\mathcal{P}_1$とする;
ネット $n_i, 1\le i\le k_1$, を結ぶ$\mathcal{P}_1$の道を P_iとする;
$\mathcal{P}_1^i=\{P_1,P_2,\cdots,P_i\}$ とする;
for $i:=1$ **to** k_1 **do**
if P_iが $Q_2\in\mathcal{P}_2$と交わる **then**
if P_iが $\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$と交わらない **then**
if $\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$が$\mathcal{P}_3$と交わらない **then**
$\mathcal{P}_2:=(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}$;
$e_2:=\epsilon(Q_2,e_2)$
else {$\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$が $Q_3\in\mathcal{P}_3$と交わる }
$\mathcal{P}_2:=(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}$;
$e_2:=\epsilon(Q_2,e_2)$;
$\mathcal{P}_3:=(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$
$e_3:=\epsilon(Q_3,e_3)$
fi
else {P_iが $\mathrm{rev}(Q_2,e_2)$と交わる }
2-平面ネットワーク $\mathcal{N}'_{13}=(G-\mathcal{P}_2, N_1\cup N_3)$ の点素な道を PATH2 を適用して求める．もし $\mathcal{N}'_{13}$ に点素な道が存在しなければ，2-平面ネットワーク $\mathcal{N}''_{13}=(G-(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}, N_1\cup N_3)$ の点素な道を求める．PATH3*を終了する．
fi
fi
if P_iが $Q_3\in\mathcal{P}_3$と交わる **then**
if $\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$が$\mathcal{P}_2$と交わらない **then**
$\mathcal{P}_3:=(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$;
$e_3:=\epsilon(Q_3,e_3)$
else {$\mathrm{rev}(Q_3,e_3)$が $Q_2\in\mathcal{P}_2$と交わる }
$\mathcal{P}_2:=(\mathcal{P}_2-\{Q_2\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_2,e_2)\}$;
$e_2:=\epsilon(Q_2,e_2)$;
$\mathcal{P}_3:=(\mathcal{P}_3-\{Q_3\})\cup\{\mathrm{rev}(Q_3,e_3)\}$;
$e_3:=\epsilon(Q_3,e_3)$
fi
fi
rof
end;

アルゴリズムの正当性は，前述の補題より得られる．詳細は省略するが，手続き PATH3 は $O(n)$ 時間で終了する．

[定理 13] 3-平面ネットワーク $\mathcal{N}=(G,N_1\cup N_2\cup N_3)$ の点素な道は $O(n)$ 時間で求められる． (定理終)

6. 結び

本文では，平面グラフ G の 3 つの周上に端子が置かれ，1 つのネットの両方の端子が同一の面の周上にある場合に，G にネットを連結する点素な道がある限りそれを具体的に求めるアルゴリズムを与えた．計算時間は $O(n)$ であり，比例定数を除いて最適である．ここで n はグラフ G の点数である．

謝辞

本研究は文部省科研費 02302047, 03650287, 03780014 から一部援助を受けた．

参考文献

[GJ] M. R. Garey and D. S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freeman, San Francisco, CA (1979).
[Sch1] A. Schrijver, Disjoint homotopic trees in a planar graph, manuscript (1988).
[Sch2] A. Schrijver, Personal communication (1988).
[SAN1] H. Suzuki, T. Akama and T. Nishizeki, Finding Steiner Forests in Planar Graphs, Proc. of 1st SODA, pp.444-453 (1990).
[SAN2] 鈴木，赤間，西関，平面グラフで林を求めるアルゴリズム—各ネットの端子が指定された二つの面の片方にある場合—，信学論 (A), J71-A, 12, pp.2163-2171(1988).
[SAN3] 鈴木，赤間，西関，平面グラフで内素な道を求めるアルゴリズム，信学論 (A), J71-A, 10, pp.1906-1916(1988).