アルゴリズム 41−13
（1994. 9. 21）

動的凸包算法の高速化

永井 靖, 太田 有三, 羽根田 博正

神戸大学工学部電子工学科

高次元の凸包問題の動的凸包算法としては、Beneath–Beyonod 定理に基づく Beneath–Beyond 法が提案されている。この方法はすべてのフェイスの情報を利用するため構成するポリトープの次元が高い場合多くの記憶容量を必要とし、その更新のための時間が長くなるという欠点があった。本報告では、高次元の動的凸包算法においてポリトープを表現するのにファセットとサブファセットとその包含関係だけで十分であることを示し、それに基づいた動的凸包算法を提案する。そして、インプリメントにおいて有用ないくつかの結果を導出し、それらに基づいた動的凸包算法を提案している。

A Fast Algorithm for Dynamic Convex Hull Problem

Yasushi Nagai, Yuzo Ohta, and Hiromasa Haneda

Department of Electronics Engineering
Faculty of Engineering, Kobe University

1–1 Rokkodai–Cho, Nada–ku, Kobe City, 657 Japan

The Beneath–Beyond method is well known as one of the dynamic convex hull maintenance methods, which based on Beneath–Beyond Theorem. In case the dimension of the polytop is high, Beneath–Beyond method requires very long computing time and huge storage, because the method needs all faces. The purpose of this paper is to propose a dynamic convex hull maintenance method for high dimensions. This method uses the information of facets and subfacets of the polytope and subsfacets contained by each facet. Moreover, several useful results relating the implementation of the method are derived. An algorithm based on these obatined results is presented.

1 はじめに

凸包問題は計算幾何学で最も基本的な問題であり深く研究されており、コンピュータグラフィックス、画像処理、パターン認識、安定性解析などの分野で幅広く応用されている。凸包算法に関しては、2 次元平面上の凸包について Graham の方法 [2]、Javis の方法 [2] など効率の良いアルゴリズムが多く提案されている。3 次元以上の高次元の凸包算法については Seidel の方法 [6] や Beneath–Beyond 法 [1],[5] などがあるが、2 次元のようにそれほど多く提案されていない。Beneath–Beyond 法ではポリトープをそのすべての次元のフェイスの包含関係を表すハッセ図を用いて表現するため多くの資源を消費し、多数の次元のフェイスを更新するためその更新時間も長くなるという欠点があった。

本報告では高次元の動的凸包算法において、ポリトープを表現するのにすべてのフェイスとその包含関係は必要なく、ファセットとサブファセットとその包含関係だけで十分であることを示し、それに基づいた凸包算法を提案する。

本文では、d 次元ユークリッド空間を $\boldsymbol{R}^d$ で表す。また、ϕ は空集合を表す。$\mathrm{conv}(S)$ は集合 S の凸包を表し、$\mathrm{aff}(S)$ は集合 S のアフィン包を表す。点 p, q の間の閉線分を $[p, q]$ で表し、$]p, q]$, $[p, q[$ および $]p, q[$ はそれぞれ半開線分と開線分を表すものとする。集合 S の内点集合を $\mathrm{int}(S)$ で表し、集合 S の相対内点集合 ($\mathrm{aff}(S)$ における内点集合) を $\mathrm{ri}(S)$ で表す。また、端点集合を $\mathrm{ext}(S)$ で記述する。

2 ポリトープとそのフェイス集合

ここでは、ポリトープとそのフェイス集合について述べるが、その定義は文献 [1] に従うものとする。また、ポリトープ P の k-フェイスからなる集合を $\mathcal{F}_k(P)$ と書く。以下の議論では P を d-ポリトープとし、$p \in \boldsymbol{R}^d$ とする。

次に、以下で必要となるフェイスに関するいくつかの性質を整理しておく

補題 2.1 [4](p34) 任意の $F \in \mathcal{F}_{d-2}(P)$ を含むファセットは 2 つだけであり、このファセットを F_1, F_2 とすると $F = F_1 \cap F_2$ となる。 ◇

補題 2.2 [3](p31) $F \in \mathcal{F}(P)$, $f \subset F$ とするとき、$f \in \mathcal{F}(F) \Leftrightarrow f \in \mathcal{F}(P)$ となる。 ◇

補題 2.3 [3](p33) $\{F_i \mid i \in I\}$ を P のあるフェイスの集合とするとき $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ とすると F もまた P のフェイスとなる。 ◇

補題 2.4 [3](p35) $M \subset P$ とするとき次の二つの条件は等価である。

(I) $P = \mathrm{conv}(M)$

(II) $\mathrm{ext}(P) \subset M$

これより $P = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{f \in \mathcal{F}_k(P)} f\right)$, $d \geq k \geq 0$ と $P = \mathrm{conv}(\mathrm{ext}(P))$ が成り立つ。 ◇

ここでは、まず、いくつかの記号を定義しておく。

定義 2.1 $f \in \mathcal{F}_k(P)$ とする。

$$\begin{aligned} \mathrm{FACET}(f) &\equiv \{F \in \mathcal{F}_{d-1}(P) \mid f \subset F\} \\ \mathrm{SUPPER}(f) &\equiv \{F \in \mathcal{F}_{k+1}(P) \mid f \subset F\} \\ \mathrm{SUB}(f) &\equiv \{F \in \mathcal{F}_{k-1}(P) \mid F \subset f\} \end{aligned}$$ ◇

ポリトープの動的構成とは点が順次追加される場合のポリトープの逐次構成のことである。ポリトープの動的構成における問題はすでに構成されている現在のポリトープ P に新たな点 p が追加されたとき p を含むように更新したポリトープ $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ を構成する問題である。p の追加によって P のフェイスは P^* のフェイスではなくなったり p を含んだ P^* のフェイスが新たに出てきたりする。この点の追加によるポリトープの更新に関して最も基本的な定理が次の定理 2.1 (Beneath–Beyond 定理) である。

まず、点 p とポリトープ P のファセットとの位置関係について次の定義を行い、Beneath–Beyond 定理を示す。

定義 2.2 $F \in \mathcal{F}_{d-1}(P)$ とし、$p \notin P$ とする。$S_-(F)$, $S_+(F)$ を 超平面 $H = \mathrm{aff}(F)$ で分割された開半空間とし、$P \subset S_-(F) \cup H$ とする。 ◇

定理 2.1 (Beneath–Beyond 定理)[1]

$p \notin P$, $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき、次のことが成り立つ。

(I) f^* を P^* の任意のフェイスとする。このとき次の (A), (B) の何れか一方が成り立つ。

(A) $f^* \in \mathcal{F}(P)$

(B) $\exists f \in \mathcal{F}(P)$, $f^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f)$

(II) $f \in \mathcal{F}(P)$ を与える。

(A) $f \in \mathcal{F}(P^*) \Leftrightarrow \exists F \in \mathrm{FACET}(f)$, $p \in S_-(F)$

(B) $f^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \in \mathcal{F}(P^*) \Leftrightarrow$ 次の (a) ~ (c) の何れかが成り立つ。

(a) $\exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f)$, $p \in S_+(F_1)$, $p \in S_-(F_2)$

(b) $p \in \mathrm{aff}(f)$

(c) $p \notin \mathrm{aff}(f)$, $\exists f' \in \mathrm{SUPPER}(f)$, $p \in \mathrm{aff}(f')$, $\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f')$ ◇

定理 2.1 より P の各フェイスの FACET 集合の要素つまり、そのフェイスを含むような P のファセット

と p との位置関係から更新されたポリトープ P^* のフェイスとなる P のフェイス、そうでないフェイス及び P のフェイスより新たに生成される P^* のフェイスすべてがわかる。

これより、各フェイスの FACET 集合の性質によってフェイスを分類し、それにしたがってポリトープの動的構成を行うことを考える。

P のフェイスに次のようにマークをつけることによって分類する。

定義 2.3 **(フェイスの分類)**

f を P のフェイスとする。

(I) f のマークは $\mathbf{ON} \equiv p \in \mathrm{aff}(f)$
$\left(\Leftrightarrow \forall F \in \mathrm{FACET}(f), p \in \mathrm{aff}(F)\right)$

(II) f のマークは $\mathbf{BY}$(beyond)
$\equiv p \notin \mathrm{aff}(f) \wedge \forall F \in \mathrm{FACET}(f), p \notin S_-(F)$

(III) f のマークは $\mathbf{BN}$(beneath)
$\equiv p \notin \mathrm{aff}(f) \wedge \forall F \in \mathrm{FACET}(f), p \notin S_+(F)$

(IV) f のマークは $\mathbf{SPT}$(supporting)
$\equiv \exists F_1,\ F_2 \in \mathrm{FACET}(f),\ p \in S_-(F_1),\ p \in S_+(F_2)$ ◇

点 p とポリトープ P を与えられたとき、$f \in \mathcal{F}(P)$ のマークは ON, BY, BN, SPT のどれか 1 つだけになることは明らかである。また、マークが ON であるフェイスの集合を ON^P で表し、BY, BN, SPT の場合も同様に $\mathrm{BY}^P, \mathrm{BN}^P, \mathrm{SPT}^P$ と書く。さらに、それぞれのマークを持つ k-フェイスの集合を $\mathrm{ON}_k^P, \mathrm{BY}_k^P, \mathrm{BN}_k^P, \mathrm{SPT}_k^P$ で表すことにする。

f を P のフェイス、$f^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ としたとき、f と f^* が P^* のフェイスであるかは f が定義 2.3 のどの類に属しているかに依存する。下の定理 2.2 はその関係を示すものである。定理 2.2 を導くために補題 2.5 を示す。

補題 2.5 $p \notin P, f \in \mathcal{F}(P)$ とする。

(I) $\exists F \in \mathrm{FACET}(f), p \in S_-(F)$
$\Leftrightarrow f \in \mathrm{BN}^P \vee f \in \mathrm{SPT}^P$

(II) $\exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f)\ p \in S_+(F_1), p \in S_-(F_2)$
$\Leftrightarrow f \in \mathrm{SPT}^P$

(III) $p \in \mathrm{aff}(f) \Leftrightarrow f \in \mathrm{ON}^P$

(IV) $p \notin \mathrm{aff}(f), \exists f' \in \mathrm{SUPPER}(f), p \in \mathrm{aff}(f'), \mathrm{conv}(\{p\} \cup f) = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f')$
$\Leftrightarrow f \in \mathrm{BN}^P, \exists f' \in \mathrm{SUPPER}(f), f' \in \mathrm{ON}^P, \mathrm{conv}(\{p\} \cup f) = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f')$ ◇

証明 (I), (II), (III) 定義 2.3 より明らか。

(IV) ($\Rightarrow$)

(A) 定義 2.3 より $f \notin \mathrm{ON}^P, f' \in \mathrm{ON}^P$ 。

(B) $\dim(f) \geqq 1$ の場合 $x \in \mathrm{ri}(f)$ とする。$\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) = \mathrm{conv}(\{p\} \cup f'), f' \in \mathrm{SUPPER}(f)$ より、$]x,p] \cap f' \neq \phi$ であるので $y \in]x,p] \cap f'$ とする。

また $f' \in \mathrm{SUPPER}(f)$ より、ある $F \in \mathrm{FACET}(f)$ が存在して、$F \notin \mathrm{FACET}(f')$ となる。

$y \notin \mathrm{aff}(F), y \in P$ であるので

$y \in S_-(F)$

これと $y \in]x,p]$ より

$p \in S_-(F)$

以上より

$\exists F \in \mathrm{FACET}(f), p \in S_-(F)$

よって、$f \notin \mathrm{BY}^P$。$\dim(f) = 0$ の場合も $x = f$ とすると上と同様に $f \notin \mathrm{BY}^P$ を得ことができる。

(C) $f \in \mathrm{SPT}^P$ であると仮定する。$\dim(f) \geqq 1$ の場合 $x \in \mathrm{ri}(f)$ とする。$f' \in \mathrm{SUPPER}(f)$ より $\mathrm{aff}\{p,\ x\} \cap \mathrm{ri}(f') \neq \phi$ であるので$y \in \mathrm{aff}\{p,\ x\} \cap \mathrm{ri}(f')$ とする。$f \in \mathrm{SPT}^P$ より

$\exists F_1,\ F_2 \in \mathrm{FACET}(f),$
$p \in S_+(F_1),\ p \in S_-(F_2)$

また、$f' \in \mathrm{ON}^P$ より $\forall F \in \mathrm{FACET}(f'), p \in \mathrm{aff}(F)$ であるので

$F_1,\ F_2 \notin \mathrm{FACET}(f')$

つまり、$f' \not\subset F_1, f' \not\subset F_2$ である。さらに $y \in \mathrm{ri}(f')$ つまり $y \in P$ であるので

$y \notin \mathrm{aff}(F_1),\ y \notin \mathrm{aff}(F_2)$

これと $y \in P$ ($\because y \in f', f' \in \mathcal{F}(P)$) より、

$y \in S_-(F_1),\ y \in S_-(F_2)$

$y \in S_-(F_1), p \in S_+(F_1), x \in \mathrm{aff}(F_1)$ ($\because x \in f, F_1 \in \mathrm{FACET}(f)$) であるので直線 $\mathrm{aff}\{p,\ x\}$ 上で y と p は x をはさんで反対側にある。

一方 $y \in S_-(F_2), p \in S_-(F_2), x \in \mathrm{aff}(F_2)$ ($\because x \in f,\ F_2 \in \mathrm{FACET}(f)$) であるので直線 $\mathrm{aff}\{p,\ x\}$ 上で y と p は x に対して同じ側にある。これは、直線 $\mathrm{aff}\{p,\ x\}$ 上で y と p は x をはさんで反対側にあることに矛盾。よって、$f \notin \mathrm{SPT}^P$。$\dim(f) = 0$ の場合も $x = f$ とすると上と同様に $f \notin \mathrm{SPT}^P$ を得ることができる。

(A), (B), (C) より、

$f \notin \mathrm{ON}^P,\ f \notin \mathrm{BY}^P,\ f \notin \mathrm{SPT}^P,\ f' \in \mathrm{ON}^P$

よって、$f \in \mathrm{BN}^P,\ f' \in \mathrm{ON}^P$。

($\Leftarrow$) 定義 2.3 より明らか。 ■

補題 2.5 により 定理 2.1 の f の満たす条件はフェイスの分類 (ON, BY, BN, SPT) を用いて書き直すことができ、定理 2.2 を導くことができる。

定理 2.2 $p \notin P$, $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき、次式が成り立つ。

$\mathcal{F}(P^*) = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$

ただし、

$S_1 = \{f \mid f \in \mathrm{BN}^P \vee f \in \mathrm{SPT}^P\}$

$S_2 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P\}$

$S_3 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{ON}^P\}$

$S_4 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{BN}^P,$
$(\exists f' \in \mathrm{SUPPER}(f),\ f' \in \mathrm{ON}^P)\}$ ◇

$S_4 \subset S_3$, $S_2 \cap S_3 = \phi$, $\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \notin \mathcal{F}(P)$, $f \in \mathcal{F}(P)$ を考慮に入れると 定理 2.2 より 系 2.1 が得られる。

系 2.1 $p \notin P$, $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とし、S_1, S_2, S_3 を 定理 2.2 で定義した集合とするとき、次式が成り立つ。

$\mathcal{F}(P^*) = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

$S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_3 = S_3 \cap S_1 = \phi$ ◇

3 ポリトープの動的算法

この章では、ポリトープの動的構成を行うためにはファセットとサブファセットの集合とその包含関係があれば十分であることを示し、それに基づいた動的凸包算法を提案する。

3.1 k–フェイスの更新

Beneath–Beyond 定理より得られた系 2.1 より、すべての $f \in \mathcal{F}(P)$ のマークが求まれば、更新されたポリトープのフェイス集合を求めることができる。しかし、Beneath–Beyond 定理は各次元フェイスがどのような次元フェイスより生成されるかについて、はっきりと述べていない。

そこで、$p \notin P$, $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とした時の P^* の k–フェイスに着目し、その k–フェイス集合の構成について考える。

補題 3.1 $p \notin P$ とし、$P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k(P^*) = &\{F \mid F \in \mathrm{BN}_k^P \ \vee\ F \in \mathrm{SPT}_k^P\}\\ &\cup \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}_{k-1}^P\}\\ &\cup \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}_k^P\}\end{aligned} \tag{3.1}$$

◇

証明 系 2.1 より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k(P^*) &= \{f \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \mid \dim(f) = k\}\\ &= \overline{S}_1 \cup \overline{S}_2 \cup \overline{S}_3\end{aligned}$$

$\overline{S}_1 = \{f \in S_1 \mid \dim(f) = k\}$

$\overline{S}_2 = \{f \in S_2 \mid \dim(f) = k\}$

$\overline{S}_3 = \{f \in S_3 \mid \dim(f) = k\}$

(I) $\overline{S}_1 = \{F \mid (F \in \mathrm{BN}^P \vee F \in \mathrm{SPT}^P), \dim(F) = k\}$ である。

$(F \in \mathrm{BN}^P \ \vee\ F \in \mathrm{SPT}^P), \dim(F) = k$

$\Leftrightarrow F \in \mathrm{BN}_k^P \vee F \in \mathrm{SPT}_k^P$

$\therefore \overline{S}_1 = \{F \mid F \in \mathrm{BN}_k^P \vee F \in \mathrm{SPT}_k^P\}$

(II) $\overline{S}_2 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P, \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup f)) = k\}$ である。

$f \in \mathrm{SPT}^P$, $\dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup f)) = k$

$\Leftrightarrow f \in \mathrm{SPT}^P$, $\dim(f) = k - 1$

$\left(\begin{array}{l}\because f \in \mathrm{SPT}^P \text{ より } p \notin \mathrm{aff}(f) \text{ なので}\\ \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup f)) = \dim(f) + 1 \text{ よって}\\ \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup f)) = k \Leftrightarrow \dim(f) = k-1\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow f \in \mathrm{SPT}_{k-1}^P$

$\therefore \overline{S}_2 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}_{k-1}^P\}$

(III) $\overline{S}_3 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}^P, \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) = k\}$ である。

$F \in \mathrm{ON}^P$, $\dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) = k$

$\Leftrightarrow F \in \mathrm{ON}^P$, $\dim(F) = k$

$\left(\begin{array}{l}\because F \in \mathrm{ON}^P \text{ より } p \in \mathrm{aff}(F) \text{ なので}\\ \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) = \dim(F) \text{ よって}\\ \dim(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) = k \Leftrightarrow \dim(F) = k\end{array}\right)$

$\Leftrightarrow F \in \mathrm{ON}_k^P$

$\therefore \overline{S}_3 = \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}_k^P\}$ ■

補題 3.1 より $\mathcal{F}_k(P)$, $\mathcal{F}_{k-1}(P)$ がわかっており、それぞれのフェイスに点 p との位置関係よりマークをつけることができれば $\mathcal{F}_k(P^*)$ を得ることができる。

しかし、点を次々に加えてポリトープを更新する場合 $k-1$–フェイスも更新しなければならず、このためにはさらに $k-2$–フェイスの更新も必要となり次々と下の次元のフェイスが必要となる。ただし、-1–フェイスは点を加えることによって変化しない。

さらに、フェイスのマークを決定するにはそのフェイスを含むファセットが必要があるためファセット集合の更新が必要である。つまり、Beneath–Beyond 法によるポリトープの動的な構成には $d-1$–フェイスから -1–フェイスまでのすべての次元のフェイス集合と各フェイスとファセットとの包含関係が必要であるといえる。

以下では、k-フェイスを更新する場合 $k-1$-フェイスより下の次元のフェイスを利用せずポリトープの更新を行うことを考える。下の次元のフェイスの情報がないため式 (3.1) の右辺の 2, 3 項目の集合に現れている凸包を求める計算が問題となってくる。

各フェイス F はポリトープであり $p \notin \mathrm{aff}(F)$ である場合 $\mathrm{ext}(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) = \{p\} \cup \mathrm{ext}(F)$ であるのでポリトープを端点集合で表すことによって容易にその凸包を求めることができる。これによって 2 項目の集合は容易に求めることができる。しかし、3 項目の場合 $p \in \mathrm{aff}(F)$ であるため $\mathrm{ext}(\mathrm{conv}(\{p\} \cup F)) \neq \{p\} \cup \mathrm{ext}(F)$ となり端点集合の和集合をとるだけでは凸包を求めることにはならない。

次に、各 $k-1$-フェイスが端点集合として与えられた場合 3 項目の集合を求めるのに必要な補題を 2 つ示す。

補題 3.2 $F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}$, とするとき次式が成り立つ。

$$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2} \Leftrightarrow f \subset F,\ f \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \qquad \diamond$$

証明 ($\Rightarrow$) 背理法を用いる

$$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2} \wedge \left(f \not\subset F \vee f \notin \mathrm{BN}^P_{d-2}\right) \tag{3.2}$$

と仮定する。定義 2.3 より式 (3.2) は次のように書き直すことができる。

$$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2} \wedge \Big(f \not\subset F \vee p \in \mathrm{aff}(f) \vee \exists F_1 \in \mathrm{FACET}(f):\ p \in S_+(F_1)\Big) \tag{3.3}$$

(I) $f \not\subset F$ である場合、$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}$ に矛盾。

(II) $p \in \mathrm{aff}(f)$ である場合、 $f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}$ より $p \notin \mathrm{aff}(f)$ であるので、矛盾。

(III) $\exists F_1 \in \mathrm{FACET}(f):\ p \in S_+(F_1)$
である場合、$f \subset F_1$, $f \subset F$ より $\mathrm{aff}(f) \subset \mathrm{aff}(F_1)$, $\mathrm{aff}(f) \subset \mathrm{aff}(F)$ であるので

$$\mathrm{aff}(f) \subset \mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F)$$

また、$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}$ より $\dim(f) = d-2$ であり $\dim(\mathrm{aff}(f)) \leq \dim(\mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F)) \leq d-2$ であるので $\dim(\mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F)) = d-2$。よって

$$\mathrm{aff}(f) = \mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F)$$

$p \in S_+(F_1)$ より $\mathrm{aff}(F)$ において $P \cap \mathrm{aff}(F) = F$ と $p \cap \mathrm{aff}(F)$ は $\mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F) = \mathrm{aff}(f)$ を境に反対側にある。また、$f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}$ より $\mathrm{aff}(F)$ において F と p は $\mathrm{aff}(f)$ に対して、同じ側にあるので矛盾。

(I), (II), (III) より式 (3.3) は矛盾。

($\Leftarrow$) $f \in \mathrm{BN}^P_{d-2}$ より

$$\exists F_1 \in \mathrm{BN}^P_{d-1},\ f \subset F_1 \tag{3.4}$$

$f \subset F_1$, $f \subset F$ より $\mathrm{aff}(f) \subset \mathrm{aff}(F_1)$, $\mathrm{aff}(f) \subset \mathrm{aff}(F)$ であるので上と同様にして、

$$\mathrm{aff}(f) = \mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F)$$

式 (3.4) より P と p は $\mathrm{aff}(F_1)$ の同じ側にある。よって $F \cap \mathrm{aff}(F) = F$, $p \cap \mathrm{aff}(F) = p$, $\mathrm{aff}(F_1) \cap \mathrm{aff}(F) = \mathrm{aff}(f)$ であるので F と p は $\mathrm{aff}(F)$ において $\mathrm{aff}(f)$ に対して同じ側にある。よって、定義 2.3 より $f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}$。 ■

補題 3.3 $p \notin P, p \in \mathrm{aff}(P)$, $P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とする時

$$P^* = \mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right)\right) \tag{3.5}$$

$\diamond$

証明

(I) $d=1$ の場合 P は線分であるので明らか。

(II) $d=k$ で式 (3.5) が成り立つとし、$d=k+1$ の場合を考える。

$$\begin{aligned}
P^* &= \mathrm{conv}\left(\bigcup_{F^* \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*)} F^*\right) \quad (\because \text{補題 } 2.4)\\
&= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right) \cup \left(\bigcup_{f \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}} \mathrm{conv}(\{p\} \cup f)\right) \cup \left(\bigcup_{F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}} \mathrm{conv}(\{p\} \cup F)\right)\right) \quad (\because \text{補題 } 3.1)\\
&= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right) \cup \{p\} \cup \left(\bigcup_{f \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}} f\right) \cup \left(\bigcup_{F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}} \mathrm{conv}(\{p\} \cup F)\right)\right)\\
&= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right) \cup \left(\bigcup_{F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}} \mathrm{conv}(\{p\} \cup F)\right)\right)\\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because \{p\} \subset \mathrm{conv}(\{p\} \cup F) \\ \quad f \in \mathrm{SPT}^P_{d-2} \Rightarrow \exists F \in \mathrm{BN}^P_{d-1},\ f \subset F \end{array}\right)\\
&= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right) \cup \left(\bigcup_{F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}} \mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}} f\right)\right)\right)\right)\\
&\quad (\because d-2=k,\ \text{式}\,(3.5))\\
&= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right) \cup \{p\} \cup \left(\bigcup_{\substack{F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}\\ f \in \mathrm{BN}^F_{d-2}}} f\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{conv}\left(\left(\bigcup_{F\in \mathrm{BN}^P} F\right) \cup \{p\} \cup \left(\bigcup_{\substack{F\in \mathrm{ON}^P_{d-1}\\ f\subset F\\ f\in \mathrm{BN}^P_{d-2}}} f\right)\right)$$

$(\because$ 補題 3.2)

$$= \mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{F\in \mathrm{BN}^P_{d-1}} F\right)\right)$$

$$\left(\because f \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \Rightarrow \exists F \in \mathrm{BN}^P_{d-1},\ f \subset F\right)$$

となり $d = k+1$ の場合も成り立つ。(I), (II) より帰納的に式 (3.5) が成り立つ。 ■

補題 3.3 より

$$\left\{\mathrm{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}^P_k\right\} = \left\{\mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{f\in \mathrm{BN}^F_{k-1}} f\right)\right) \middle| F \in \mathrm{ON}^P_k\right\}$$

補題 3.2より

$$= \left\{\mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{\substack{f\subset F\\ f\in \mathrm{BN}^P_{k-1}}} f\right)\right) \middle| F \in \mathrm{ON}^P_k\right\}$$

であるので補題 2.5 より次の定理 3.1 が得られる。

定理 3.1 $p \notin P$ とし、$P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}_k(P^*) = \{F \mid F \in \mathrm{BN}^P_k \ \vee \ F \in \mathrm{SPT}^P_k\} \cup \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P_{k-1}\} \cup \left\{\mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{\substack{f\subset F\\ f\in \mathrm{BN}^P_{k-1}}} f\right)\right) \middle| F \in \mathrm{ON}^P_k\right\}$$ ◇

この定理 3.1 よりマークが ON である k–フェイスと点 p との凸包はマークが BN である $k-1$–フェイスとの凸包に置き換えられ、マークが BN であるフェイス f は $p \notin \mathrm{aff}(f)$ であるので $k-1$–フェイスを端点集合とし、k–フェイスとその包含関係があれば P^* の k–フェイス集合を得ることができる。

3.2 ファセット集合の更新

定理 3.1 より、 $k, k-1$–フェイスのマークが求まれば、k–フェイスの更新ができる。定義 2.3 よりフェイスのマークを求めるにはその FACET 集合が必要である。従ってファセットの更新を行う必要がある。また、このためにはファセットとサブファセットのマークを決定する必要がある。

まずファセットのマークはその法線ベクトルと点との関係より容易に求めることができる。また、ファセットを含むファセットはそのファセットだけであるため定義より明らかにファセットのマークは SPT とはならない、つまり、ファセットのマークは BY, ON, BN の何れか一つになる。さらに、ファセット F のマークは p との位置関係より次の様に求まる。

(I) $F \in \mathrm{BY} \Leftrightarrow p \in S_+(F)$

(II) $F \in \mathrm{ON} \Leftrightarrow p \in \mathrm{aff}(F)$

(III) $F \in \mathrm{BN} \Leftrightarrow p \in S_-(F)$

補題 2.1 より一つのサブファセットを含むファセットは 2 つだけであるのでサブファセットのマークはそれを含む 2 つのファセットと点 p との位置関係より求まる。よって、定義 2.3より容易に次の定理を導くことができる。

定理 3.2 $f \in \mathcal{F}_{d-2}(P), p \in \mathrm{aff}(P), p \notin P$ とする。

(I) $f \in \mathrm{ON}^P \Leftrightarrow \exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f),$
$F_1, F_2 \in \mathrm{ON}^P_{d-1}$

(II) $f \in \mathrm{BY}^P \Leftrightarrow \exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f),$
$(F_1 \in \mathrm{BY}^P_{d-1}, F_2 \in \mathrm{BY}^P_{d-1}) \vee (F_1 \in \mathrm{BY}^P_{d-1}, F_2 \in \mathrm{ON}^P_{d-1})$

(III) $f \in \mathrm{BN}^P \Leftrightarrow \exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f),$
$(F_1 \in \mathrm{BN}^P_{d-1}, F_2 \in \mathrm{BN}^P_{d-1}) \vee (F_1 \in \mathrm{BN}^P_{d-1}, F_2 \in \mathrm{ON}^P_{d-1})$

(IV) $f \in \mathrm{SPT}^P \Leftrightarrow \exists F_1, F_2 \in \mathrm{FACET}(f),$
$F_1 \in \mathrm{BY}^P_{d-1}, F_2 \in \mathrm{BN}^P_{d-1}$ ◇

ファセットのマークは SPT になることはないので定理 3.1 より、系 3.1を得ることができる。

系 3.1 $p \notin P$ とし、$P^* = \mathrm{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき次式が成り立つ。

$$\mathcal{F}_{d-1}(P^*) = \{F \mid F \in \mathrm{BN}^P_{d-1}\} \cup \{\mathrm{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}\} \cup \left\{\mathrm{conv}\left(\{p\} \cup \left(\bigcup_{\substack{f\subset F\\ f\in \mathrm{BN}^P_{d-2}}} f\right)\right) \middle| F \in \mathrm{ON}^P_{d-1}\right\}$$ ◇

3.3 サブファセット集合の更新

補題 2.1よりポリトープのサブファセットはある 2 つのファセットの共通部分として得られる。つまり、サブファセットがどの様なファセットの共通部分となるかがわかれば系 3.1 より得られたファセット集合よりサブファセット集合の更新を行うことができ、サブファセットより次元の低いフェイスの情報を利用せずにすむ。

次に、ポリトープ P のサブファセットは P のファセットのどの様な共通部分となるのかを示す。

補題 3.4

$$\mathcal{F}_{d-2}(P) = \{F_1 \cap F_2 \mid F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P),\ \dim(F_1 \cup F_2) = d-2\} \tag{3.6}$$ ◇

証明

(I) $f \in \{F_1 \cap F_2 \mid F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}$ とすると補題 2.3 と $\dim(F_1 \cap F_2) = d-2$ より $f \in \mathcal{F}_{d-2}(P)$ であるので

$$\mathcal{F}_{d-2}(P) \supset \{F_1 \cap F_2 \mid F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cup F_2) = d-2\} \tag{3.7}$$

(II) $f \in \mathcal{F}_{d-2}(P)$ とすると補題 2.1 と $\dim(f) = d-2$ より

$$f \in \{F_1 \cap F_2 \mid F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cup F_2) = d-2\}$$

よって

$$\mathcal{F}_{d-2}(P) \subset \{F_1 \cap F_2 \mid F_1,\ F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cup F_2) = d-2\} \tag{3.8}$$

式 (3.7), (3.8) より 式 (3.6) が成り立つ。 ∎

この補題 3.4 を用いると P^* のファセット集合より P^* のサブファセット集合を得ることができるが定理 3.1 より、点 p をポリトープ P に加えてもマークが BN と SPT である $d-2$–フェイスは P^* のサブファセットになることがわかっており、この様に容易にわかる P^* のサブファセットを重複して求めるのは無駄である。そこで、新しく生成される P^* のサブファセットはどの様な P^* のファセットの共通部分より得られるかについて次に示す。

定理 3.3 $p \in \mathsf{aff}(P), p \notin P, P^* = \mathsf{conv}(\{p\} \cup P)$ とするとき次式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{d-2}(P^*)\\ &= \{f \mid f \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \vee f \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}\}\\ &\quad \cup \{F_1 \cap F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\\ &\quad F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\} \quad \diamond\end{aligned}$$

証明 補題 3.1 より

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{d-2}(P^*) &= \{F \mid F \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \vee F \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}\}\\ &\cup \{\mathsf{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P_{d-3}\}\\ &\cup \left\{\mathsf{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}^{P,p}_{d-2}\right\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

式 (3.9) の右辺の後ろの 2 項の要素はは明らかに P^* のサブファセットである。補題 2.1 よりサブファセットの共通部分として得られることとその次元を考慮すると次式が得られる。

$$\begin{aligned}&\{F_1 \cap F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\\ &\quad F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}\\ &\quad \supset \{\mathsf{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P_{d-3}\}\\ &\quad\quad \cup \{\mathsf{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}^P_{d-2}\}\end{aligned} \tag{3.10}$$

式 (3.10) の左辺の要素は補題 2.3 より P^* のサブファセットとなるので

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{d-2}(P^*) \supset \{F_1 \cap F_2 \mid\\ &\quad F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\ F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P),\\ &\quad \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}\end{aligned} \tag{3.11}$$

以上より $\mathcal{F}_{d-2}(P^*)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{d-2}(P^*)\\ &= \mathcal{F}_{d-2}(P^*) \cup \{F_1 \cap F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\\ &\quad F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}\\ &\quad (\because \text{式 (3.11)})\\ &= \{F \mid F \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \vee F \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}\}\\ &\quad \cup \{\mathsf{conv}(\{p\} \cup f) \mid f \in \mathrm{SPT}^P_{d-3}\}\\ &\quad \cup \{\mathsf{conv}(\{p\} \cup F) \mid F \in \mathrm{ON}^P_{d-2}\}\\ &\quad \cup \{F_1 \cap F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\\ &\quad F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}\\ &\quad (\because \text{式 (3.9)})\\ &= \{F \mid F \in \mathrm{BN}^P_{d-2} \vee F \in \mathrm{SPT}^P_{d-2}\}\\ &\quad \cup \{F_1 \cap F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}_{d-1}(P^*),\\ &\quad F_1, F_2 \notin \mathcal{F}_{d-1}(P), \dim(F_1 \cap F_2) = d-2\}\\ &\quad (\because \text{式 (3.10)})\end{aligned}$$

∎

3.4 データ構造とアルゴリズム

まず、ポリトープ P のファセットのデータはその法線ベクトルと SUB 集合つまりそのファセットが含んでいるサブファセットの集合を持つものとする。次に、サブファセットのデータはその端点集合を持つものとする。そして、ファセット集合、サブファセット集合はそれぞれのリストで表現することにする。これらをあわせてポリトープのデータとする。

系 3.1 と 定理 3.3 より次のアルゴリズムによってポリトープ $P^* = \mathsf{conv}(\{p\} \cup P)$ を得ることができる。

アルゴリズム

(I) 定理 3.2に従い P のすべてのファセット、サブファセットにマークをつける。

(II) マークが BY であるファセットを消す。もしそのファセットが SPT であるサブファセットを含んでいたならそのサブファセットと点 p を含む新しいファセットを生成する。

(III) マークが ON であるファセットを消す。そのファセットが含む BN であるサブファセットと 点 p を含む新しいファセットを生成する。

(IV) マークが BY,ON であるサブファセットを消す。

(V) 新しいファセットのすべての組み合わせの共通部分をとり、その次元がサブファセットの次元と

なったものを求めるのに用いた 2 つのファセットに含まれる新しいサブファセットとする。 ◇

ポリトープ P の端点数、ファセット数を V, F とするとこれらの間に次の 2 式が成り立つ [4](p188,p35)。

$$F \leqq V + d - 1 \tag{3.12}$$

$$V \geqq d + 1 \tag{3.13}$$

式 (3.12), (3.13) より

$$F \leqq 2V - 2 \tag{3.14}$$

P のサブファセット数を f とし、各ファセット F_k の端点数、ファセット数を v_k, f_k とする。補題 2.1 より $\sum_{k=1}^{F} f_k = 2f$ であることと F_k は $d-1$-ポリトープであることに注意すると式 (3.14) より

$$f \leqq \sum_{k=1}^{F} v_k - F \tag{3.15}$$

さらに、$v_k < V$ であるので式 (3.14), (3.15) より

$$f \leqq 2(V-1)^2 \tag{3.16}$$

式 (3.12), (3.16) より F は $O(V)$、f は $O(V^2)$ であるので本手法で必要となるデータ量は $O(V^2)$ となる。特に、フェイスが縮退していない場合 $v_k = d$ となるため式 (3.14), (3.15) より $O(f) \leqq O(Vd)$ となる。

次に本手法の手数について考える。$\boldsymbol{R}^d$ における内積は $O(d)$ で、ファセットの端点集合からその法線ベクトルは $O(d^3)$ で求めることが出来る。端点集合の次元は $O(d^3)$ で調べることが出来る。ここで、$F_{\mathrm{BY}}, F_{\mathrm{ON}}$ はマークが BY, ON であるファセットの数、$f_{\mathrm{SPT}}, f_{\mathrm{BY}}, f_{\mathrm{ON}}$ はマークが SPT, BY, ON であるサブファセットの数とする。さらに、v_i をマークが ON であるファセット F_i の端点数、$f_{\mathrm{BN}i}$ を F_i に含まれるマークが BN であるサブファセットの数、v_j を F_i に含まれるマークが BN であるサブファセット f_j の端点数とし、$\overline{v}_i, \overline{v}_j$ は新しく生成されたファセット $\overline{F}_i, \overline{F}_j$ の端点数とする。$\overline{F}$ は新しく生成されたファセットの数とする。このとき本手法の手数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&O(Fd+2f)+O(F_{\mathrm{BY}}+f_{\mathrm{SPT}}d^3) \\
&\quad +O\Big(\sum_{i=1}^{F_{\mathrm{ON}}}\sum_{j=1}^{f_{\mathrm{BN}i}} v_j \log v_i + F_{\mathrm{ON}}d^3\Big) \\
&\quad +O(f_{\mathrm{BY}}+f_{\mathrm{ON}})+O\Big(\sum_{i=1}^{\overline{F}}\sum_{j=1}^{\overline{F}}(\overline{v}_i \log \overline{v}_j + d^3)\Big) \\
&= O\Big(f+\sum_{i=1}^{F_{\mathrm{ON}}}\sum_{j=1}^{f_{\mathrm{BN}i}} v_j \log v_i + \sum_{i=1}^{\overline{F}}\sum_{j=1}^{\overline{F}} \overline{v}_i \log \overline{v}_j + \overline{F}^2 d^3\Big) \qquad (3.17) \\
&\Big(\because d \leqq f_k \text{ より } Fd \leqq \sum_{k=1}^{F} f_k \leqq f\text{、}F_{\mathrm{ON}} + f_{\mathrm{SPT}} = \overline{F}\Big) \\
&\leqq O(V^3 \log V + V^2 d^3) \\
&\left(\begin{array}{l} \because\ O(F) \leqq O(V),\ O(f) \leqq O(V^2), \\ \sum_{i=1}^{F_{\mathrm{ON}}} f_{\mathrm{BN}i} \leqq f,\ d, v_i, v_j, \overline{v}_i, \overline{v}_j \leqq V,\ \overline{F} \leqq F \end{array}\right)
\end{aligned}$$

これに対し、Beneath–Beyond 法は $O(V \log V + V^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor})$ で計算でき、必要なデータ量は $O(V^{\lfloor d/2 \rfloor})$ であり、本手法は高次元の動的凸包算法においてデータ量、計算時間ともに改善できたといえる。

次に、P が縮退したファセットを持たない場合を考えると $O(F) \leqq O(V)$, $O(f) \leqq O(Vd)$, $v_i, v_j, \overline{v}_i, \overline{v}_j \leqq d$, $f_{\mathrm{BN}i} \leqq d$, $F_{\mathrm{ON}} \leqq \overline{F}$ となるので $O(\overline{F}^2 d^3)$ で計算できるといえる。

縮退の起こらない場合の凸包問題の解法として Seidel の方法 [6] がある。Seidel の方法は d を定数とすると $O(V^2 + F \log V)$ で計算できるが、静的な凸法算法であるので本手法との比較は難しい。

4 おわりに

本報告では Beneath–Beyond 定理に従ってポリトープの動的構成を行う場合一つの次元のフェイス集合はその次元と一つ下の次元のフェイスが必要であることを示た。さらに、サブファセットは 2 つのファセットの共通部分となることを利用するとポリトープの動的構成を行うためにはファセットとサブファセットの集合とその包含関係があれば十分であることを示し、それに従ったアルゴリズムを提案した。本手法は従来のようにポリトープをすべての次元のフェイスの情報とその包含関係を表すハッセ図で表現するのに比べ必要なフェイスの数が少ないため、使用する資源が少ない。さらに、更新する必要のある情報も少ないのでポリトープの更新の速度の改善も期待できる。

参考文献

[1] 龔 太田, 羽根田 : “Beneath–Beyond 定理の改良と動的凸包算法”, 電子情報通信学会 COMP 90–33(1990)

[2] F. P. Preparate and M. I. shamos : “Computational Geometry : An Introduction” , New York, Springer–Verlag, 1985

[3] A. Brondsted : “An Introduction to Convex Polytopes” , New York, Springer–Verlag, 1983

[4] B. Grunbaum : “Convex Polytopes” , London, Wiley, 1967

[5] H. Edelsbrunner : “Algorithms in Combinatorial Geometry” , Berlin Heidelberg, Springer–Verlag, 1987

[6] R.Seidel : “Higher–Dimensional Convex Hulls at Logarithmic Cost per Face” , Proc. 18th ACM STOC, pp.404∼413 (1986)