

複雑な幾何計算の不要なボロノイ図あてはめ法

神田 毅

東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻

概要

与えられた平面分割図形に近いボロノイ図を求める方法として、両者の食い違いの面積が小さくなっていくように母点を動かしていく反復解法が知られている。ここでは、ある別の方針で「近さ」を定義し、最適化問題として定式化する。この時、図形の位相構造を無視した形の目的関数が作れて、しかも、その最小化は単に連立1次方程式の最小2乗解を得ることに対応する。つまり、ボロノイ図を各反復ごとに構成する必要も、その他の幾何的計算をする必要もない。ただし、本解法は目的関数の意味がはっきりとはわかりにくいので、この目的関数値と既存の方法での食い違い面積との間に相関があることを、実験的に確かめる。

Voronoi Fitting Method without Complicated Geometric Operations

Takeshi Kanda

Department of Mathematical Engineering and Information Physics, Graduate School of Engineering, University of Tokyo

abstract

An iterative method is known for fitting a Voronoi diagram to a given tessellation, which moves Voronoi generators so as to decrease the area of the difference between the given tessellation and the current Voronoi diagram. This paper adopts another criterion for the “closeness” and formulates this problem as an optimization problem, where the objective function is constructed without considering the topological structure. Furthermore, the minimization is fortunately equivalent to getting the least square solution of a system of linear equations. Hence, the problem is solved in a straightforward manner. Although the meaning of the objective function is not clear, experiments show a correlation between the two methods.

1 はじめに

与えられた平面分割図形に近いボロノイ図を求める問題を「ボロノイ図あてはめ問題」ということにする。地理的最適化問題とよばれる問題の1つである。この問題を利用する場面は大きく分けて2つある。地理情報処理の分野と、自然界に見られる平面分割図形(空間分割図形の断面の場合も多い)の解析である。前者の例としては

- 学校区や選挙区などの、ボロノイ図に近い方が好ましいと言われる形が、実際にどの程度ボロノイ図に近いかを数値で表したい [7] [8] [9] [10]。

があり、後者の例としては

- ボロノイ図に近いと言われる形は自然界にたくさんあり [1] [2]、これらの形が実際にどの程度ボロノイ図に近いかを数値で表したい。ここで近いと判定されれば、母点の情報を持つだけでこうした形を近似的に表現していることになり、細胞などの振舞いを容易にシミュレートできる [3] [4]。

がある。また、

- 平面分割図形の各領域がそれぞれある種の勢力を持つとみなし、その勢力が均等であるかどうか、勢力の中心はどこなのかを判定するための道具になる。

などが考えられるだろう。

この問題は、「近い」の意味を「与えられた平面分割図形と新しく作ったボロノイ図の食い違いの面積が小さい」こととみなして、[7]、[8]で反復解法によって解かれていて、[9]、[10]でも紹介されている。ここでは、「近い」の意味を「与えられた平面分割図形の各辺が、その両側の領域に対応する母点を結んだ線分の垂直二等分線に近い」こととみなすと、別のタイプのボロノイ図あてはめを行なえることを示す。

2 ボロノイ図

ボロノイ図 (Voronoi diagram) とは、与えられた点集合 $\{P_i(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ にたいして、どの点に最も近いかによって平面を分割した図形で、図 1 がその例である。式で表すなら、

$$\mathcal{V}(P_i) = \bigcap_{j \neq i} \{P(x, y) \mid d_i(P) \leq d_j(P)\}, \quad (1)$$

$$d_i(P) = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \quad (2)$$

で定義される勢力圏の集合 $\{\mathcal{V}(P_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ によって、平面を分割して作った図形ということになる。なお、ボロノイ図を作るために与える点 $P_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を母点といい、ボロノイ図に現れる頂点をボロノイ頂点、辺をボロノイ辺、領域 $\mathcal{V}(P_i)$ ($i = 1, \dots, n$) をボロノイ領域と呼ぶ。

3 ボロノイ図あてはめ問題

以下で定義する平面分割図形は、これから扱う問題の入力になるものである。

定義 1 平面分割図形： 平面内のある有界領域 \mathcal{R} を、

$$\mathcal{R} = \bigcup_{i=1, \dots, n} \mathcal{R}_i, \quad (3)$$

$$|\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j| = 0 \quad (\forall i, \forall j \neq i) \quad (4)$$

となるように小領域の集合 $\{\mathcal{R}_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ に分割したものを、平面分割図形とよぶことにする。ただし、記号 $||$ は領域の面積を表す。

そして、以下の問題を考える。

問題 1 ボロノイ図あてはめ問題： ある平面分割図形 $\{\mathcal{R}_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ が与えられた時、その領域数 n と同数の母点 $\{P_i(x_i, y_i) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ を配置して、そのボロノイ図 $\{\mathcal{V}(P_i) \mid i = 1, \dots, n\}$ が元の平面分割図形に近くなるようにせよ。

図 2 は、ある方法でボロノイ図あてはめを行なった例である。一点鎖線が与えられた平面分割図形、点が配置した母点、実線がそのボロノイ図である。

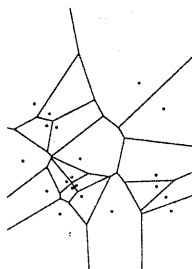


図 1. ボロノイ図の例

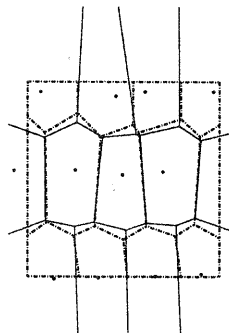


図 2. ボロノイ図あてはめ問題の例

4 既存の解法

4.1 与えられた平面分割図形がボロノイ図である場合の解法

与えられた平面分割図形が厳密にボロノイ図に一致する場合のボロノイ図あてはめ問題、つまりボロノイ図から逆に元の母点を求める問題の解法は [5]、[6] に述べられている。

前者は、与えられた平面分割図形の各領域の中で、母点に乗っているべき半直線がいくつか得られることを利用し、これらが 1 点で交わればそこが母点であるとするものである。なお、与えられた平面分割図形がボロノイ図ではなく、これらが 1 点で交わらない場合にも、全体的にこの半直線群に近い点を選び、その点と半直線とのずれ総和を、ボロノイ図への「遠さ」とみなすことができ、この値は Δ 値と呼ばれる [1] [3]。

後者は、まず、元の平面分割図形の辺がその両側の領域に対応する母点を結んだ線分の垂線になっていることだけを考慮する。このとき、ある 1 つの母点の位置を任意に定め、さらに隣の 1 つの母点への距離も定めると、残りの全ての母点の位置が自動的に決まる。次に、母点全体の拡大・平行移動を行なって、全ての辺にたいして 2 等分線の条件が満たされるようにする。

これら方法は、入力としてボロノイ図を与えたつもりでも、観測の誤差や数値計算の誤差が加われば、出力として「ボロノイ図ではない」という答が得られてしまうだけなので、実用的ではない [7] [8] [10]。

4.2 食い違い面積を小さくするための反復解法

この節では、[7]、[8] で提案されている問題設定と解法の概略を紹介する。

まず、問題設定として、「近い」の意味を「与えられた平面分割図形と与えるボロノイ図の食い違いの面積が小さい」こととする。これは最も素直な考え方だろう。つまり、目的関数

$$f(P_1, P_2, \dots, P_n) \equiv \sum_{i=1}^n \int \int_{V(P_i) \cap R_i} dx dy \quad (5)$$

を最大化する。この目的関数値は、与えられた平面分割図形と与えるボロノイ図とが一致した部分の面積の合計である。そして、目的関数 (5) を未知の点 P_i の座標 x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) で偏微分した式を使って、最急降下法により局所最適解を求める。この偏微分を書き下すと

$$\frac{\partial f(P_1, P_2, \dots, P_n)}{\partial x_i} = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \frac{l_{ij}(x_{ij} - x_i) - l_{ji}(x_{ji} - x_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}},$$

$$\frac{\partial f(P_1, P_2, \dots, P_n)}{\partial y_i} = \sum_{j \in \mathcal{J}_i} \frac{l_{ij}(y_{ij} - y_i) - l_{ji}(y_{ji} - y_i)}{\sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}} \quad (6)$$

である。ただし、

- \mathcal{L}_{ij} は各反復での $\mathcal{V}(P_i) \cap \mathcal{V}(P_j) \cap \mathcal{R}_i$
- l_{ij} は \mathcal{L}_{ij} の長さ
- (x_{ij}, y_{ij}) は \mathcal{L}_{ij} の重心
- \mathcal{J}_i はボロノイ領域 $\mathcal{V}(P_i)$ と共通辺を持つボロノイ領域の添字の集合

を表す。

4.3 線形計画問題に帰着させる方法

[11]では、まず、

- 元の平面分割図形の辺がその両側の領域に対応する母点を結んだ線分の垂直 2 等分線になっている
- 各母点に対応する領域に含まれる

となるように母点を選べるのが、元の平面分割図形がボロノイ図であることの必要十分条件であることが示され、それぞれの条件を等式、不等式で表すことにより線形計画問題を作り、その実行可能領域を得るという方法が提案されている。

5 提案する解法

5.1 問題設定と解法の概略

ここでは、問題設定として、ボロノイ図あてはめ問題における「近い」の意味を「元の平面分割図形 (図 3 の点線) の辺が、その両側の領域 \mathcal{R}_i と \mathcal{R}_j に対応する母点 P_i と P_j を結んだ線分 (同実線) の垂直 2 等分線に近くなっている」こととする。まず、図 3 のようにボロノイ頂点を表す記号を定義する。つまり、領域 \mathcal{R}_i と \mathcal{R}_j が共有するボロノイ辺を、 \mathcal{R}_i が左側となるように向き付けした時の始点を V_{ij} 、その座標を (a_{ij}, b_{ij}) とする。また、元の平面分割図形の境界辺 (m 本とする) を与える点番号の対の集合を

$$\mathcal{A} \equiv \{(i, j) \mid \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_j \neq \phi, i < j\} \quad (7)$$

とする。そして、垂直性 (perpendicularity) の尺度 p を

$$\begin{aligned} \left(\frac{|\mathcal{R}|}{n}\right)^2 p &\equiv \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \left(\overrightarrow{V_{ij}V_{ji}} \cdot \overrightarrow{P_iP_j}\right)^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \left\{ \begin{pmatrix} a_{ji} - a_{ij} \\ b_{ji} - b_{ij} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_j - x_i \\ y_j - y_i \end{pmatrix} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \{(a_{ji} - a_{ij})(x_j - x_i) + (b_{ji} - b_{ij})(y_j - y_i)\}^2 \end{aligned} \quad (8)$$

で定義し、2等分性 (bisectability) の尺度 b を

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{|\mathcal{R}|}{n}\right)^2 b &\equiv \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} (2 \Delta V_{ij} V_{ji} P_i - 2 \Delta V_{ji} V_{ij} P_j)^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \left| \overrightarrow{V_{ij} V_{ji}} \times \overrightarrow{V_{ij} P_i} - \overrightarrow{V_{ji} V_{ij}} \times \overrightarrow{V_{ji} P_j} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \left| \begin{pmatrix} a_{ji} - a_{ij} \\ b_{ji} - b_{ij} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_i - a_{ij} \\ y_i - b_{ij} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{ij} - a_{ji} \\ b_{ij} - b_{ji} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_j - a_{ji} \\ y_j - b_{ji} \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \{(b_{ji} - b_{ij})(x_i + x_j) - (a_{ji} - a_{ij})(y_i + y_j) - 2(a_{ij}b_{ji} - a_{ji}b_{ij})\}^2 \quad (9)
 \end{aligned}$$

で定義する。ただし、 ΔABC は、折れ線 ABC が左に折れる時に正となるような、3角形 ABC の符号付き面積とする。式(8)、(9)の左辺は面積の2乗の次元を持つ。また、式(8)と(9)の左辺で、 p や b に $\left(\frac{|\mathcal{R}|}{n}\right)^2$ をかけているのは、与えられた平面分割図形を相似なまま拡大したり、同じ平面分割図形を隣に貼り合わせて拡大したりしても、 p や b の値が変わらないようにするためである。

そして、目的関数

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \equiv (1-k)p + kb \quad (10)$$

を最小化することにする。ただし、 k は $0 \leq k \leq 1$ を満たし、2等分性重視度とよぶことにする。なお、 p も b も未知数 $\{x_i, y_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ に関する1次式の2乗和である。

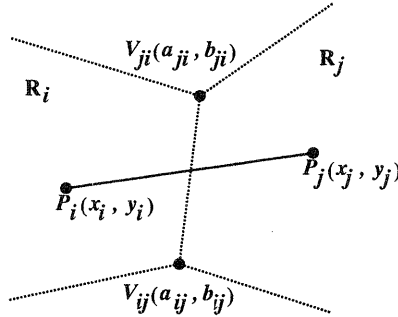


図 3. ボロノイ図あてはめ問題のための記号の定義

5.2 解法の詳細

目的関数(10)を最小化することは、「 $(1-k)p$ 、 kb の各項の2乗する前 = 0」という式を $2m$ 本並べた連立1次方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{n\sqrt{1-k}}{\sqrt{m}|\mathcal{R}|} \{(a_{ji} - a_{ij})(x_j - x_i) + (b_{ji} - b_{ij})(y_j - y_i)\} &= 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{A} \\
 \frac{n\sqrt{k}}{\sqrt{m}|\mathcal{R}|} \{(b_{ji} - b_{ij})(x_i + x_j) - (a_{ji} - a_{ij})(y_i + y_j)\} &= 2\frac{n\sqrt{k}}{\sqrt{m}|\mathcal{R}|} (a_{ij}b_{ji} - a_{ji}b_{ij}) & \forall (i, j) \in \mathcal{A}
 \end{aligned} \quad (11)$$

の最小 2 乗解を求めることに等しい。今回は、それを特異値分解を利用して求めた。その目的は、問題の解の自由度や数値的安定性も同時に実験的に知ることであり、実用上はもっと速く最小 2 乗解を得ることのできる方法を採用するべきである。なお、この方程式の係数行列は $2m \times 2n$ 型になる。

5.3 問題点

この方法は、[11]の方法での必要十分条件の内の 1つしか考慮しないという意味で理論的に欠陥がある。ただし、得た解がもう 1つの条件を満たさないことは、以下の実験の範囲では起こっていない。

6 実験結果

6.1 実験結果 1 - 本解法のサンプル図形への適用

自作のサンプル図形「ひび割れ」と「20 領域ポロノイ図」を与えられた平面分割図形とし、2 等分性重視度 k を適当に定めて本解法を適用した。その結果得られる母点とそのポロノイ図を重ねて示したのが以下の図 4、5、6、7であり、一点鎖線が与えられた平面分割図形、実線ができたポロノイ図である。図 7では、当然ながら元の平面分割図形と最適解として得られたポロノイ図が一致していて、 $p = b = 0$ となった。図 4、5、6については、2 等分性重視度 k が小さい時(図 4)には、対応する辺同士が平行になり、大きい時(図 6)には、対応する 2 辺の交点が両側の領域の母点の中点と一致する傾向があることが観察できる。

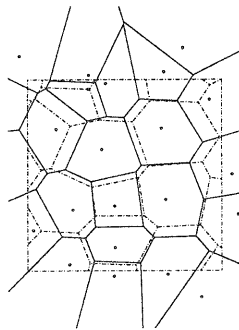


図 4. 適用例 - ひび割れ、 $k = 0.01$

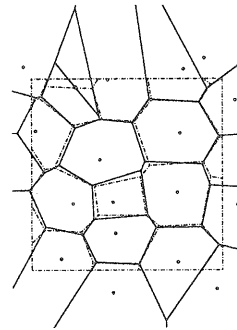


図 5. 適用例 - ひび割れ、 $k = 0.5$

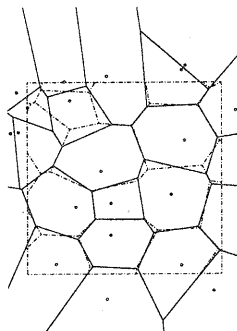


図 6. 適用例 - ひび割れ、 $k = 0.99$

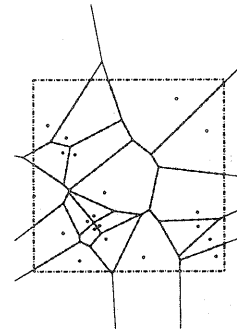


図 7. 適用例 - 20 領域ポロノイ図、 $k = 0.5$

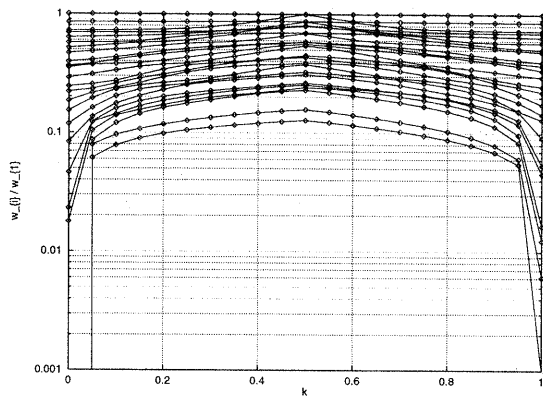


図 8. 2 等分性重視度 k と特異値 $\frac{w_i}{w_1}$ との関係

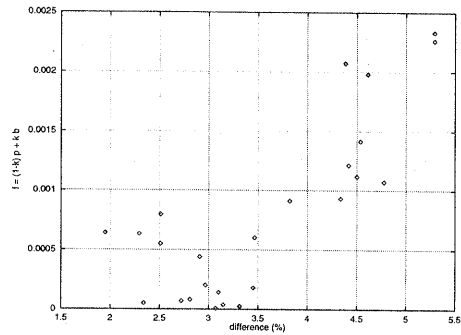


図 9. 食い違い面積と本解法の目的関数の相関

6.2 実験結果 2 - 特異値を使った解の質の評価

2 等分性重視度 k と解くべき連立 1 次方程式の係数行列の特異値 (大きい順に w_1, \dots, w_{2n} とする) との関係調べた。図 8 は、12 点のポロノイ図にたいして、2 等分性重視度 k を $0, 0.05, 0.10, \dots, 1.00$ と変えながら本解法を適用したときの、 $2 \times 12 = 24$ 個の特異値である。 $\frac{k}{1-k}$ の値が 1 程度なら、解くべき連立 1 次方程式は、数値解を得る上で性質の良いものとなることを示している。なお、 $k = 0$ で小さい方の 3 個の特異値が 0 になっている。この場合には垂直性しか考えに入れていないことになるから、1 個の解にたいして、得られた母点集合を拡大・x 軸方向平行移動・y 軸方向平行移動をしたものも解であり、解の自由度が 3 になることを示している。

6.3 実験結果 3 - 既存の解法との比較

本解法は目的関数の意味がはっきりとはわかりにくいので、この目的関数値と既存の方法での食い違い面積との相関関係を調べる。正方形の枠内に一様にばらまかれた 6 点によるポロノイ図の内部頂点を、2 次元正規分布にしたがった量だけずらして得た平面分割図形 (頂点のずれの標準偏差 SD を枠の 1 辺の長さの $0.002 \times 1, 2, \dots, 25$ としたものをそれぞれ 1 個ずつで、合計 25 個) を入力として、既存の解法での面積の食い違いと、本解法で $k = 0.5$ とした時の目的関数値 (10) を求め、それぞれを横軸、縦軸の値としてプロットした。その結果が図 9 であり、若干の正の相関が見られる。

7 まとめ

本資料で紹介した結果と今後の課題をまとめると、以下の通りである。

- ポロノイ図あてはめ問題について、ポロノイ図構成などの複雑な幾何的計算を各反復毎に行なう必要のない解法を、1 つ提案した。
- 本解法は、ポロノイ図への近さを、垂直性 p と 2 等分性 b の 2 つの尺度に分けて考えているので、より細かいデータを得られることになるが、一方で 2 等分性重視度 k の適切な選び方が問題となる。
- 今回提案した解法は、目的関数の意味が従来のものと比較してわかりにくいですが、従来の解法での「面積の食い違い率」との若干の正の相関が見られることは確認した。今後、データの数を多くしたり、本実

験と違ったタイプの平面分割図形を扱ったり、 k を変えてみたりする必要があるだろう。

- 本解法は、平面分割図形がボロノイ図であるための2つの必要十分条件 [11] の内の1つを考慮しないという意味で、理論的に欠陥がある。
- 今回提案した解法と同様の解法でラゲールボロノイ図あてはめ問題が解けると、3次元ボロノイ図の断面から元の3次元ボロノイ図を推定することに役立つことが確認済みなので、そこまで本解法を発展させたい。

参考文献

- [1] 高木 隆司: 形の数理, シリーズ現代人の数理 1, 朝倉書店, 1992.
- [2] 長谷川 政美: なわばりの形, 1980 年度基研短期研究計画「形の物理学」, 物性研究, Vol. 36-1, 1981.
- [3] Hisao Honda: Description of Cellular Patterns by Dirichlet Domains: The Two-Dimensional Case, *J. theor. Biol.*, Vol. 72, pp. 523-543, 1978.
- [4] 本多 久夫: 組織中の細胞の幾何学モデル, 自然 1983 年 2 月号.
- [5] Peter F. Ash, Ethan D. Bolker: Recognizing Dirichlet Tessellations, *Geometriae Dedicata*, Vol. 19, pp. 175-206, 1985.
- [6] F. Aurenhammer: Recognising Polytopycal Cell Complexes and Constructing Projection Polyhedra, *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 3, pp. 249-255, 1987.
- [7] Atsuo Suzuki, Masao Iri: Approximation of a Tessellation of the Plane by a Voronoi Diagram, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 29, No. 1, 1986.
- [8] 鈴木 敦夫: 平面上の施設の位置決め問題の研究, 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻博士論文, 1988.
- [9] 岡部 篤行, 鈴木 敦夫: 最適配置の数理, シリーズ現代人の数理 3, 朝倉書店, 1992.
- [10] 伊理 正夫 監修, 腰塚 武志 編集: 計算幾何学と地理情報処理 第 2 版, 共立出版, 1993.
- [11] David Hartvigsen: Recognizing Voronoi Diagrams with Linear Programming, *ORSA Journal on Computing*, Vol. 4, No. 4, pp. 369-437, 1992.