アルゴリズム 29−2
（1992. 8. 25）

有限個のラベルが均等に分布する木のラベル付け

熊谷 毅　中澤寿之
宇都宮大学工学部

本稿では，木の節に一定個数のラベルを付ける場合，それぞれのラベルが木に一様に分布し，どの部分木をとっても，それぞれのラベルが均等に現れるようなラベル付けの方法について示している．特に，任意の節から与えられた深さまでに存在するすべての節の集合を考えるとき，その集合の要素数とラベルの個数が等しい場合には，各ラベルがちょうど 1 回ずつ現れる．ここでは，任意の深さの 2 分木の場合と，深さが 2 の冪で表現される多分木の場合のそれぞれについて，このような条件を満足するラベル付けの方法を示すとともに，条件を満足することを証明している．

Tree Labeling Procedures to Distribute Fixed Number of Labels Uniformly

Takeshi Kumagai　Toshiyuki Nakazawa
Department of Information Science
Faculty of Engineering
Utsunomiya University

The tree labeling procedures, which attach some given number of labels to nodes in a tree so as to distribute labels uniformly, are proposed. Suppose a set of nodes, which consists of all the nodes located within given depth from any node. According to the procedures, in the case that the number of nodes in the set is equal to the number of labels, each label appears exactly once in the set. This article shows the procedures for both of binary trees of any depth and q-ary trees of depth 2^p.

1. はじめに

本稿では，木のラベル付けの方法について提案する．どの部分木に対しても，各ラベルの値を持つ節の個数が均等に分布するように，木の節にラベルを付ける方法を示す．

特に，木の任意の節を根とし，その根から一定の深さまでに含まれる節の集合を考え，その節の個数と同数のラベルを付けることにすると，このような任意の節の集合には，全て異なるラベルが付けられることになる．

このラベル付けは，木を扱う並列メモリに応用することを想定している [1–8] が，木構造を扱うプログラミング言語の実行時の仮想記憶の実現機構，探索や木のマッチングなどを行う専用ハードウェアなどへの応用も考えられる．

本稿では，任意の節から決められた深さまでに含まれる節の集合に，その集合の要素数のラベルを重複なく付ける方法を中心に議論する．このようなラベル付けが実現できれば，木の任意の部分木を考えたとき，それに含まれるラベルは均等に現れることになる．

ここでは，まず，**2.** において，準備として諸定義を行うとともに，議論を進めていくのに必要な剰余演算の性質を示す．**3.** では，2 分木のラベル付けの方法を示す．また，**4.** において，一般の多分木のラベル付けの方法を示す．最後に，まとめを行う．

2. 準備

本章では，議論を進めていくために必要な諸定義を与えるとともに，剰余演算の諸性質を示す．

2.1 諸定義

本稿では，完全木について議論する．完全木でないものに対しては，節を追加して完全木とすることができるため，議論の一般性を失わない．

節のレベルを，葉を 0 とし，根に向かって 1 ずつ増加するものと定義する．また，節の位置を，各レベルの最も左の節を 0 とし，右に向かって 1 ずつ増加するものとする．レベル i の位置 j にある節を (i, j) と表す．

部分木とは，任意の節を根とし，その節およびその全ての子孫の節で構成される木とする．また，内部部分木とは，木の任意の節を根とし，その節から与えられた深さ n までに存在する全ての子孫の節で構成される木とする．

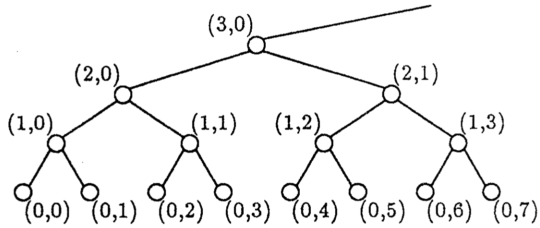


図 1. 節のインデクス

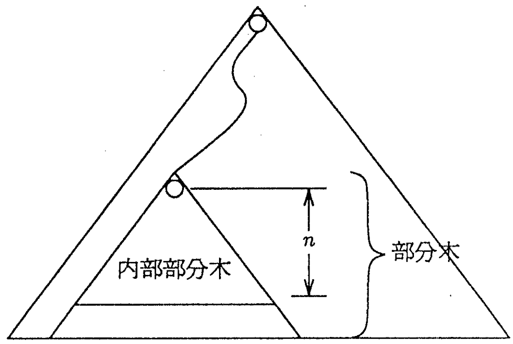


図 2. 部分木と内部部分木

2.2 剰余演算の諸性質

ここでは，本稿で使用する剰余演算の性質をまとめて示す．

(1) a, b を任意の整数，c を任意の正整数とするとき [9]，

$$a \cdot b \bmod c = (a \bmod c) \cdot (b \bmod c) \bmod c \qquad (1)$$

(2) n を任意の自然数，i を任意の非負整数とするとき，

$$2^{i \cdot n} \bmod (2^n - 1) = 1 \qquad (2)$$

(3) n を任意の自然数，i を任意の非負整数とするとき，

$$2^i \bmod (2^n - 1) = 2^{i \bmod n} \qquad (3)$$

(4) a を任意の整数，n を任意の自然数とするとき，

$$a \cdot 2^n \bmod (2^n - 1) = a \bmod (2^n - 1) \qquad (4)$$

式 (2) - (4) の証明を，付録に示す．

3. 2 分木のラベル付け

本章では， 2 分木のラベル付けの方法を示す [7,8]．与えられた 2 分木に対して，どの深さ n の内部部分木を考えても，それに含まれる節が， 0 から 2^n-2 までの 2^n-1 個の互いに異なるラベルを持つようなラベル付けの方法を示す．

3.1 ラベル付けの方法

このような条件を満足するようにラベルを付けるには，次の手順に従えばよい．

[手順 1] 深さ n の任意の内部部分木で各節のラベルが互いに重複しない 2 分木のラベル付け

1: 2 分木全体の節にインオーダでラベルを付ける [10]．

2: 各節に対して，現在付いているラベルを 2^n-1 で剰余をとったものに置き換える． □

この手順に従うと，各節には次のようなラベルが付く．

まず，2 分木全体にインオーダで 0 から順に整数のラベルを付けると，節の位置とそれに付けられるラベルとの間には次の関係がある．

[定理 1] 手順 1 に従うと， (i, j) の節には，

$$s(i, j) = 2^i - 1 + j{\cdot}2^{i+1}$$

のラベルが付く．

(証明) i を任意のレベルを示す非負整数とするとき，レベル i の最も左の位置の節に付けられるラベル $s(i, 0)$ は， $(i, 0)$ の左の部分木に含まれる節の個数に等しいため，

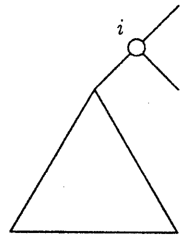
$$s(i, 0) = 2^i - 1$$

となる (図 3(a) 参照)．

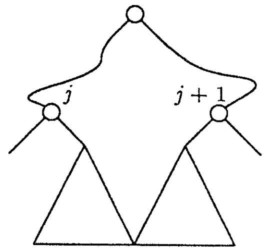
また，レベル i において隣接する 2 つの節 (i, j) と $(i, j+1)$ に付けられるラベルの値の差は， (i, j) の右の部分木に含まれる節の個数 $2^i - 1$， $(i, j+1)$ の左の部分木に含まれる節の個数 2^i-1，そして， (i, j) と $(i, j+1)$ の共通の親となる節の個数 1 の総和に 1 を加えたものであるから，

$$s(i, j+1) - s(i, j) = 2{\cdot}(2^i - 1) + 1 + 1$$
$$= 2^{i+1}$$

となる (図 3(b) 参照)．



(a)



(b)

図 3. 定理 1 の説明

ゆえに， $s(i, j)$ は，

$$s(i, j) = s(i, 0) + j{\cdot}2^{i+1}$$
$$= 2^i - 1 + j{\cdot}2^{i+1}$$

と表現できる． □

次に，各節のラベルを，インオーダで付けたラベル $s(i, j)$ を深さ n の 2 分木に含まれる節の数 2^n-1 で剰余をとったものに書き換える．このとき，各節のラベル $m(i, j)$ は，

$$m(i, j) = (2^i - 1 + j{\cdot}2^{i+1}) \bmod (2^n - 1)$$

となる．

以上により得られる 2 分木の節のラベルを図 4 に示す．

3.2 ラベルの性質

上記の手順で付けられたラベルの性質を示す．

[定理 2] 任意の節 (i, j) を考える．このとき，その左の子と右の子の節に付けられるラベルは，それぞれ，

$$(m(i, j) - 2^{i-1}) \bmod (2^n - 1)$$

$$(m(i, j) + 2^{i-1}) \bmod (2^n - 1)$$

で表現される．

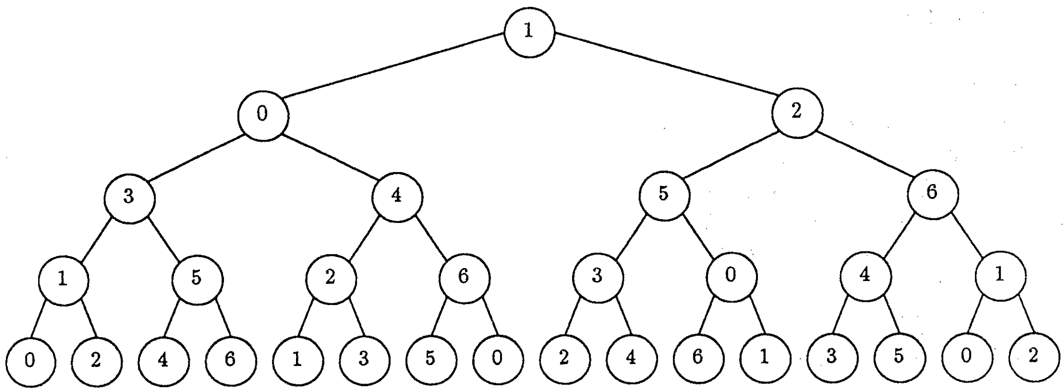


図 4. 深さ 3 に対する 2 分木のラベル付け

(証明)節(i, j)の左と右の子の位置は，それぞれ，$(i{-}1, 2j)$, $(i{-}1, 2j{+}1)$ となる．ゆえに，

$$m(i{-}1, 2j) = (2^{i-1} - 1 + 2j \cdot 2^{i}) \bmod (2^{n} - 1)$$
$$= (m(i, j) - 2^{i-1}) \bmod (2^{n} - 1)$$
$$m(i{-}1, 2j{+}1)$$
$$= (2^{i-1} - 1 + (2j + 1) \cdot 2^{i}) \bmod (2^{n} - 1)$$
$$= (m(i, j) + 2^{i-1}) \bmod (2^{n} - 1)$$

が得られる．□

さて，上に示したラベル付けに従えば，任意の内部部分木に含まれる節には，相異なるラベルが付くことを示す．

[性質 1] 任意のレベル i にある任意の節を根とする内部部分木内の $2^{n} - 1$ 個の節に付けられるラベルは，根となる節に付けられるラベルの番号を a とするとき，定理 2 を繰り返し使用することによって，

$$(a - 2^{i} + (k + 1) \cdot 2^{i+1}) \bmod (2^{n} - 1),$$
$$k = 0, 1, \ldots, 2^{n} - 2$$

と表現できる．□

[定理 3] ラベル付け $m(i, j)$ は，任意の位置の深さ n の内部部分木に含まれる節に対して，相異なるラベルを付ける．

(証明) 異なる任意の整数 k_1, k_2 (k_1, k_2 = 0, 1, 2, ..., $2^{n} - 2$) を考える．この内部部分木に含まれる 2 つの異なる節に付けられるラベルを，

$$(a - 2^{i} + (k_1 + 1) \cdot 2^{i+1}) \bmod (2^{n} - 1) \qquad (5)$$
$$(a - 2^{i} + (k_2 + 1) \cdot 2^{i+1}) \bmod (2^{n} - 1) \qquad (6)$$

とし，この 2 つのラベルが等しいと仮定する．両式の差をとると，

$$(6) - (5) = (k_1 - k_2) \cdot 2^{i+1} \bmod (2^{n} - 1)$$
$$= (k_1 - k_2) \bmod (2^{n} - 1) \cdot 2^{i+1 \bmod n}$$

これが 0 となるのは $k_1 = k_2$ のときのみであり，これは，仮定に矛盾する．ゆえに，ラベル付け $m(i, j)$ は，任意の深さ n の内部部分木に含まれる節に対して異なるラベルをつける．□

4. 多分木のラベル付け

本章では，多分木のラベル付けの方法について議論する．多分木については，深さが 2 の冪である内部部分木に対し，互いに重複しないようなラベル付けが可能である．ここでは，まず深さ 2 の内部部分木についてラベル付けの方法を示し，その後，深さを 2 の冪に拡張する．

4.1 深さ 2 の内部部分木でラベルが衝突しない多分木のラベル付け

q 分木を考える． q 分木の深さ 2 の内部部分木には $q + 1$ 個の節が含まれる．ここでは，どの深さ 2 の内部部分木をとっても，そこに含まれている節に付けられるラベルが重複しないようなラベル付けの方法を示す．

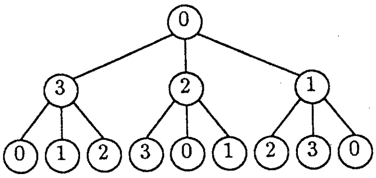


図 5. 深さ 2 の 3 分木のラベル付け

4.1.1 ラベル付け

ラベル付けは次の手順に従って行う．

[手順 2] 深さ 2 の任意の内部部分木で各節のラベルが互いに重複しない q 分木のラベル付け

1: レベルが偶数の節に対しては，左から順に $q+1$ の剰余をとりながら，0 から始めて 1 ずつ増加するようにラベルを付ける．

2: レベルが奇数の節に対しては，左から順に，$q+1$ の剰余をとりながら，q より始めて 1 ずつ減少するようにラベルを付ける．□

手順 2 によるラベル付けの結果を図 5 に示す．

手順 2 に従ってラベルを付けると，位置 (i, j) の節には，

$$m(i, j) = \begin{cases} j \bmod (q+1) & i = \text{even} \\ -(j+1) \bmod (q+1) & i = \text{odd} \end{cases}$$

$$= ((-1)^i j + ((-1)^i - 1)/2) \bmod (q+1)$$

で得られる番号のラベルが付けられる．

4.1.2 ラベルの性質

手順 2 に従うと，任意の深さ 2 の内部部分木に含まれる節に付けられるラベルが重複しないことを示す．

[定理 4] 手順 2 に従って付けられたラベルでは，任意の深さ 2 の内部部分木に含まれる節に付けられるラベルは全て相異なる．

(証明) 任意の節 (i, j) を根とする内部部分木を考え，次の 2 つの場合に分けて証明する．

(1) まず，内部部分木の根となる節のラベルと，任意の葉とのラベルが重複しないことを示す．

内部部分木の根に付けられるラベルは，

$$m(i, j) = ((-1)^i j + ((-1)^i - 1)/2) \bmod (q+1)$$

と表現できる．また，内部部分木の最も左にある葉の位置は $(i-1, qj)$ であり，任意の葉の位置は，$(i-1, qj+k)$ $(k = 0, 1, \ldots, q-1)$ と表現できるため，任意の葉に付けられるラベルは，

$$\begin{aligned} &m(i-1, qj+k) \\ &\quad = ((-1)^{i-1}(qj+k) + ((-1)^{i-1} - 1)/2) \\ &\qquad \bmod (q+1) \end{aligned}$$

両式の差を求めると，

$$\begin{aligned} &m(i, j) - m(i-1, j \cdot 2^d + k) \\ &\quad = (-1)^i (k+1) \bmod (q+1) \end{aligned}$$

ここで，k が $k = 0, 1, \ldots, q-1$ のどの値をとっても，右辺が 0 とならず，根となる節のラベルと葉に付けられるラベルとは重複しないことがわかる．

(2) 次に，葉の間でラベルが重複しないことを示す．

葉には，法を $q+1$ とする剰余系の連続した整数ラベルが付けられる．ここで，葉の数は q であるため，明らかに葉には異なるラベルが付く．

(1) と (2) より，ラベル付け $m(i, j)$ は，任意の深さ 2 の内部部分木に重複しないラベルを付ける．□

4.2 深さ 2^p の内部部分木で衝突が生じない多分木のラベル付け

ここでは，p を任意の自然数とするとき，深さ 2^p の内部部分木に含まれる節が，0 から内部部分木の節の数より 1 少ない $(q^{2^p} - 1) / (q-1) - 1$ までの相異なるラベルを持つような q 分木のラベル付けの方法を示す．

4.2.1 ラベル付け

ラベル付けは，次の手順に従って行う．

[手順 3] 深さ 2^p の任意の内部部分木で各節のラベルが互いに重複しない q 分木のラベル付け

1: 手順 2 と同様に，q 分木に対して，$q+1$ の剰余をとることによって任意の深さ 2 の内部部分木でラベルが衝突しないラベルを各節に付ける．

2: r を，$1, 2, \ldots, p-1$ の各値に対して以下の操作を行う

2-1: 深さ 2^r の内部部分木をひとつの節とみなす．これにより，全体を q^{2^r} 分木とみ

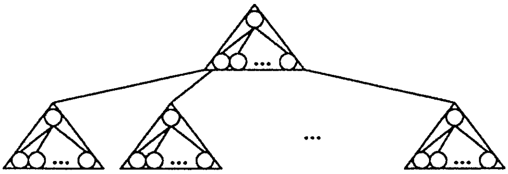


図 6. 多分木のラベル付け

なすことができる．

2-2: 手順 2 に従い，深さ 2 の q^{2^r} 分木の各節とみなしている深さ 2^r の各内部部分木に，$q^{2^r}+1$の剰余をとることによって，0 から q^{2^r} までのラベルを付ける．

2-3: 各節のラベルを，現在付いているラベルとステップ 2-2 で内部部分木に付けたラベルを $(q^{2^r}-1)\ /\ (q-1)$ 倍したものの和で置き換える．□

ステップ 2 の説明図を図 6 に示す．また，この手順で得られる，深さ 4 の内部部分木で衝突しない 3 分木のラベルを図 7 に示す．

4.2.2 ラベルの性質

手順 3 に従えば，(i, j) の節には次のラベルが付けられる．

$$m(i,j)=\sum_{r=0}^{p-1}\left(\left((-1)^{i'}j'+\frac{(-1)^{i'}-1}{2}\right) \bmod (q^{2^r}+1)\right)\cdot\frac{q^{2^r}-1}{q-1}$$

ここで，

$$i' = \frac{i}{2^r}$$

$$j' = \frac{j}{q^{2^r-1-(i \bmod 2^r)}}$$

これにより得られるラベルが，任意の深さ 2^p の内部部分木でラベルが重複しないことは，手順 3 の内容から明らかである．

5. まとめ

任意の内部部分木を考えた時，それに含まれる節に重複しない有限個のラベルを付ける方法について示した．

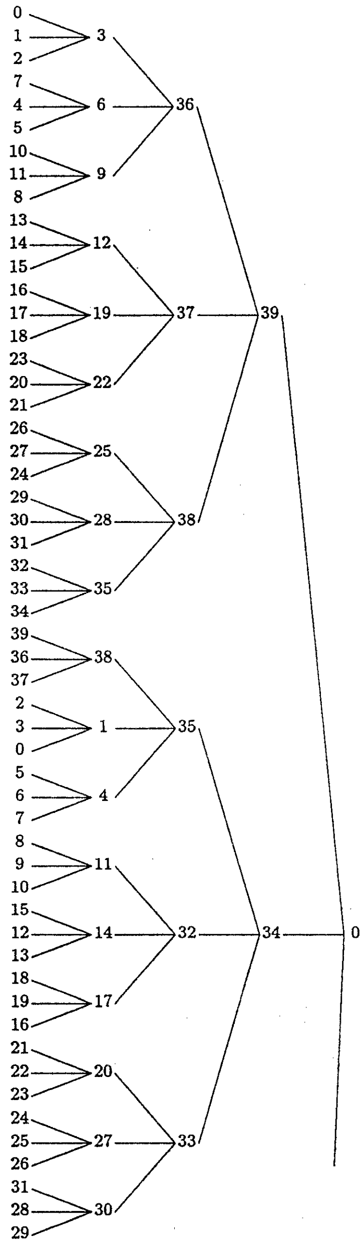


図 7. 深さ 4 の 3 分木に対するラベル付け

本稿で扱った木は，任意の深さの内部部分木に対する 2 分木と，任意の多分木で深さ 2 または 2 の冪乗の内部部分木に対する場合である．

今後，このラベル付けの手法をさらに一般化することを試みたい．

謝辞　本研究に関して御意見を頂戴した近畿大学教授白川洋充先生，名古屋大学教授稲垣康善先生，神戸大学教授田中榮一先生に感謝致します．

参考文献

[1] Shirakawa, H., "On a Parallel Memory to Access Trees," *Memoirs of Res. Inst. of Sci. and Eng.,* Ritsumeikan University, No.46, pp.57-62 (1987).

[2] Creutzburg, R., "Parallel Linear Conflict-Free Subtree Access," *Lecture Notes in Computer Science,* Vol. 269, pp.89-96 (1987).

[3] Creutzburg, R., "Optimal Parallel Conflict-Free Access to Extended Binary Trees," *Lecture Notes in Computer Science,* Vol.399, pp.214-225 (1989).

[4] Creutzburg, R. and L. Andrews, "Recent Results on the Parallel Access to Tree-Like Data Structures — the Isotropic Approach, I," *Proc. 1991 Int'l Conf. on Parallel Processing,* Vol.I, pp.369-372 (1991).

[5] Gössel, M. and B. Rebel, "Memories for Parallel Subtree-Access," *Lecture Notes in Computer Science,* Vol.269, pp.122-130 (1987).

[6] Gössel, M., B. Rebel und R. Creutzburg, *Speicherarchitektur und Parallelzugriff,* Academie-Verlag, Berlin (1989).

[7] 熊谷　毅, "2 分木をアクセスする並列メモリのためのスキューウィングスキーム," 情報処理学会第 44 回全国大会講演論文集 (6), pp.107-108 (1992).

[8] Kumagai, T., "Inorder Skew: A Skewing Scheme for Parallel Tree Memories," *Proc. 1992 Int'l Conf. on Parallel Processing,* Vol.I, pp.44-47 (1992).

[9] Graham, R.L., D.E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics,* Addison-Wesley (1989).

[10] Aho, A.V., J.E. Hopcroft and J.D. Ullman, *Data Structures and Algorithms,* Addison-Wesley (1983).

付録　剰余系における演算の性質

[性質 A1] n を任意の自然数，i を任意の非負整数とするとき，

$$2^{i\cdot n} \bmod (2^n - 1) = 1$$

である．

(証明) 二項定理より，

$$\begin{aligned} 2^{i\cdot n} &= ((2^n-1)+1)^i \\ &= \sum_{k=0}^{i} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} (2^n-1)^{i-k} \\ &= 1 + (2^n-1)\sum_{k=0}^{i-1} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} (2^n-1)^{i-k-1} \end{aligned}$$

ゆえに，

$$2^{i\cdot n} \bmod (2^n - 1) = 1$$

□

[性質 A2] n を任意の自然数，i を任意の非負整数とする．このとき，

$$2^i \bmod (2^n - 1) = 2^{i \bmod n} \bmod (2^n-1)$$

である．

(証明) i と n との整数演算の商と剰余を，それぞれ i_1, i_2 とする．性質 A1 を使用することにより，

$$\begin{aligned} 2^i \bmod (2^n - 1) &= 2^{i_1 n}\cdot 2^{i_2} \bmod (2^n - 1) \\ &= 2^{i_1 n}\cdot 2^{i_2} \bmod (2^n - 1) \\ &= 2^{i_2} \bmod (2^n - 1) \end{aligned}$$

ゆえに，

$$2^i \bmod (2^n - 1) = 2^{i \bmod n} \bmod (2^n - 1)$$

□

[性質 A3] a を任意の整数，n を任意の自然数とするとき，

$$a\cdot 2^n \bmod (2^n - 1) = a \bmod (2^n - 1)$$

である．

(証明)

$$\begin{aligned} a\cdot 2^n \bmod (2^n - 1) &= (a\cdot(2^n - 1) + a) \bmod (2^n - 1) \\ &= a \bmod (2^n - 1) \end{aligned}$$

□