

グラフの指定点3点連結化問題に対する解法

間島利也 渡邊敏正

広島大学工学部 第二類 回路システム工学講座

〒739 東広島市鏡山一丁目4-1

(電話) 0824-24-7662(渡邊)

(ファクシミリ) 0824-22-7195

(電子メール) watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

概要: 指定点3点連結化問題(3VCA-SV)とは、無向グラフ $G = (V, E)$ と指定点集合 $S \subseteq V$ が与えられたときに、 G に辺を付加することにより、どの2点を除去しても S の全ての点が1つの連結成分に含まれるようなグラフとなる最小の付加辺集合を求める問題である。本稿では、 G が2点連結である場合の3VCA-SV に対する線形時間アルゴリズムを示す。

Solving the 3-Vertex-Connectivity Augmentation Problem for Specified Set of Vertices of a Graph

Toshiya Mashima and Toshimasa Watanabe

Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University

4-1, Kagamiyama 1-chome, Higashi-Hiroshima, 739 Japan

Phone: +81-824-24-7662(Watanabe)

Facsimile: +81-824-22-7195

E-mail: watanabe@huis.hiroshima-u.ac.jp

Abstract: The 3-Vertex-Connectivity Augmentation problem for Specified set of Vertices (3VCA-SV) is defined as follows: Given an undirected graph $G = (V, E)$ and a specified set of vertices $S \subseteq V$, find a smallest set of edges to be added to G so that the resulting graph may have the property that, even after deleting any two vertices from it, all vertices in S are contained in one connected component. This paper proposes a linear time algorithm for solving 3VCA-SV where G is 2-vertex-connected.

1 はじめに

指定点3点連結化問題(3VCA-SV)とは、無向グラフ $G = (V, E)$ と指定点集合 $S \subseteq V$ が与えられたときに、 G に辺を付加することにより、どの2点を除去しても S の全ての点が1つの連結成分に含まれるようなグラフとなる最小の付加辺集合を求める問題である。本稿では、 G が2点連結グラフである場合の3VCA-SV に対する線形時間アルゴリズムを示す。 G が任意のグラフの場合の解法は稿を改めて報告する予定である。

グラフの指定点集合 S に関する点連結度 $\kappa(G, S)$ とは、無向グラフ $G = (V, E)$ と指定点集合 $S \subseteq V$ が与えられたときに、 G から点を除去することにより、 S が連結でなくなるかまたはグラフが1点だけになるような、除去すべき最小の点数である。ここで指定点集合 S が連結であるとは、全ての指定点 (S に属する点を指定点と呼ぶ) が1

つの連結成分に含まれることを意味する。 $S=V$ のときの $\kappa(G, S)$ が、いわゆるグラフの点連結度である。

グラフ G と指定点集合 S が与えられたときに、「グラフの指定点集合に関する点連結度が k 以上である」ことを達成すべき所望の性質とする辺付加問題を指定点 k 点連結化問題 (k VCA-SV) という。 $S=V$ の場合の k VCA-SV を単に k 点連結化問題 (k VCA) という。さらに拡張された問題として、付加する辺にコストが付いており、コスト総和最小の付加辺集合を求めるような k VCA も考えられ、これを W - k VCA と表す。

G が $E = \emptyset$ なるグラフの場合に、[1] で $k=2$ の場合、[16] で $k \geq 2$ の場合について、[4] で $k=2$ 且つ G が木の場合の、 W - k VCA の NP-完全性が示されている。 k VCA については $k \leq 4$ の場合しか最適解法は知られていない。これまでのところ、 $k > 4$ の場合の k VCA は未解決問題であり、その多項式時間可解性、NP-完全性につ

いては不明である。2VCA に対しては, [1] で最適解法が示され, [9, 12] でその線形時間アルゴリズムが提案されている。3VCA については, [17] で多項式時間アルゴリズムが示され, その後 [9] で線形時間アルゴリズムが示されている。4VCA については, G が 3 点連結グラフの場合の多項式時間アルゴリズムが [6] で, 最近, 一般の 4VCA に対する多項式時間アルゴリズムが [7] で提案されている。 $k \geq 5$ については, グラフの点連結度を k から $k+1$ に上げる場合に最適解の辺数より高々 $k-2$ 本多い近似解を生成する近似解法 [10] が知られている。一方, k VCA-SV に関しては, 2VCA-SV が 2VCA に帰着することにより解けることが [15] で述べられているのみである。

2 諸定義

特に必要と思われる用語の定義のみを述べる。以下で定義されない用語等は [2, 13] を参照されたい。無向グラフ $G = (V, E)$ は, 有限な空でない点集合 V と辺集合 E とからなる。 V, E をそれぞれ $V(G), E(G)$ と表すこともある。特に断らない限り, グラフは多重辺及び自己閉路をもたないものとする。 2 点 u, v を両端点とする辺を (u, v) と表す。 G における点 v の次数を, $d_G(v)$ と表す。 G に辺集合 E' (それぞれ, 辺 e) を付加して得られるグラフを $G + E'$ ($G + e$), G から点集合 V' (点 v) を除去して得られるグラフを $G - V'$ ($G - v$) と表す。 $S \subseteq V$ に対して, $E_S = \{(u, v) \in E \mid u, v \in S\}$ を辺集合とするグラフを S により誘導される G の部分グラフと呼ぶ。 k 点連結グラフ ($k \geq 2$) とは, $k+1$ 個以上の点をもつ連結グラフで, どの $k-1$ 点を除去した後でもなお連結であるものである。

無向グラフ $G = (V, E)$ ($|V| \geq 4$) の指定点集合を $S \subseteq V$ ($4 \geq |S| \geq |V|$) とする。 G からどの 2 点を除去しても残った S の全ての点が 1 つの連結成分に含まれることを G は S に関して指定点 3 点連結であるという。

以下では, G は (特に断らない限り) 2 点連結グラフであると仮定する。 G からそれらを除去するとグラフが連結でなくなるような点対を G のカットペアと呼ぶ。 K を G のカットペアとすると, $G - K$ の連結成分を K 成分と呼び, S の点を含む K 成分の数を $b(K; S)$ と表す (必要ならば G を明らかにするため $b_G(K; S)$ と表すこともある)。 $b(K; S) \geq 2$ ならば K を S を分離するカットペアと呼ぶ。 S の点を含まない K 成分を K の付属成分という。

$G = (V, E)$ の点集合 $X \subseteq V$ に対して, $\Gamma(X, G) = \{v \in V \setminus X \mid \text{ある点 } u \in X \text{ に対して } (u, v) \in E\}$ を X の近傍と呼び, $V \setminus (X \cup \Gamma(X, G))$ を X^* で表す。ここで $V \setminus X = \{v \in V \mid v \notin X\}$ である。 G が文脈より明らかなき場合は $\Gamma(X, G)$ を単に $\Gamma(X)$ と表すこともある。また, $X = \{v\}$ のときは $\Gamma(v, G)$ と表す。

3 2点連結グラフに対する 3VCA-SV の解法

$G = (V, E)$ を $|V| \geq 4$ なる無向グラフ, $S \subseteq V$ をその指定点集合とし, G は S に関して指定点 3 点連結でないとは仮定する。ここでは, G が 2 点連結グラフである場合の 3VCA-SV の解法を述べる。

3.1 下限値

X を V の部分集合とする。 $|\Gamma(X)| = 2$ 且つ $X \cap S \neq \emptyset$ 且つ $X^* \cap S \neq \emptyset$ を満たす $X \subset V$ を (S に関する) 2-タイト集合 (2-tight set) という。以下では, これを単に (S に関する) 2TS と表記する。今, G は 2 点連結グラフを仮定しているため, 2TS X の近傍 $\Gamma(X)$ は S を分離するカットペアである。もし G に 2TS X が存在するならば, G を S に関して指定点 3 点連結にするためには, X の点を端点とする辺を少なくとも 1 本は付加する必要がある。 2TS のうち, その真部分集合として 2TS を含まないものを極小 2TS という。また, 極小 2TS 中の指定点をその基点と呼ぶ。 図 1 にその例を示す。

注 3.1 X が極小 2TS ならば, $K \subseteq X \cup \Gamma(X)$ 且つ $K \neq \Gamma(X)$ なる G の任意のカットペア K に対して, K は S の 2 点を分離することはなく, 且つ K の全ての付属成分は X に含まれることに注意されたい。

与えられた S に対して, G の全ての (S に関する) 極小 2TS の集合を $T_S(G)$ と表し, G の極小 2TS 族と呼ぶ。 G や S が明らかなき場合は, $T(G)$ あるいは単に T と表すこともある。点集合 $H \subseteq V$ が, $T_S(G)$ の任意の極小 2TS と空でない共通部分をもつならば, H は $T_S(G)$ の被覆と呼ばれ, $|H|$ をその被覆数という。

$$f(G, S) = \min\{|H| \mid H \text{ は } T_S(G) \text{ の被覆}\}$$

とする。

S を分離する G のカットペアの集合を $\mathcal{K}_S(G)$ と表す。

$$b(G, S) = \max\{b(K; S) \mid K \in \mathcal{K}_S(G)\},$$

$$m(G, S) = \max\{b(G, S) - 1, f(G, S)/2\}$$

とおく。

補題 3.1 (1) G が S に関して指定点 3 点連結であるための必要十分条件は $m(G, S) = 0$ となることである。

(2) $m(G, S) \geq 1$ ならば G に辺を付加して S に関して指定点 3 点連結にするには, 少なくとも $m(G, S)$ 本の辺を付加しなければならない。

3.2 3成分と3ブロックグラフ

ここでは, 3 連結成分 (triconnected components [5, 14]) について説明する。以下では単に 3 成分と呼ぶ。 3 成分とは 2 点連結グラフからカットペアに関する split, merge なる分解, 統合操作により得られるグラフである。例えば, 図 1 のグラフの 3 成分は図 2 となる。 3 成分には 3 点連結グラフ, 多角形, ボンド (2 点とその間の 3 本以上の多重辺からなるグラフ) の 3 種類がある。この分解操作の詳細については [5, 14] を参照されたい。

G からの 3 成分抽出後に残っているカットペア (厳密には, 3 点連結グラフ同士に, 多角形同士に, あるいは 3 点連結グラフと多角形にそれぞれ共有されるカットペア) を I 型のカットペア, 多角形の非隣接対となっているカットペアを II 型のカットペアと呼ぶ。 G の全てのカットペアは I 型か II 型のいずれかである。

G の 3 ブロックグラフ 3-blk(G) とは, G のカットペアと 3 成分の位置関係を明確に表現したものであり, [8] で 3VCA の線形時間アルゴリズムに用いられた。本稿で示すアルゴリズムも 3-blk(G) を利用する。 図 3 に図 1 のグラフの 3-blk(G) を示す。

3-blk(G) は次のように作られる。 I 型の各カットペアに対して σ 点を 1 個, 各多角形に対して π 点を 1 個, 各 3 点連結グラフに対して β 点を 1 個それぞれ新しい点として置く。更に, $d_G(w) = 2$ なる各点 w に対して β 点を 1 個,

その w の 2 つの隣接点からなるカットペアに対して新しく σ 点を 1 個作る。(w が 3 角形に含まれるときにはこのカットペアは上記の I 型として σ 点が既に置かれているが、これとは別の σ 点を置く。図 3 では σ_1, σ'_1 等と区別している。) 3-blk(G) の 2 点 u, v は次の条件 (1)–(3) のいずれかが成り立つとき且つそのときに限り 1 辺で結ばれる:

- (1) $\{u, v\}$ が σ 点と β 点の対であり、その σ 点の表すカットペアがその β 点の表す 3 点連結グラフに含まれる。
- (2) $\{u, v\}$ が σ 点と β 点の対であり、その β 点が $d_G(w) = 2$ なる点 w を表し、その σ 点が w の 2 つの隣接点からなるカットペアを表す。
- (3) $\{u, v\}$ が σ 点、 π 点の対であり、その σ 点の表すカットペアがその π 点の表す多角形に含まれる。

以下では、3-blk(G) の β 点が表す 3 点連結グラフ (またはその点集合) あるいは $d_G(w) = 2$ なる $\{w\}$ を G の 3 ブロックと呼ぶ。3-blk(G) の葉は全て β 点である。

注 3.2 上記 (2) の点 w が 3 角形に含まれる場合には 3-blk(G) はもう少し簡略化できる。例えば、図 3 の $\beta_1, \sigma'_1, \pi_5, \sigma_1$ の部分は σ'_1 と π_5 を除去し、 β_1 と σ_1 を直接辺で接続しても以後の議論に本質的に影響は与えない。実際 [8] ではこの簡略化した木を 3-blk(G) と定義している。本稿では 3 成分との対応を明確にするために上記の定義としている。

3.3 極小 2TS 族 $\mathcal{T}_S(G)$ の最小被覆

3.3.1 極小 2TS の性質

極小 2TS X は、カットペア $\Gamma(X)$ が G の I 型のカットペアであるか、II 型のカットペアであるかによって 2 種類に分けられる。前者の X を I 型、後者の X を II 型の極小 2TS と呼ぶ。I 型、II 型の極小 2TS には次の性質がある。

$X' \leftarrow X$ とおき、 $K \subseteq X'$ で G のボンド以外の 3 成分同士に共有されるカットペア K が存在するならば、 X' から K の全ての付属成分を除去して残る点集合を再び X' とおく。この操作を X' が変化しなくなるまで可能な限り続ける。最終的に得られる X' を X の核と呼び、 $\text{core}(X)$ と表す。次の性質が成り立つ。(証明は省略する。)

性質 3.1 $\text{core}(X) \neq \emptyset$ 且つ $X \cap S \subseteq \text{core}(X)$ 。

性質 3.2 X が I 型ならば、 $\text{core}(X) \cup \Gamma(X)$ は (G の 3 成分である) 3 点連結グラフまたは多角形である。もしこれが多角形ならば、3 角形であり、 $|X \cap S| = |\text{core}(X) \cap S| = 1$ が成り立つ。

性質 3.3 X が II 型ならば、 $V(P) \cap (X \cup \Gamma(X)) = \text{core}(X) \cup \Gamma(X)$ なる (G の 3 成分である) 多角形 P が存在し、 $b(\Gamma(X); S) = 2$ 、 $|X \cap S| = |\text{core}(X) \cap S| = 1$ 且つ $|\text{core}(X) \cup \Gamma(X)| = 3$ が成り立つ。

もし $\mathcal{T}_S(G)$ の異なる 2 つの極小 2TS も共通部分をもたないならば、 $\mathcal{T}_S(G)$ の最小被覆数 $t(G, S)$ は $|\mathcal{T}_S(G)|$ と等しい。例えば $S = V$ ならば $\mathcal{T}_S(G)$ の異なる 2 つの極小 2TS は互いに素である [8, 17]。しかし、 $S \subset V$ の場合には残念ながら図 1 の例のように共通部分をもつ極小 2TS の対が存在し得る。以下に示すように、 $\mathcal{T}_S(G)$ が共通部分をもつ極小 2TS を含む場合にはそれらの分布は単純な規則性をもつ。

性質 3.4 $X_1, X_2 \subseteq V$ を $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ なる G の異なる極小 2TS とする。このとき、次の性質 (1)–(3) が成り立つ。(1) X_1, X_2 は G の同じ多角形 P に属す II 型の極小 2TS である。(2) X_1, X_2 それぞれの基点を v_1, v_2 とする

と、 v_1, v_2 は P 上で隣接する。(3) $K = \{v_1, v_2\}$ とすると、 K は G の指定点を分離しないカットペアであり、 $X_1 \cap X_2$ は K の付属成分の和集合である。(図 4 参照)

性質 3.4 より共通部分をもつ極小 2TS は G の 3 成分である多角形の周辺にしか生じない。しかも、1 つの極小 2TS は高々 2 個の他の極小 2TS としか共通部分をもたない。よって、空でない共通部分をもつ 2TS は必ずパス状またはサイクル状に分布している。

3.3.2 $\mathcal{T}_S(G)$ の最小被覆の構成

以下では 3-blk(G) $T = (V_T, E_T)$ に対して深さ優先探索 (DFS) を適用することにより、 $\mathcal{T}_S(G)$ の最小被覆 H を求めることを説明する。DFS 木における v の子供の集合、子孫の集合、及び親を $\text{SON}(v)$, $\text{Des}(v)$, $\text{parent}(v)$ と表す。但し、 v が DFS の開始点のときには $\text{parent}(v) = \text{null}$ とする。 G の 3 ブロック B 、多角形 P 、カットペア K を表す T 上の点をそれぞれ $\beta(B)$, $\pi(P)$, $\sigma(K)$ と表す。但し、 $B = \{v\}$ のときは $\beta(v)$ と略記する。逆に、 T の点 v が表す G での 3 ブロック、多角形、カットペアをそれぞれ B_v, P_v, K_v と表すことにする。 V_T の各点 v について、 $(B_v \setminus K_{\text{parent}(v)}) \cap S \neq \emptyset$, $(P_v \setminus K_{\text{parent}(v)}) \cap S \neq \emptyset$, または $K_v \cap S \neq \emptyset$ なる場合に v を (S) の黒点と呼び、それ以外の点を白点と呼ぶ。

長さ $|V|$, $|V_T|$ の 1 次元配列 CV と ST を用意し、各 $v \in V$ に対して $CV[v] = 0$ 、また各 $v' \in V_T$ に対して $ST[v'] = 0$ と初期設定する。ここで、 $CV[v] = 1$ は $v \in H$ を、また $ST[v'] = 1$ は $\text{Des}(v')$ において H の点が含まれた (従って極小 2TS の存在が明らかとなった) ことをそれぞれ示す。

今、 T の σ 点 $\sigma(K)$ で K が S の 2 点を分離するものが存在するときには、そのような点を 1 つ選び、これを開始点として DFS を行う。そのような σ 点が存在しないときには、 S の全ての点はある 1 つの B または P に含まれる。 $S \subseteq B$ ならば G 自身が既に指定点 3 点連結である。このときには DFS は行われず、以下の議論では $H = \emptyset$ と考える。 $S \subseteq P$ ならば $\pi(P)$ を開始点として DFS を行う。 T の各点 v に対して、 v の子供から DFS が戻って来た時点で以下に述べる操作を行い、 $CV[v]$, $ST[v]$ を再設定する。

- (I) v が β 点のとき。(v は DFS の開始点ではない。)
 - (1) v が葉のとき。もし v が黒点ならば、 $ST[v] \leftarrow 1$ とし、更に任意に $u \in B_v \setminus K_{\text{parent}(v)}$ を選んで $CV[u] \leftarrow 1$ とする。
 - (2) v が葉ではないとき。各 $w \in \text{SON}(v)$ から戻ったときに、 $ST[w] = 1$ 且つ $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする。全ての $w \in \text{SON}(v)$ が訪問済みで $ST[w] = 0$ であり、且つ v が黒点ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とし、更に任意に $u \in B_v \setminus K_{\text{parent}(v)}$ を選んで $CV[u] \leftarrow 1$ とする。
- (II) v が σ 点のとき。($\text{SON}(v) \neq \emptyset$ である。)
 - (1) v が DFS の開始点ではないとき。各 $w \in \text{SON}(v)$ から戻ったときに、 $ST[w] = 1$ 且つ $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする。
 - (2) v が DFS の開始点のとき。全ての $w \in \text{SON}(v)$ が訪問済みであるとき、 $ST[v] \leftarrow 1$ とし、DFS を終了する。
- (III) v が π 点のとき。(v は T の葉ではない。)

この場合には T 上の v , $\text{SON}(v)$, $\text{parent}(v)$, 及び G 上の P_v , 各 $w \in \text{SON}(v)$ に対する $K_w, K_{\text{parent}(v)}$, 更にはこれらのカットペアの付属成分を見ながら、極小 2TS に

対する被覆を求めてゆく操作を行う。説明の都合上、 P_v を P 、 v を $\pi(P)$ と表して、 G 上での構造を中心に置いて考えて行くことがある。まず、図5に G の多角形 P に属するカットペア K, K' と $3\text{-blk}(G)$ T 上での表現の対応を示しておく。まず、 σ 点の場合と同様な操作を行う。

(1) 第1操作

各 $w \in \text{SON}(v)$ から戻ったとき、 $\text{ST}[w]=1$ 且つ $\text{ST}[v]=0$ ならば $\text{ST}[v] \leftarrow 1$ とする。

π 点の処理が β 点、 σ 点と異なるのは $V(P_v) \cap S$ によって新しく極小2TSが生じ、しかも共通部分が空でない2つの極小2TSも存在し得ることである。これは v が黒点の場合のみあり得ることである。これらは以下に説明する第2操作により処理する。

注 3.3 $d_T(w) = 2$ で w の子 w' が $d_G(u) = 2$ なる3ブロック $\{u\}$ を表すとき (図5(2)で $u = u_2$ と考えた場合) に、もし $u \in S$ (それぞれ、 $u \notin S$) ならば $\text{ST}[w]=1$ ($\text{ST}[w]=0$) である。 $u \in S$ のときには $\{u\}$ は極小2TSであるが、この時点で既に $\text{CV}[u]=1$ となっている。このときの K_w はII型であり、 T の σ 点として現れるII型のカットペアはこのようなものに限られる。 $\text{ST}[w]=0$ であるが $K_w \cap S \neq \emptyset$ である場合は第2操作で扱われる。

(2) 第2操作

DFSが全ての $w \in \text{SON}(v)$ から v に戻って来て、 $\text{parent}(v) \neq \text{null}$ ならば $\text{parent}(v)$ へ戻る直前に、あるいは $\text{parent}(v) = \text{null}$ ならばDFSを終了する直前に行く。以下では v は黒点とし、その場合の操作を図5, 6, 7, 8を用いて説明する。 P 上には S の点 (以下、図では黒丸の点として表す) が1個以上存在する。 P 上を時計回りに進みながら P 上の各辺、各点と対応する T 上での $\pi(P)$ の隣接点を見る。 P 上の各辺の両端点対は T 上で $\pi(P)$ に隣接する σ 点として現れる場合とそうでない場合がある。 $w \in \text{SON}(v)$ に対するカットペア K_w はI型 (図5(1)) またはII型 (図5(2)) である。但し、II型の場合には、図5(2)において $u_2 \in S$ ならば、注3.3により、 $\{u_2\}$ は極小2TSであり、且つ T における葉である β 点として表されるのでその処理は終了している。従って、II型では $d_G(u_2) = 2$ なる u_2 は $u_2 \notin S$ と考えてよい。また、性質3.2, 3.3より、極小2TS X のカットペア $\Gamma(X)$ は P に属すならば P 上の長さが2または1のパスの両端点であり、長さが2でその中間点の次数が3以上の場合には T 上に対応する σ 点は存在しない。

v がDFSの開始点ではない ($\text{parent}(v) \neq \text{null}$) のときには、 $K_{\text{parent}(v)} = \{y_0, y_{r-1}\}$ なる y_0 を選ぶ。 v がDFSの開始点である ($\text{parent}(v) = \text{null}$) ときに、 $V(P) \subseteq S$ ならば任意に1点 $y_0 \in V(P)$ を選び、 $V(P) \setminus S \neq \emptyset$ ならば任意に $y_0 \in V(P) \setminus S$ を選ぶ。 y_0 から P を時計回りに進んで $y_1, \dots, y_{r-2}, y_{r-1}$ ($r = |V(P)| \geq 3$), $y_r \equiv y_0$ とする。 $\text{parent}(v) \neq \text{null}$ ならば点集合 $\{y_0, y_1, \dots, y_{r-1}\}$ と辺集合 $\{(y_i, y_{i+1}) \in E(P) \mid i = 0, \dots, r-2\}$ により定まるパスを Q とする。 $\text{parent}(v) = \text{null}$ ならば $Q \leftarrow P$ (但し、 y_0 から右回りで y_0 に戻るサイクルと考える) とする。 $V(Q) \subseteq S$ ならば $Q_1 \leftarrow Q$ とおく。もし Q 上に S に属さない点 (Q の端点は除く) があれば、(Q を右回りに見ながら) Q から以下のようなパス Q_1, \dots, Q_z ($z \geq 2$) を求める。各 Q_i は S に属さない点から始まり、 S の点のみを通り、最後に S に属さない点で終わる。但し、 $\text{parent}(v) \neq \text{null}$ のときには、 $y_1 \in S$ ならば Q_1 は y_0 から始まり、 $y_{r-2} \in S$ ならば Q_z は y_{r-1} で終わる。しかもこの場合には $y_0 \in S$ あるいは $y_{r-1} \in S$ であっても以下の (i) と (iii) の操作ではこれらは S に属さないものと考えて実行する。 $y_0 \in S$ あるいは $y_{r-1} \in S$ なる場合は以下の (iii) で扱う。また

Q_i と Q_{i+1} (添字は mod z で考える) は S に属さない点を共有する場合がある。

$\Gamma(X)$ が P に属す極小2TS X に対しては、 $\Gamma(X)$ は Q_1, \dots, Q_z ($z \geq 1$) いずれかに属し、 $\Gamma(X)$ が Q_i と Q_{i+1} の両方と空でない共通部分をもつことはない。 $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ なる異なる極小2TS X_1, X_2 のカットペア $\Gamma(X_1), \Gamma(X_2)$ が共に Q_i に属するならば、 $|\Gamma(Q_i)| \geq 4$ である。ここで、もう1つ長さ $|V|$ の1次元配列 temp を用意して、各 $u \in V$ に対して $\text{temp}[u] \leftarrow 0$ と初期化しておく。 π 点 v に隣接する σ 点 $w \in \text{SON}(v)$ に対して、 $\text{temp}[w] = 1$ であることはDFSが w から v へ戻ったときには $\text{ST}[w] = 0$ であるが、 K_w と P_v に対する第2操作で極小2TSの中の1点が H の点として選ばれたことを示すものである。

各 Q_i を求める際に、 $|V(Q_i)| = 3$ であることがわかったときには (i) を、 $|V(Q_i)| \geq 4$ となることがわかったときには (ii) をそれぞれ行う。なお、 $\text{parent}(v) \neq \text{null}$ のときには $\{y_0, y_{r-1}\}$ はI型のカットペアだから、 $d_G(y_0) \geq 3$ 且つ $d_G(y_{r-1}) \geq 3$ である。

(i) $|V(Q_i)| = 3$ (すなわち $|V(Q_i) \cap S| = 1$) のとき

$V(Q_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$ とするとき、図6(1)~(3)に示す3通りの場合が考えられる。同図(1)では $K_1 = \{u_1, u_2\}$ のみが、同図(2)では $K_2 = \{u_2, u_3\}$ のみが、同図(3)では $K_1 = \{u_1, u_2\}$ 、 $K_2 = \{u_2, u_3\}$ の両方が、それぞれI型のカットペアである。これら各 K_i に対して、 $\sigma(K_i) \in \text{SON}(v)$ ならば $\text{temp}[\sigma(K_i)] = 0$ である。図6(1), (3)の場合の K_1 、あるいは同図(2)の K_2 をそれぞれ K で表し、対応する X_1 あるいは X_2 を X と表す。

もし $\sigma(K) \in \text{SON}(v)$ 且つ $\text{ST}[\sigma(K)] = 0$ ならば $u \in X$ を選び、 $\text{CV}[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K)] \leftarrow 1$ とし、更に $\text{ST}[v] = 0$ ならば $\text{ST}[v] \leftarrow 1$ とする。

注 3.4 上記の $u \in X$ の選び方に関しては、ある β 点または π 点 w について $u \in B_w$ あるいは $u \in P_w$ と選ぶものとする。もしある σ 点 w について $u \in K_w$ と選んだとすると $\text{SON}(w)$ は β 点または π 点 x からなるので定数時間の増加で $u \in B_x$ または $u \in P_x$ と選び直すことができる。以下、(ii) $|V(Q_i)| \geq 4$ の場合でも u の選び方はこれに従うものとする。

(ii) $|V(Q_i)| \geq 4$ (すなわち $|V(Q_i) \cap S| \geq 2$) のとき

Q_i の長さ3の部分パス R (但し、 $V(R) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$) に関して考えられる状況を図7, 8に示す。なお、図7に関しては、 $d_G(u_2) = d_G(u_3) = 2$ の場合があり得るが、これは既に処理済みとして削除している。図7, 8いずれも2つの極小2TS X_1, X_2 が存在し得る状況を示しているが、図7は存在したとしても $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ となる場合を示し、図8は $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ となる場合を示す。なお、 $\text{ST}[\sigma(K_i)] = 1$ となる場合には極小2TSは生じない。図中、 $u_2, u_3 \in S$ であるが、 u_1, u_4 については S に入らない場合もあり得る。また X_i と示された斜線部分は各I型カットペア K_i の付属成分の和集合を表す。次の (a)~(g) を実行する。

(a) $d_G(u_2) = 2$ 且つ $K_3 = \{u_3, u_4\}$ がI型カットペアのとき (図7(1))

もし $\text{ST}[\sigma(K_3)] = 0$ ならば ($\text{temp}[\sigma(K_3)] = 0$ である)、 $u \in X_3$ を選び、 $\text{CV}[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_3)] \leftarrow 1$ とし、更に $\text{ST}[v] = 0$ ならば $\text{ST}[v] \leftarrow 1$ とする。

(b) $d_G(u_3) = 2$ 且つ $K_1 = \{u_1, u_2\}$ がI型カットペアのとき (図7(2))

もし $\text{ST}[\sigma(K_1)] = \text{temp}[\sigma(K_1)] = 0$ ならば、 $u \in X_1$ を選び、 $\text{CV}[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_1)] \leftarrow 1$ とし、更に $\text{ST}[v] = 0$ ならば $\text{ST}[v] \leftarrow 1$ とする。

- (c) $K_1 = \{u_1, u_2\}$, $K_3 = \{u_3, u_4\}$ が I 型カットペアのとき (図 7(3))
もし $ST[\sigma(K_1)] = \text{temp}[\sigma(K_1)] = 0$ ならば, $u \in X_1$ を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_1)] \leftarrow 1$ とし, 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする. もし $ST[\sigma(K_3)] = 0$ ならば ($\text{temp}[\sigma(K_3)] = 0$ である), $u \in X_3$ を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_3)] \leftarrow 1$ とし, 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする.
- (d) $K_2 = \{u_2, u_3\}$ のみが I 型カットペアで, $\{u_1, u_2\}$, $\{u_3, u_4\}$ はカットペアでないとき (図 8(1))
 $X = X_2 \cup \{u_2\}$, $X' = X_2 \cup \{u_3\}$ が $X \cap X' = X_2$ なる極小 2TS である. $\Gamma(X) = \{u_1, u_3\}$, $\Gamma(X') = \{u_2, u_4\}$ である. $ST[\sigma(K_2)] = \text{temp}[\sigma(K_2)] = 0$ ならば (これは $u_1 \notin S$ の場合のみあり得る), $u \in X_2$ を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_2)] \leftarrow 1$ とする. 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする.
- (e) $K_2 = \{u_2, u_3\}$, $K_3 = \{u_3, u_4\}$ が I 型カットペアで, $\{u_1, u_2\}$ はカットペアでないとき (図 8(2))
もし $ST[\sigma(K_2)] = \text{temp}[\sigma(K_2)] = 0$ ならば, X_2 より任意に 1 点 u を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_2)] \leftarrow 1$ とする. 更にもし $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする. ($X = X_2 \cup \{u_2\}$, $X' = X_2 \cup X_3 \cup \{u_3\}$ が $X \cap X' = X_2$ なる極小 2TS である. $\Gamma(X) = \{u_1, u_3\}$, $\Gamma(X') = \{u_2, u_4\}$ である. なお, この状況の直前に (a) または (c) が実行されたならば $\text{temp}[\sigma(K_2)] = 1$ となっている.)
- (f) $K_1 = \{u_1, u_2\}$, $K_2 = \{u_2, u_3\}$ が I 型カットペアで, $\{u_3, u_4\}$ はカットペアでないとき (図 8(3))
もし $ST[\sigma(K_2)] = \text{temp}[\sigma(K_2)] = 0$ ならば, X_2 より 1 点 u を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_2)] \leftarrow 1$ とし, 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする. 極小 2TS 等に関しては (e) と対称的である.
- (g) $K_1 = \{u_1, u_2\}$, $K_2 = \{u_2, u_3\}$, $K_3 = \{u_3, u_4\}$ が I 型カットペアのとき (図 8(4))
 $\cdot ST[\sigma(K_1)] = 1$ または ($\text{temp}[\sigma(K_1)] = 1$) のとき.

$ST[\sigma(K_3)] = 0$ ならば ($\text{temp}[\sigma(K_3)] = 0$ である), X_3 から 1 点 u を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_3)] \leftarrow 1$ とする. 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする.

$\cdot ST[\sigma(K_1)] = \text{temp}[\sigma(K_1)] = 0$ のとき.

$ST[\sigma(K_2)] = \text{temp}[\sigma(K_2)] = 0$ ならば, X_2 から 1 点 u を選び, $CV[u] \leftarrow 1$, $\text{temp}[\sigma(K_2)] \leftarrow 1$ とする. 更に $ST[v] = 0$ ならば $ST[v] \leftarrow 1$ とする. ($ST[\sigma(K_2)] = 1$ または $\text{temp}[\sigma(K_2)] = 1$ ならば, この状況以前に X_2 の中から既に $CV[u] = 1$ なる点 u が選ばれている.)

DFS が終了した時点で $H \subseteq V$ を

$$u \in H \iff CV[u] = 1$$

と定める. このとき次の補題を得る.

補題 3.2 上記で求められた H に対して, 次の (1)-(4) が成り立つ.

- (1) H は $|H| = t(G, S)$ なる $T_S(G)$ の被覆であり, $O(|V| + |E|)$ 時間で求められる.
- (2) $S' = S \cup H$ とおくと, $X \neq X'$ なる任意の $X, X' \in T_{S'}(G)$ に対して, $X \cap X' = \emptyset$ であり, 且つ $t(G, S) \geq 2$ ならば $t(G, S') = t(G, S)$.
- (3) $b(K; S) = 1$ なる G の任意のカットペア K に対しては $b(K; S') \leq 2$, $b(K'; S) \geq 2$ なる G の任意のカットペア

K' に対しては $b(K'; S) = b(K'; S')$, 更に $b(G, S) \geq 2$ ならば $b(G, S') = b(G, S)$ である.

(4) $m(G, S) \geq 1$ ならば $m(G, S') = m(G, S)$.

(証明略)

3.4 解法

ここでは, $S' \subseteq V$ に関する 3VCA-SV の解法の概要を述べる. $b(G, S) = 0$ ならば, $|S| \geq 4$ より $S \subseteq B$ なる G の 3 ブロックが存在する. H の定め方より, $H = \emptyset$ すなわち $S' = S$ である. 次に $b(G, S) \geq 1$ とする. $G + A'$ が S' に関して指定点 3 点連結となる辺集合 A' が存在するならば $G + A'$ は S' に関して指定点 3 点連結となる. 従って, 補題 3.2 により, $|A'| = m(G, S')$ ($=m(G, S) \geq 1$) ならば A' は S' に関する指定点 3 点連結化問題の最適解である. しかも $T_{S'}(G)$ は互いに素な (S' に関する) 極小 2TS の族である. 本稿では, 異なる極小 2TS X, X' から 1 点ずつ, 非隣接点対をなす 2 点 $u \in X, u' \in X'$ を選び, それらを新しい辺 (u, u') で連結する. $T' \leftarrow T_{S'}(G) \setminus \{X, X'\}$ とおく. もし $G + (u, u')$ において新しい極小 2TS X'' が生じるならば (これは $\{u, u'\}$ を含む), $T' \leftarrow T' \cup \{X''\}$ とおく. このとき T' は $G + (u, u')$ における極小 2TS の族であり, 異なる極小 2TS は互いに素である. すなわち上記の辺付加で “(S' に関する) 極小 2TS が互いに素であること” が保存される. これは $S' = V$ なる S' に関する 3VCA-SV [8, 17] と同様な性質である. $b(K; S') \geq 2$ なるカットペア K に関しては, S' の点を含まない K 成分は無視して, S' の点を含む $b(K; S')$ 個の K 成分に着目すると, このような各 K 成分は 1 個以上の (S' に関する) 極小 2TS を含む. $S' = V$ なる S' に関する 3VCA-SV では, 3-blk(G) の葉 (β 点) として表される 3 ブロックをリーフ 3 ブロックと呼び, 各 K ブロックは 1 個以上のリーフ 3 ブロックを含んでいることを利用していた. 従って, リーフ 3 ブロックを S' に関する極小 2TS, K 成分を S' の点を含む K 成分と, それぞれ考えれば $S' = V$ なる S' に関する 3VCA-SV と同様な議論ができる.

以上述べたことから, $S' \subseteq V$ に関する 3VCA-SV の解法は $S' = V$ なる場合とほぼ同様に考えることができる. 本稿では [8, 17] の議論の流れに沿って説明して行く.

まず 3-blk(G) T から内部木と呼ばれる部分木 $T_S = (V_S, E_S)$ を以下の操作により求めておく. T_S は $S' = S \cup H$ の黒点 (すなわち $B_v \cap S' \neq \emptyset, P_v \cap S' \neq \emptyset$ あるいは $K_v \cap S' \neq \emptyset$ なる β 点, π 点あるいは σ 点 v のことである) を全て含む木である.

長さ $|V_T|$ の 1 次元配列 IT を用意し, 各 $v \in V_T$ に対して $IT[v] \leftarrow 0$ と初期化しておく. またスタック $F \leftarrow \emptyset$ としておく. S' の黒点である β 点または π 点を開始点として DFS を実行する. 葉に到達後, 戻りながら最初に出会った S' の黒点 v (β 点または π 点である) に対して $IT[v] \leftarrow 1$ とする. 以後 $IT[w] = 1$ なる $w \in \text{SON}(u)$ から u へ戻ったとき, F に辺 (w, u) を蓄え, 更に $IT[u] = 0$ ならば $IT[u] \leftarrow 1$ とすることを繰り返す. この DFS が終了した時点で $V_S = \{v \in V_T \mid IT[v] = 1\}$, $E_S = \{(u, u') \in E \mid (u, u') \text{ は } F \text{ に蓄えられた辺}\}$ として T_S が求められる. 内部木 T_S に関しては次の補題を得る.

補題 3.3 (1) T_S の任意の葉 v は β 点または π 点であり, それぞれ $B_v \cap S' \neq \emptyset$ または $P_v \cap S' \neq \emptyset$ が成り立つ. v の隣接点 $\sigma(K)$ に対して, $K = \Gamma(X)$ なる $X \in T_{S'}(G)$ が存在する. 逆に, 任意の $X \in T_{S'}(G)$ に対して, $\sigma(\Gamma(X))$ に隣接する葉が T_S には唯 1 つ存在する. 更に, $|T_S(G)|$ は T_S の葉数に等しい.

(2) S' の任意の点 u に対して, $u \in B_0, v \in P_0$ または $u \in K_v$ なる点 β 点, π 点または点 v が存在する.

(3) T_S 中の任意の点 $\sigma(K)$ に対して, $d_{T_S}(\sigma(K)) = b(K; S')$ が成り立つ.

(証明略)

カットペア $K \in \mathcal{K}_{S'}(G)$ に対して, $b(K; S') - 1 > \lceil t(G, S')/2 \rceil$ を満たすカットペアをマッシブなカットペア, $b(K; S') - 1 = \lceil t(G, S')/2 \rceil$ を満たすカットペアをクリティカルなカットペアと呼ぶ. マッシブな (それぞれ, クリティカルな) カットペア K に対し, $b(K; S') \geq 4$ ($b(K; S') \geq 2$) である. マッシブなカットペア, クリティカルなカットペアの個数について次の補題が成り立つ.

補題 3.4 マッシブまたはクリティカルなカットペアの個数について次のことが成り立つ. (1) マッシブなカットペアは高々1つ存在する. (2) マッシブなカットペアが存在するとき, クリティカルなカットペアは存在しない. (3) $t(G, S') > 2$ のときクリティカルなカットペアは高々2つ存在する.

(証明方法は [17] と全く同様であるので省略する.)

$m(G, S')$ 本の辺付加で G を S' に関して指定点3点連結化できることを $m(G, S')$ に関する数学的帰納法により示す. すなわち, $G' = G + (u_1, u_2)$ に対して, $m(G', S') = m(G, S') - 1$ となる (G における) 非隣接点対 u_1, u_2 が存在することを示す. 以下では u_1, u_2 はそれぞれ $\beta(B)$ あるいは $\pi(P)$ が T_S の葉である B あるいは P から選ぶものとする. B, P は S' に関する極小2TSに含まれていることに注意されたい.

まず, $m(G, S') = 1$ の場合は, $b(G, S') = t(G, S') = 2$ である. よって, 丁度2つの (S' に関する) 極小2TS X_1, X_2 が存在し, S' の2点を分離する G の任意のカットペア K は $b(K; S') = 2$ であり, 且つ X_1 と X_2 を分離する. $u_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) を選ぶ (T_S は丁度2つの葉をもつ木 (パス) だからその葉に着目すればよい.) $\kappa(G', S') \geq 3$ となり, $m(G', S') = 0 = m(G, S') - 1$ である.

以下では, $m(G, S') \geq 2$ を仮定する. $b(G, S') - 1$ と $\lceil t(G, S')/2 \rceil$ の大小関係により3つの場合に分けて考える. いずれの場合にも T_S におけるある条件を満たす2つの葉 x_1, x_2 を見つけ, それらに対応する (S' に関する) 極小2TS X_1, X_2 から2点 $u_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) を選ぶ. この結果 $m(G', S') = m(G, S') - 1$ となることが示される. なお, この証明方法は [17] と全く同様であるので, 以下では上記 x_1, x_2 の選び方のみ簡単に述べる.

(a) $b(G, S') - 1 > \lceil t(G, S')/2 \rceil$ の場合. 補題 3.4より, $b(K; S') = b(G, S')$ を満たすマッシブなカットペア K は1つしか存在しない. T_S において $\sigma(K)$ から出発して辺を辿り異なる葉を x_1, x_2 とする. $b(G', S') = b(G, S') - 1, \lceil t(G', S')/2 \rceil \leq \lceil t(G, S')/2 \rceil$ である.

(b) $b(G, S') - 1 < \lceil t(G, S')/2 \rceil$ の場合.

(b1) $b(G, S') \geq 3$ の場合. $b(K; S') = b(G, S')$ なる1つのカットペアを K とする. $b(K; S') - 1 < \lceil t(G, S')/2 \rceil$ より, 2つ以上の (S' に関する) 極小2TS を含む K 成分 Z が存在する. T_S において $\sigma(K)$ から $d_{T_S}(v) \geq 3$ なる点 v へのパスを見つける. $\sigma(K)$ を, 各々からこのパスには含まれない辺を辿って, 葉を見つけて x_1, x_2 とする. G' において新しく (S' に関する) 極小2TS が生じることはなく, $t(G', S') = t(G, S') - 2$ である. また, $b(G', S') \leq b(G, S')$ である.

(b2) $b(G, S') = 2$ 且つ $t(G, S') \geq 4$ とする. T_S において任意の点 $\sigma(K)$ に対して $d_{T_S}(\sigma(K)) = 2$ である. $d_{T_S}(v) \geq 4$ なる点 v が存在するならば v から出る4本の

辺を辿って T_S 上の4つの葉に到達する. v が β 点ならば任意に2つの葉を選んで x_1, x_2 とする. v が π 点ならば P_v 上を時計回りに回って K_1, K_3, K_2, K_1 の順に出現する σ 点で表されているカットペアが存在して, $(v, \sigma(K_i))$ を辿って葉 x_i に到達するものとして, x_1 と x_2 を選ぶ. 一方, $d_{T_S}(v) \geq 4$ なる点 v が存在しないときには, $d_{T_S}(v_i) = 3$ なる異なる2点 v_1, v_2 が存在する. T_S 上で, まず v_1 から v_2 へのパスを見つけ, 各 v_i からこのパスには含まれない辺を辿って4つの葉を見つける. v_1 から x_1 を, v_2 から x_2 を選ぶ. G' において新しく極小2TSが生じることはなく, $t(G', S') = t(G, S') - 2 (\geq 2)$ となる.

(b3) $b(G, S') = 2$ 且つ $t(G, S') = 3$ のとき. $m(G, S') = 2$ である. この場合は T_S の異なる2つの葉を x_1, x_2 とする. G' では新たな極小2TSが1つ生じ, $b(G', S') = 2$ 且つ $t(G', S') = 2$ である.

(c) $b(G, S') - 1 = \lceil t(G, S')/2 \rceil$ の場合. このとき, $m(G, S') \geq 2$ より $b(G, S') \geq 3$ である. 補題 3.4より, $b(K; S') = b(G, S')$ を満たすクリティカルなカットペアは高々2つしか存在しない. まず, 異なるクリティカルなカットペア K_1, K_2 が存在する場合を考える. T_S において $\sigma(K_1)$ から $\sigma(K_2)$ へのパスを見つけ, 次に各々からこのパスに含まれない辺を辿って葉を見つけて x_1, x_2 とする. G' においては極小2TSが新たに生じることはなく, $t(G', S') = t(G, S') - 2$ である. また, $b(G', S') = b(G, S') - 1$ である. 次に, クリティカルなカットペア K が1つだけ存在するとする. もし $t(G, S') \geq 4$ ならば, (b1) の議論と同様に, $t(G, S') = 3$ ならば, (b3) の議論と同様に x_1, x_2 を選ぶ.

以上の議論と補題 3.2より, 次の補題が成り立つ.

補題 3.5 G と S が与えられたとき, $m(G, S) \geq 1$ ならば G に $m(G, S)$ 本の辺を付加することにより指定点3点連結化できる.

解法は計算時間が $O(|V| + |E|)$ であるアルゴリズムとして記述できる. なお, T, T_S の更新操作等については紙面の都合上述べていないが, [8] の議論と同様に全体で $O(|V| + |E|)$ ができる. 以上より次の定理が成り立つ.

定理 3.1 3VCA-SV に対する最適解を $O(|V| + |E|)$ 時間で求めることができる.

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金 (C)07680361 及び (A)07308028 の援助を受けたことを記して謝意を表す.

参考文献

- [1] K.P.Eswaran and R.E.Tarjan, Augmentation problems, SIAM J. Comput., 5, pp.653-665, 1976.
- [2] S.Even, Graph Algorithms, Pitman, London, 1979.
- [3] A.Frank, Augmenting graphs to meet edge connectivity requirements, SIAM J. Discrete Math., 5(1), pp.25-53, 1992.
- [4] G.N.Frederickson and J.Ja'ja', Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J. Comput., 10(2), pp.270-283, 1981.
- [5] J.E.Hopcroft and R.E.Tarjan, Dividing a graph into triconnected components, SIAM J. Comput., 2, pp.135-158, 1973.
- [6] T.-s.Hsu, On four-connecting a triconnected graph, Proc. 33rd Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.70-79, 1992.

- [7] T.-s.Hsu, Undirected vertex-connectivity structure and smallest four-vertex-connectivity augmentation, Proc. 6th Intl. Symp. on Algorithms and Computation (ISAAC'95), (Lecture Notes in Computer Science #1004), pp.274-283, Springer-Verlag, Dec. 1995.
- [8] T.-s.Hsu and V.Ramachandran, A linear time algorithm for triconnectivity augmentation, Proc. 32th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.548-559, 1991.
- [9] T.-s.Hsu and V.Ramachandran, On finding a smallest augmentation to biconnect a graph, SIAM J. Comput., 22(5), pp.889-912, 1993.
- [10] T.Jordán, On the optimal vertex-connectivity augmentation, J. Combinatorial Theory, Series B, 63, pp.8-20, 1995.
- [11] D.Naor, D.Gusfield and C.Martel, A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity, Proc. 31st Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.698-707, 1990.
- [12] A.Rosenthal and A.Goldner, Smallest augmentations to biconnect a graph, SIAM J. Comput., 6(1), pp.55-66, 1977.
- [13] R.E.Tarjan, Data Structures and Network Algorithms, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1983.
- [14] W.T.Tutte, Connectivity in Graphs, University of Toronto Press, 1966.
- [15] 渡辺, 東, 中村, グラフの辺付加問題による耐故障ネットワークの構成, 電子情報通信学会論文誌, J73-A(7), pp.1242-1254, 1990.
- [16] T.Watanabe and A.Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, J. Comput. System Sci., 35(1), pp.96-144, 1987.
- [17] T.Watanabe and A.Nakamura, A minimum 3-connectivity augmentation of a graph, J. Comp. System Sci., 46, pp.91-128, 1993.

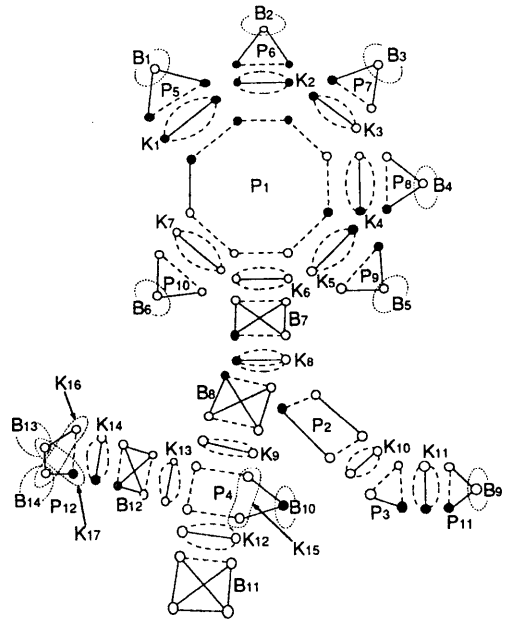


図2: 図1のグラフ G の3成分。(点線の辺は仮想辺を表す。)

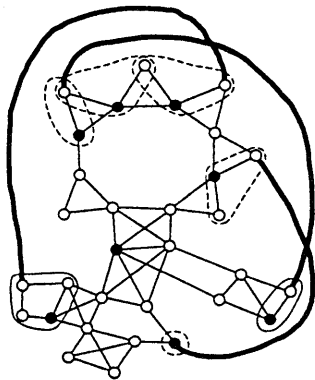


図1: グラフ $G = (V, E)$ (点が丸印で辺が細実線で示されている) と指定点集合 $S \subseteq V$ (黒丸で表す) の例。実線と破線で囲まれた点集合はそれぞれI型とII型の極小2TSである。指定点3点連結化のためには少なくとも $\max\{b(G, S) - 1, \lceil t(G, S)/2 \rceil\} = \max\{3 - 1, \lceil 6/2 \rceil\} = 3$ 本の辺を付加する必要がある。3本の太実線が解となる3辺である。

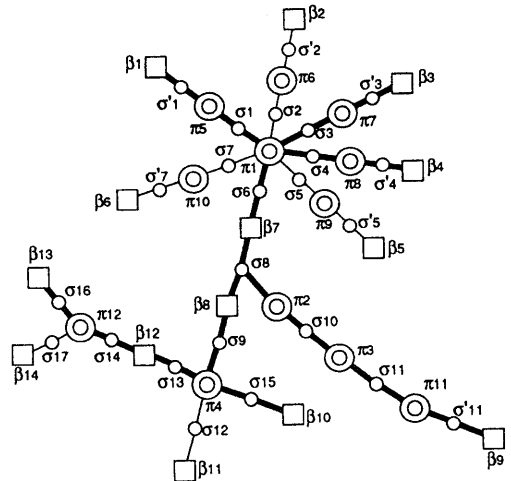


図3: 図1のグラフ G の3ブロックグラフ T と内部木 T_S 。太線で示す部分木が内部木である。四角形が3点、丸が2点、2重丸が1点を表す。

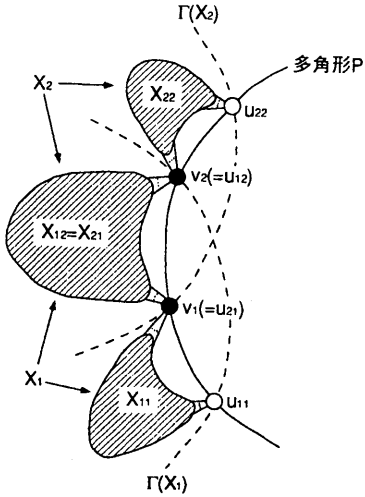


図 4: $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ なる極小 2TS X_1, X_2 . 但し, $v_1, v_2 \in S$ 且つ $X_i = X_{i1} \cup X_{i2} \cup \{v_i\}$ ($i = 1, 2$).

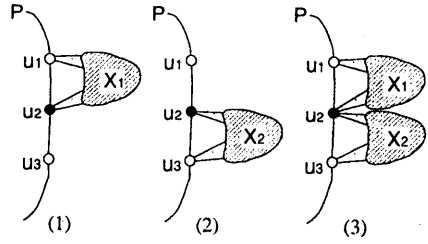


図 6: $|V(Q_i)| = 3$ なる Q_i .

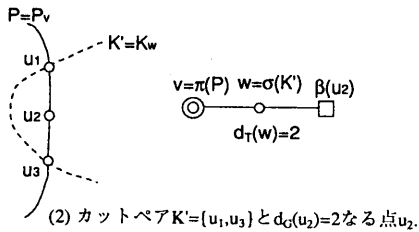
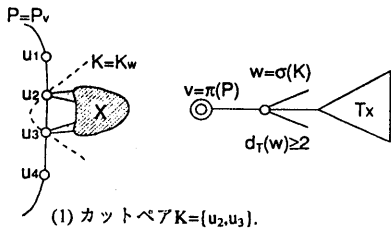


図 5: 多角形 P に属すカットペア K, K' に対応する 3-blk(G) T での表現.

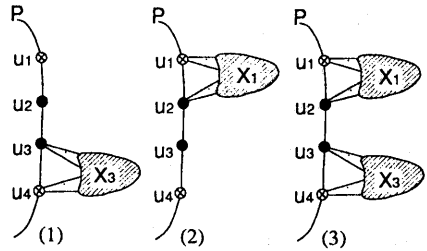


図 7: $|V(Q_i)| \geq 4$ なる Q_i の長さ 3 のパス R ($X_1 \cap X_2 = \emptyset$ なる極小 2TS X_1, X_2 のみが存在し得る場合).

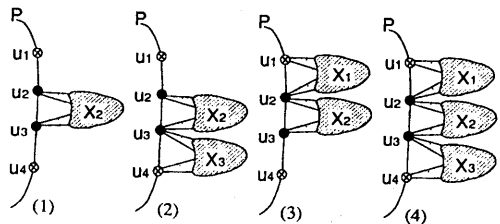


図 8: $|V(Q_i)| \geq 4$ なる Q_i の長さ 3 のパス R ($X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ なる極小 2TS X_1, X_2 が存在し得る場合).