アルゴリズム 36−8
(1993. 11. 25)

双線形計画による問題複雑度の分類

萩原 斉　　中森 眞理雄

東京農工大学工学部 情報工学大講座

筆者らは，既報で，CNF あるいは DNF 標準形の論理式に対する充足可能性問題を，双線形計画問題として記述する方法を示した。本論文においては，その記述方法を一般形の論理式に対して拡張する。さらに，NP 困難な問題の代表例である 0-1 整数計画（最適化）問題を，連続パラメータを含む双線形計画問題として記述する方法を示し，論理式充足可能性問題や 0-1 整数計画問題における可能解の存在判定問題などを双線形計画問題として記述したものとは異なる新しいクラスの問題として位置づけている。さらに，最大クリーク問題，最小節点カバー問題，最小彩色数問題を離散パラメータを含む双線形計画問題として記述した結果を示す。

Classifying Problem Complexity via Bilinear Programming

Hitoshi Hagiwara　　Mario Nakamori

Tokyo University of Agriculture and Technology

The satisfiability problem of conjunctive or disjunctive normal form has been described as bilinear programming in the authors' previous paper. This result is generalized in the present paper. We show that the optimizing problem of 0-1 integer programming which is typical NP-hard problem is defined as bilinear programming with continuous parameter, and classify this problem into the different class from the satisfiability problem, the feasibility problem of 0-1 integer programming and so on. Also, the following graph problems are described in the present paper as bilinear programming with discrete parameter; finding the maximum clique, obtaining the minimum cover of vertices, and determining the chromatic number.

1 まえがき

アルゴリズムの難しさは計算時間（時間複雑度）や所要記憶容量（空間複雑度）で評価され，問題の難しさはそれを解く最も低い複雑度のアルゴリズムで評価される。問題とアルゴリズムの難しさに対するこのような理論は計算複雑度の理論と呼ばれる。

計算複雑度の理論においては，時間複雑度が多項式オーダの決定性アルゴリズム（または非決定性アルゴリズム）が存在する問題のクラスを **P**（または **NP**）と記す。クラス **P**（または **NP**）に属するいかなる問題も時間複雑度が多項式オーダの決定性アルゴリズムによって問題 A に変換されるとき，問題 A がクラス **P**（または **NP**）に属するならば，問題 A は P 完全（または NP 完全）であるといい，問題 A がクラス **P**（または **NP**）に含まれないならば，問題 A は P 困難（または NP 困難）であるという [1], [2]。

NP 完全な問題の代表例に，与えられた論理式の充足可能性を判定する問題がある [3]。さきに筆者らは論理式充足可能性問題が双線形計画問題 (bilinear programming problem) として記述できること，及びその際に必要となる変数と制約条件式の数がもとの充足可能性問題の論理式の長さ（リテラルの数）n に対して $O(n)$ 程度であることを示した [4]。クラス **NP** に属するいかなる問題も時間複雑度が多項式オーダの決定性アルゴリズムによって論理式充足可能性問題に変換可能であるので，クラス **NP** の問題はすべて多項式オーダの変数と制約条件式による双線形計画問題として記述できることになる。しかし，筆者らが文献 [4] で提案した記述方法は，論理式が CNF あるいは DNF 論理式などの標準形 [5] で書かれていることを前提としていた。一般に，論理式を CNF あるいは DNF 論理式に変換すると論理式の長さはもとの式の長さに対して多項式オーダとなるとは限らない（指数関数オーダとなることもある）。本論文の第一の目標は，文献 [4] の記述方法を一般形の論理式に拡張することである。本論文で提案する方法によるならば，与えられた論理式は CNF あるいは DNF 論理式を経由することなく双線形計画問題として記述され，しかも変数と制約条件式の数は多項式オーダである。

NP 完全な問題のもう一つの代表例に，与えられた 0-1 整数計画問題に可能解が存在するか否かを判定する問題がある。文献 [4] では，この問題を双線形計画問題として記述できること，及びその際に必要となる変数と制約条件式の数がもとの整数計画問題の変数や制約条件式の数に対して多項式オーダであることを示した。しかし，一般に，整数計画問題は，制約条件を満たし目的関数を最大あるいは最小とする解を求める問題として定義される場合が多く，これらの目的関数を伴う整数計画問題は NP 困難であって NP 完全ではない。筆者らが文献 [4] で提案した記述方法では，可能解の存在判定問題を双線形計画問題として記述することはできるが，目的関数を伴う整数計画問題を双線形計画問題として記述することはできない。本論文の第二の目標は，目的関数を伴う整数計画問題が，パラメータを含む双線形計画問題として記述できることを示し，新たなクラスの問題として位置づけることである。

グラフにおいて最大クリークを求める問題，最小節点カバーを求める問題，最小採色数を求める問題などは目的関数を伴う整数計画問題として記述できるので，上記のパラメータを含む双線形計画問題として記述できる。しかし，ここでのパラメータは一般の場合のパラメータとは異なりより離散的な性質を持っているので，これらの問題は上記のパラメータを含む双線形計画問題の部分クラスとして考えることができる。本論文の第三の目標は，より離散的なパラメータを含む双線形計画問題のクラスを考え，グラフのいくつかの問題をそのクラスの問題として位置づけることである。

なお，双線形計画問題とは，次のような数理計画問題のことをいう [6]。

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} e_j x_j + \sum_{i=1}^{m} f_i y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_i x_j$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j \le b_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ik} y_i \le d_k \quad . \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$y_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

2 一般の論理式に対する充足可能性問題について

ここでは，与えられた論理式を CNF あるいは DNF 論理式などの標準形に変形することなく，一般の論理式に対する充足可能性問題を双線形計画問題として記述する方法について述べる。

なお，本論文においては，いくつかのリテラルが同一論理演算子によって結ばれているものを節と呼び，

ある変数 ξ の肯定形 ξ と否定形 $\neg\xi$ 及び節をまとめてリテラルと呼ぶものとする。

2.1 諸定義

ここでは，一般の論理式に対する充足可能性問題を双線形計画問題として記述する際に使用する，三種類の集合を定義する。そこで，論理式内の各節に対して $1,2,\ldots,m$ という番号を一意に付けるものとする。また，与えられた論理式は，それ全体を一つの節とみなすことができるので，その節には番号0を付けるものとする。

このような番号付けの方法として，ここでは，“与えられた論理式を左側から順に見ていき，節を表す左括弧が出てきたら番号を付ける”という方法を採用した。次に，その番号付けの例を示す。

$$\underbrace{\underbrace{(\xi_1 \vee \xi_2)}_{1} \wedge \underbrace{\left(\underbrace{\left(\underbrace{\xi_2 \wedge \neg \underbrace{(\xi_1 \vee \neg\xi_3)}_{4}}_{3}\right) \vee \xi_4}_{2}\right) \wedge \neg\xi_3}_{0} \quad (1)$$

このような各節に付けた番号に対して，次に示す三つの集合を定義する。

(i) 第 i 節内において変数 ξ_j が

$$\left\{\begin{array}{l}\text{肯定形}\\ \text{否定形}\end{array}\right\} \text{で存在する。} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} j \in J_i \\ j \in J'_i \end{array}\right\}$$

(ii) 第 i 節内における論理演算子が

$$\left\{\begin{array}{l}\text{論理和}\\ \text{論理積}\end{array}\right\} \text{である。} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} i \in I_{\text{or}} \\ i \in I_{\text{and}} \end{array}\right\}$$

(iii) 第 i 節内において第 k 節が

$$\left\{\begin{array}{l}\text{肯定形}\\ \text{否定形}\end{array}\right\} \text{で存在する。} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} k \in I_i \\ k \in I'_i \end{array}\right\}$$

ただし，(iii) の集合を考える際に，第 i 節内において第 k 節が肯定形で存在し，さらに第 k 節内において第 l 節が肯定形で存在しても，$k \in I_i, l \in I_k$ とはなるが $l \in I_i$ とはならないものとする。

例として，(1) に対する各集合を次に示す。

(i) $J_0 = \emptyset, J'_0 = \{3\}, \quad J_1 = \{1,2\}, J'_1 = \emptyset,$
$\ldots, J_4 = \{1\}, J'_4 = \{3\}$

(ii) $I_{\text{or}} = \{1,2,4\}, \quad I_{\text{and}} = \{0,3\}$

(iii) $I_0 = \{1,2\}, \quad I_2 = \{3\}, \quad I'_3 = \{4\}$
上記以外の I_i 及び $I'_i = \emptyset$

2.2 双線形計画問題としての記述

(i)～(iii) で定義した集合を用いることにより，一般の論理式に対する充足可能性問題は，次の双線形計画問題として記述することができる。

ただし，次式における m 及び n は，それぞれ与えられた論理式内における節の数及び変数の種類を表しているものとする。

問題 I.B

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1-x_j)(1-u_j)\},$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\in J_i} x_j + \sum_{j \in J'_i} (1-x_j) \\
&\quad + \sum_{k \in I_i} w_k + \sum_{k \in I'_i} (1-w_k) \geq w_i \quad (i \in I_{\text{or}}), && (2)\\
&w_i \leq x_j \qquad (i \in I_{\text{and}},\ j \in J_i), && (3)\\
&w_i \leq 1 - x_j \qquad (i \in I_{\text{and}},\ j \in J'_i), && (4)\\
&w_i \leq w_k \qquad (i \in I_{\text{and}},\ k \in I_i), && (5)\\
&w_i \leq 1 - w_k \qquad (i \in I_{\text{and}},\ k \in I'_i), && (6)\\
&1 \leq w_0, && (7)\\
&0 \leq w_i \leq 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,m),\\
&0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,n),\\
&0 \leq u_j \leq 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,n).
\end{aligned}$$

ここで，(2) は“$i \in I_{\text{or}}$ なる節（論理和からなる節）においては，節内の少なくとも一つのリテラルが真となるとき，その節は充足可能である”という条件を表しており，(3)～(6) は“$i \in I_{\text{and}}$ なる節（論理積からなる節）においては，節内のすべてのリテラルが真となるときのみ，その節は充足可能である”という条件を表している。また，(7) は“第0節（与えられた論理式）は，充足可能とならなければならない”という当然の条件を表している。

一方，問題 I.B における目的関数 φ を最大化するためには，連続変数の組 (x_j, u_j) のすべてに対して，取り得る値を $(0,0)$ あるいは $(1,1)$ としなければならず，すべての連続変数の組がこのような値を取るときに限り目的関数 φ は最大値 n を取ることになる。したがって，最適解に対する目的関数 φ の値が n となれば，問題 I.B における連続変数 x_j と与えられた論理式における論理変数 ξ_j とが対応づけられることになる。

以上より，問題 I.B において，最適解に対する目的関数 φ の値が n となれば，与えられた論理式は充足可能であることになる。

なお，問題 I.B においては，使用されている変数が

- $w_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$
- $x_j, u_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$

であるので，合計 $m+2n$ 個の変数が使用されている。

3 0-1 整数計画（最適化）問題について

文献 [4] では，“いくつかの線形等式や線形不等式からなる制約条件を満たす 0-1 変数の値の組が存在するか否かを判定する問題（可能解の存在判定問題）” という型の 0-1 整数計画問題を双線形計画問題として記述する方法について述べた。一般に，計算複雑度の理論においても，この型の問題を 0-1 整数計画問題と呼んでいる。

ここでは，次に示す “与えられた制約条件の下で目的関数を最大にする解（最適解）を求める” という型の 0-1 整数計画問題を双線形計画問題として記述する二種類の方法について述べる。

問題 II

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{8}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_j \text{は整数} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

この問題 II を，文献 [4] で示した記述方法により双線形計画問題として扱うために [4] と同様に，(9) の整数条件を取り除き，新たな制約条件

$$1 \le u_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

を加えた上で，目的関数 (8) を

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \{u_j x_j + (1 - u_j)(1 - x_j)\}$$

とすることが考えられる。しかし，この目的関数 z に対する双線形計画問題の最適解は整数条件を満たすとは限らない。つまり，文献 [4] で示した記述方法では，0-1 整数計画（最適化）問題を双線形計画問題として記述することができない。そこで，次に，0-1 整数計画（最適化）問題を双線形計画問題として記述する二通りの方法を示す。

3.1 記述方法 –その 1–

ここでは，次に示すパラメータ λ を含む双線形計画問題を考える。

問題 II.B.1

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$0 \le u_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ge \lambda.$$

なお，以降においては，この問題を BLP(λ) と記すものとする。

このとき，二つの定数 $C_{\min}$ 及び $C_{\max}$ を

$$C_{\min} = \sum_{c_j < 0} c_j, \quad C_{\max} = \sum_{c_j > 0} c_j$$

のように定義し，

$$\mathrm{BLP}(C_{\min}), \mathrm{BLP}(C_{\min} + \Delta), \mathrm{BLP}(C_{\min} + 2\Delta), \ldots, \mathrm{BLP}(C_{\max})$$

を同時に解き，目的関数 φ の値が n となり（すなわち，すべての変数 (x_j, u_j) の組が $(0, 0)$ あるいは $(1, 1)$ という値をとり），λ の値が最大となる BLP(λ) を求めれば，その BLP(λ) における最適解及び λ の値が，それぞれ問題 II における最適解及びそれに対する目的関数 z の値となる。ただし，ここで Δ は，要求される計算精度における最小単位を表す数であるものとする 。したがって，BLP(λ) の個数は，

$$(C_{\max} - C_{\min})/\Delta$$

となる。しかし，実際にこれだけ多数の BLP(λ) を同時に解くことは難しいので，p 個の BLP(λ) を同時に解きながら，λ の範囲を狭めていくアルゴリズムが考えられる。この場合，BLP(λ) を解く回数は，たかだか

$$\left\lfloor \log_{p+1} \frac{C_{\max} - C_{\min}}{\Delta} \right\rfloor + 1 \tag{10}$$

である。

3.2 記述方法 –その2–

ここでは，双対問題を用いて 0-1 整数計画（最適化）問題を双線形計画問題として記述する方法について述べる。

問題 II から整数条件を除いたものの双対問題を次に示す。

問題 II.D

minimize

$$w = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} s_j,$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + s_j \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\\
&0 \leq y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),\\
&0 \leq s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

ここで，問題 II 及び問題 II.D における最適解（可能解）をそれぞれ $\hat{x}_j$ 及び $\hat{y}_i$, $\hat{s}_j$（x_j 及び y_i, s_j）で表し，最適解に対する目的関数の値をそれぞれ $\hat{z}$ 及び $\hat{w}$ で表すものとする。このとき，問題 II には整数条件が存在することにより，$\hat{z}$ 及び $\hat{w}$ の間には $\hat{z} \leq \hat{w}$ という関係が成立するので，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j\\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i + \sum_{j=1}^{n} \hat{s}_j\\
&\leq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} s_j
\end{aligned}$$

という関係式が成立する。

したがって，上記の関係を用いることにより，問題 II における最適解を求める問題は，次のパラメータ ε を含む双線形計画問題として記述される。

問題 II.B.2

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),\\
&0 \leq x_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\\
&0 \leq u_j \leq 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\\
&\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i + s_j \geq c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\\
&0 \leq y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),\\
&0 \leq s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),\\
&\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{j=1}^{n} s_j - \varepsilon, \qquad (11)\\
&0 \leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

なお，以降においては，この問題を HLP(ε) と記すものとする。

このとき，

$$\mathrm{HLP}(0), \mathrm{HLP}(\Delta),\\
\mathrm{HLP}(2\Delta), \ldots, \mathrm{HLP}(C_{\max} - C_{\min})$$

を同時に解き，目的関数 φ の値が n となり，ε の値が最小となる HLP(ε) を求めれば，その HLP(ε) における最適解が問題 II における最適解となる。また，このときの最小な ε の値は $\hat{w} - \hat{z}$ と同じ値であり，これは問題 II において，(9) の整数条件を除いた場合の最適解と含んだ場合の最適解との差を表しており，整数条件を除いた問題の最適解を整数化するためのコストであると考えられる。

また，p 個の問題を同時に解くものとした場合，この HLP(ε) において ε の値が最小となる HLP(ε) を見つけるために問題を解く回数は，(10) に示した BLP(λ) の場合と同様である。

以上で述べたように，多数の BLP(λ) や HLP(ε) をすべて同時に解く場合も p 個同時に解く場合も，計算複雑度は Δ に依存している。したがって，仮に理想的な任意長の精度の計算が可能ならば，上記の理論は成り立たないことになる。

4 最大クリーク問題について

ここでは，最大クリーク問題を双線形計画問題として記述する方法について述べる。最大クリーク問題とは，与えられた無向グラフ $G = (V, E)$ において，$V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ を満たす完全部分グラフ $G' = (V', E')$ のうち，節点数 $|V'|$ が最大となるグラフ G' を求める問題である。なお，以降の本論文中において，無向グラフ G は

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i, j \text{ 間に枝が存在するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases} \qquad (12)$$

という隣接行列 $G = \{g_{ij}\}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, v)$ により与えられているものとし，さらにその無向グラフ G

の節点数 $|V|$ 及び枝の数 $|E|$ をそれぞれ v 及び e で表すものとする。

グラフ G の節点 j が節点集合 V' に含まれるか否かにより，

$$x_j = \begin{cases} 1 & j \in V' \text{ のとき} \\ 0 & j \notin V' \text{ のとき} \end{cases} \tag{13}$$

という値を取る変数 x_j を用いると，最大クリーク問題は，次の 0-1 整数計画問題として記述される。

問題 III

maximize

$$z = \sum_{j=1}^{v} x_j,$$

subject to

$$x_i + x_j \le 1 \qquad (g_{ij} = 0;\ i \ne j), \tag{14}$$

$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v),$$

$$x_j \text{は整数} \qquad (j = 1, 2, \ldots, v). \tag{15}$$

ここで，(14) は，“節点 i, j 間に枝が存在しないときには，両節点を同時に節点集合 V' に含めることはできない” ということを表している。

このとき，無向グラフ G を完全グラフとみなした場合の枝の集合を $\check{E}$ とし，$\bar{E} = \check{E} - E$, $|\bar{E}| = e'$ とした上で，

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } j \text{ が枝 } i \in \bar{E} \text{ の端点のとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

を定義すると，(14) は

$$\sum_{j=1}^{v} e_{ij} x_j \le 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, e')$$

と書き換えられる。そこで，前述の記述方法 –その 2– にならって，(15) を除いた問題に対する双対問題

問題 III.D

minimize

$$w = \sum_{i=1}^{e'} y_i,$$

subject to

$$\sum_{i=1}^{e'} e_{ij} y_i + s_j \ge 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v), \tag{16}$$

$$0 \le y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, e'),$$

$$0 \le s_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, v) \tag{17}$$

ともとの問題 III とを組み合わせて考えても良いが，ここでは，より簡略化された双線形計画問題

問題 III.B

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{v} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$x_i + x_j \le 1 \qquad (g_{ij} = 0;\ i \ne j),$$

$$0 \le x_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v),$$

$$0 \le u_j \le 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, v),$$

$$\sum_{j=1}^{v} x_j = k$$

を考えることにする。なお，以降においては，この問題を CLQ(k) と記すことにする。

すると，

$$\mathrm{CLQ}(1), \mathrm{CLQ}(2), \ldots, \mathrm{CLQ}(v)$$

を解き，目的関数 φ の値が v となり，k の値が最大となる CLQ(k) を求めれば，その CLQ(k) における最適解が問題 III における最適解，つまりは最大クリークを表していることになる。

ここで述べた CLQ(k) と前述の 0-1 整数計画（最適化）問題との違いは，同時に解くべき問題の個数が定数 v で表され Δ に依存していない点である。このように，解かなければならない問題の個数が定数である問題は，前述の BLP(λ) が属するクラスの部分クラスに属する問題であると考え，さらに，その数がもとの問題の大きさを表す数に対して多項式オーダで表される問題は，更なる部分クラスに属する問題であると考える。

なお，p 個の問題を同時に解くものとした場合，この CLQ(k) において k の値が最大となる CLQ(k) を見つけるために問題を解く回数は，たかだか

$$\lfloor \log_{p+1} v \rfloor + 1 \tag{18}$$

である。

5 最小節点カバー問題について

ここでは，最小節点カバー問題を双線形計画問題として記述する方法について述べる。最小節点カバー問題とは，与えられた無向グラフ $G = (V, E)$ において，すべての枝 e ($e \in E$) の少なくとも一方の端点が属する節点集合 V' ($V' \subseteq V$) のうち，節点数 $|V'|$ が最小となる節点集合 V' を求める問題である。

また，ここで使用する変数 x_j に関しても，最大クリーク問題と同様に (13) のように定義すると，最小

節点カバー問題は，次の 0-1 整数計画問題として記述される。

問題 IV

minimize

$$z = \sum_{j=1}^{v} x_j,$$

subject to

$$\begin{aligned} &x_i + x_j \geq 1 && (g_{ij} = 1;\ i \neq j), && (19)\\ &0 \leq x_j \leq 1 && (j = 1, 2, \ldots, v), \\ &x_j \text{は整数} && (j = 1, 2, \ldots, v). \end{aligned}$$

ここで，(19) は，“節点 i, j 間に枝が存在するときには，両節点のうち少なくとも一方の節点を集合 V' に含めなければならない” ということを表している。

そこで，次の双線形計画問題

問題 IV.B

maximize

$$\varphi = \sum_{j=1}^{v} \{x_j u_j + (1 - x_j)(1 - u_j)\},$$

subject to

$$\begin{aligned} &x_i + x_j \geq 1 && (g_{ij} = 1;\ i \neq j), \\ &0 \leq x_j \leq 1 && (j = 1, 2, \ldots, v), \\ &0 \leq u_j \leq 1 && (j = 1, 2, \ldots, v), \\ &\sum_{j=1}^{v} x_j = k \end{aligned}$$

を考え，この問題を COV(k) と記すことにすると，前述の CLQ(k) と同様に，

$$\mathrm{COV}(1), \mathrm{COV}(2), \ldots, \mathrm{COV}(v)$$

を解き，目的関数 φ の値が v となり，k の値が最小となる COV(k) を求めれば，その COV(k) における最適解が問題 IV における最適解，つまりは最小節点カバーを表していることになる。

なお，p 個の問題を同時に解くものとした場合，この COV(k) において k の値が最小となる COV(k) を見つけるために問題を解く回数は，(18) に示した CLQ(k) の場合と同様である。

6　最小彩色数問題について

ここでは，最小彩色数問題を双線形計画問題として記述する方法について述べる。最小彩色数問題とは，与えられた無向グラフ $G = (V, E)$ におけるすべての節点を彩色する際に，隣接する二つの節点を同じ色で彩色してはならないとした場合，最低何色の彩色数を用いればグラフ G におけるすべての節点を彩色できるかを求める問題である。

また，ここで使用する変数 x_{ij} を，

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{節点 } i \text{ を色 } j \text{ で彩色するとき} \\ 0 & \text{上記以外のとき} \end{cases}$$

のように定義すると，最小彩色数問題は，次の 0-1 整数計画問題として記述される。

問題 V

minimize

$$z = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} v^{j-1} x_{ij},$$

subject to

$$\begin{aligned} &x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \\ &\qquad (g_{ik} = 1;\ j = 1, 2, \ldots, v), && (20)\\ &\sum_{j=1}^{v} x_{ij} = 1 && (i = 1, 2, \ldots, v), && (21)\\ &0 \leq x_{ij} \leq 1 && (i, j = 1, 2, \ldots, v), \\ &x_{ij} \text{は整数} && (i, j = 1, 2, \ldots, v). \end{aligned}$$

ここで，(20) は，“隣接する二つの節点を同じ色で彩色してはならない” ということを表しており，(21) は，“各節点はただ一色でのみ彩色されなければならない” ということを表している。

このとき，グラフ G が色 “1” から色 “k” の k 色で彩色される場合の目的関数 z の最大値 $u(k)$ 及び最小値 $l(k)$ は，

$$u(k) = v^k - 2v^{k-1} + v^{k-2} + v^{k-3} + \cdots + v^2 + v + 1$$
$$l(k) = v^{k-1} + v^{k-2} + \cdots + v^2 + v + v - k + 1$$

であるので，問題 V において最適解 $\hat{z}$ が

$$l(k) \leq \hat{z} \leq u(k)$$

を満たすとき，グラフ G は k 色で彩色可能であることになる。

そこで，次の双線形計画問題

問題 V.B

maximize

$$\varphi = \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} \{x_{ij} u_{ij} + (1 - x_{ij})(1 - u_{ij})\},$$

subject to

$$
\begin{aligned}
&x_{ij} + x_{kj} \le 1 && (g_{ik} = 1;\ j = 1, 2, \ldots, v),\\
&\sum_{j=1}^{v} x_{ij} = 1 && (i = 1, 2, \ldots, v),\\
&0 \le x_{ij} \le 1 && (i, j = 1, 2, \ldots, v),\\
&0 \le u_{ij} \le 1 && (i, j = 1, 2, \ldots, v),\\
&l(k) \le \sum_{i=1}^{v}\sum_{j=1}^{v} v^{j-1} x_{ij} \le u(k)
\end{aligned}
$$

を考え，この問題を CLR(k) と記すことにすると，

$$\mathrm{CLR}(1), \mathrm{CLR}(2), \ldots, \mathrm{CLR}(v)$$

を解き，目的関数 φ の値が v^2 となり，k の値が最小となる CLR(k) を求めれば，その CLR(k) における最適解が問題 V における最適解，つまりは最小彩色数を表していることになる。

なお，p 個の問題を同時に解くものとした場合，この CLR(k) において k の値が最小となる CLR(k) を見つけるために問題を解く回数は，前述の CLQ(k) 及び COV(k) と同様である。

7 まとめ

筆者らは，問題 I.B において，一般の論理式に対する充足可能性問題が，もとの論理式における節及びリテラルの数に対して，多項式オーダの変数及び制約条件式による双線形計画問題として記述できることを示した。これにより，クラス NP のすべての問題を，多項式オーダの変数及び制約条件式による双線形計画問題として記述できることが示された。

また，目的関数を伴う 0-1 整数計画問題に代表される NP 困難な問題をパラメータを含む双線形計画問題として記述し，文献 [4] で述べた問題のクラスとは異なる新たな問題のクラスを提案した。

一般に，問題 II のような 0-1 整数計画問題における c_j は実数であるため，目的関数 z は連続的な値を取り，それに伴いパラメータも連続的な値を取り得ることになる。これに対して，後に示したグラフに関するいくつかの問題においては，c_j が整数であるので，目的関数 z は先の場合に比べてより離散的な値を取り，パラメータも離散的な値を取ることになる。

その結果，パラメータの最大値あるいは最小値を求めるために問題を解く回数が，c_j が実数の場合は計算精度の最小単位 Δ に依存するのに対し，c_j が整数の場合は定数であるという違いが生じることを示し，それぞれの問題が属するクラスが異なるものであると定義した。

本論文で述べた問題が属するクラスの関係を，図 1 に示す。

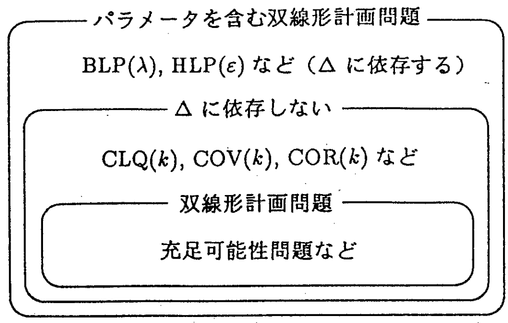

図 1 各問題が属するクラス

8 あとがき

今後は，問題を双線形計画問題として記述する際に必要となる，変数及び制約条件式の数の最小性の証明について考えていきたい。

また，計算機上での双線形計画問題に対する解法も実現させていきたい [7]。

参考文献

[1] 茨木俊秀, “アルゴリズムとデータ構造,” 昭晃堂, 1991.

[2] 小林孝次郎, “計算の複雑さ,” 昭晃堂, 1988.

[3] E.Börger, *Computability, Complexity, Logic*, North-Holland, 1989.

[4] 萩原 斉, 中森 眞理雄, “論理式充足可能性，整数計画，双線形計画,” 情報処理学会研究会報告, 93-AL-35-3 (1993).

[5] 広中平祐編, “現代数理科学事典,” 大阪書籍, 1991. (V. 数理論理学, [2] 論理体系, 2 命題論理, 2-3 標準形の項 (p.322))

[6] OR 事典編集委員会編, “OR 事典,” 日科技連出版社, 1975. (特殊な型の数理計画, 双線形計画の項 (p.183))

[7] Y.Yajima and H.Konno, “An outer approximation method for bilinear programming problems,” 日本 OR 学会 1992 年度春季研究発表会アブストラクト集, pp.228-229 (1992).