アルゴリズム 78−7
（2001. 5. 18）

リング型光通信ネットワークの耐故障性ルーティングについて

高橋 仁之†，伊藤 暢浩†，陳 慰‡，和田 幸一†

†名古屋工業大学 電気情報工学科
〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町
{zin, bobson, chen, wada}@phaser.elcom.nitech.ac.jp

‡南山大学 数理情報学部情報通信学科
〒 489-0863 瀬戸市せいれい町 27
chen@it.nanzan-u.ac.jp

あらまし 波長分割多重 (WDM) を用いたリング型光通信ネットワークにおいて全対全通信に対する耐故障性ルーティング問題を考える．本稿においてルーティングの耐故障性をあつかうために WDM 光通信ネットワークの j-ホップモデルを拡張する．そして波長の数をできるだけ少なくするリング型光通信ネットワークに対する耐故障性ルーティングを示す．さらにそれらのルーティングは，ルーティングにおける路が最短である，ルーティングテーブルが小さい，リングのそれぞれのノードは同じ通信パターンを用いるといった光通信ネットワーク環境において有効な特性を満足する．

キーワード リング型光通信ネットワーク，波長分割多重，耐故障性ルーティング，全対全通信

Fault-tolerant routing problem for optical ring network

Kimiyuki Takahashi†, Nobuhiro Itoh†, Wei Chen‡ and Koichi Wada†

†Nagoya Institute of Technology
Gokiso Syowa-ku Nagoya 489-0863 Japan
{zin, bobson, wada}@phaser.elcom.nitech.ac.jp

‡Nanzan University
27 Seirei-cho Seto 466-8555 Japan
chen@it.nanzan-u.ac.jp

abstract We consider an all-to-all fault-tolerant routing problem in an optical ring network that utilizes the wavelength-division multiplexing(WDM). In this paper, we extend the j-hop model of WDM optical networks so that the fault-tolerance of routings can be treated. We show fault-tolerant routings for optical ring networks so that the number of wavelengths are as least as possible and their routings satisfy the desired properties in optical network environment such as paths in the routings are minimum-length, the routing tables are small, or each node of the ring uses the same communication pattern.

key words optical ring network, wavelength-division multiplexing(WDM), fault-tolerant routings, all-to-all communication

1 序論

光通信網は超高速，広帯域巾を持つネットワークとして期待されている．光ファイバーケーブルの広帯域性により通常のネットワークに比べてデータ伝送率が飛躍的に向上する．光通信網においては，波長多重化 (Wavelength Division Multiplexing:WDM) による実現が一般的である [1]．WDM においては，光スペクトルを多数の異なるチャネル (異なる波長に対応) に分割することにより異なるデータを同時に伝送することを可能にする．スイッチ付き WDM ネットワークは光ファイバーケーブルで接続された計算機の集合からなり，計算機のもつスイッチは波長に従って入力信号の行き先を変えることができる．本稿ではスイッチは波長は変更できないと仮定する．以下，波長は色で表す．

(スイッチ付き)WDM 光通信網を有向対称グラフ (symmetric digraph)$G = (V, E)$ でモデル化する．すなわち，点集合 V は通信網中の計算機に対応し，有向辺は両方向通信可能な光ケーブルに対応させ，$(x, y) \in E$ なら $(y, x) \in E$ を満たす．異なるデータは異なる波長が割り当てられているなら同じケーブル (有向辺) を使用できる．同一の色が割り当てられたデータは辺を共有しない路を使用しなければならない．

光通信網と通信要求が与えられた時，通信要求を満足する路の集合 (ルーティング) と通信が同時に行なえるような路に対する色の割当を求めることが問題である．光スイッチのコストは取り扱う光の色数に依存するので，色数をできるだけ少なくしなければならない．形式的には以下のように定式化される [3]．WDM 光通信網を $G = (V, E)$ とし通信要求の集合を $I = \{(x, y) | x, y \in V\}$ とする．G 上で I に対する j-ホップ解は以下の条件を満たすルーティング R である．

(1) R に任意の 2 つの路が辺を共有するなら異なる色が割り当てられる．
(2) I の任意の通信要求 (x, y) に対して，x から y への路は R の路を高々j 個つないでえられる．

G,I と j-ホップ解 R に対する色の割り当てのうち，最小の色数をもつ色割当の色数を $w(G, I, R, j)$ と表す．また，G,I,j に対して，全てのルーティング R に対する $w(G, I, R, j)$ の最小値を $w(G, I, j)$ と表す．n 点対称有向閉路 (n-リングと呼ぶ) を対象として全対全通信 I_A(全ての点からのブロードキャスト) に対して，$w(C_n, I_A, j)(j = 1, 2, 3)$ の上下界が議論されており [3]，また，光通信網に適した性質をもつルーティングは求められている．WDM 光通信網におけるルーティングの色数に対しては，同様のモデルのもとでさまざまなグラフに対して議論されている [2]．

本稿では上記の WDM 光通信網のモデルに耐故障性を考慮できるようにモデルを拡張する．グラフ G に対して故障点を取り除いた残りのグラフ (G/F と表す) が強連結となる故障を考える．そのような任意の故障に対して，故障を除く通信要求 (I/F と表す) が満たされるような色数が最小となるルーティング R を構成する．構成されるルーティングに対して故障を除く路の集合 (R/F と表す) を考え，条件を満たすどのような故障が起こっても，G/F 上で I/F に対して R/F が j-ホップ解となる色数最小のルーティングを構成する．

本稿では n 点対称有向閉路 (n-リングと呼ぶ) を対象として，全対全通信 I_A(全ての点からのブロードキャスト) に対して，耐故障性に優れた j-ホップ解 $(j = 1, 2, 3)$ となるルーティングを構成する．また，光通信網に対するルーティングの望ましい性質を定義し，ここで構成したルーティングがその性質を満足することを示す．

2 定義

2.1 用語の定義

集合 A に対して，A の要素数を $|A|$ と表す．2 つの集合 A, B に対して，$A/B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$ を A, B の差集合という．

有向グラフ (digraph) $G = (V, E)$ は，点の有限集合 V と有向辺の有限集合 E からなる組である．有向辺は相異なる点の順序対で表され，(u, v) と表す．以降有向グラフ，有向辺をそれぞれ単にグラフ，辺と呼ぶ．グラフ G の点集合，辺集合を $V(G), E(G)$ と表すことがある．また，また，G の任意の辺 $(u, v) \in E(G)$ に対して $(u, v) \in E(G)$ ならば $(v, u) \in E(G)$ である場合，G を対称有向グラフ (symmetric digraph) という．点集合 $V = \{x_0, x_1, ..., x_{n-1}\}$，辺集合 $E = \{(x_i, x_{(i+1) \bmod n}), (x_{(i+1) \bmod n}, x_i) \mid 0 \leq i \leq n-1\}$ で表される対称有向グラフを n-リングと呼び，C_n と表す．ただし点 x_i の添え字 i は時計回りに増加するものとする．

2 つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ について，$V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$ であるとき G' を G の部分グラフ (subgraph) という．特にグラフ G と $V' \subseteq V$ に対して，$E' = \{(u, v) \in E | u, v \in V'\}$ である部分グラフ $G' = (V', E')$ を V' に誘導される部分グラフといい $G(V')$ で表す．

グラフ $G = (V, E)$ において，点列 $P = (v_0, v_1, \cdots, v_l)$ が各 i に対して $(v_{i-1}, v_i) \in E$ となるとき，P を v_0 から v_l への路 (path) といい $p(v_0, v_l)$ で表すものとする．また，v_0, v_l をその路の端点，l をその路の長さ (length) といい，$|P|$ で表す．特に同じ点を二度通らない路を単純な路 (simple path) という．ふたつ以上の路が端点以外に共通の点を持たないとき，これらの路は点独立であるという．

グラフ G において任意の異なる 2 点間に路が存在するとき，G は強連結であるという．x から y への路のうち最短の路の長さを x から y への距離 (distance) といい，$d(x, y)$ で表す．また，G の相異なる任意の 2 点の組に対する距離の最大値を G の直径 (diameter) と呼び $D(G)$ とする．点 v の出次数 (out-degree) と

は v から出る辺の数である．v の次数 (degree) とは，v の出次数と v の入次数の和である．

ふたつの路 $P=(u_0,\cdots,u_p)$ と $Q=(v_0,\cdots,v_q)$ が共通の点 $u_p=v_0$ を持つとする．これらの P,Q に対して P と Q の連接とは，このふたつの路を共通な端点でつなげた路である．

2.2 対称有向グラフにおける耐故障性ルーティング問題

この節では，対称有向グラフ G における耐故障性ルーティング問題を定義する．

要求 (request) $\mathrm{req}(x,y)$ は G の点の順序対である．要請 (instance) $I\subseteq\{req(x,y)|x,y\in V,x\neq y\}$ は要求の集合である．例として，$I_x=\{req(x,y)|x\in V,y\in V/\{x\}\}$ は x からのブロードキャスト（同報通信）を表し，$I_A=\{req(x,y)|x,y\in V,x\neq y\}$ はマルチキャスト（全対全通信）を表す．要求 $req(x,y)$ に対して x から y への路が存在するとき，$req(x,y)$ が満足されるという．

グラフ G と要請 I に対するルーティング R とは与えられた要請の要求が満たされる路の集合であり，$R\subseteq\{p(x,y)|x,y\in V,x\neq y\}$ で定義される．

R が I に対する j-ホップ解であるとは，I の各要求 $req(x,y)$ に対して R の路を高々 j 個の連接した路 $P_1\cdot P_2\cdot\ldots\cdot P_j(P_1,P_2,...,P_j\in R)$ が $req(x,y)$ を満足することである．

j-ホップ解に対する R の色づけ $c:R\to\mathbf{N}$（自然数全体の集合）に対して $P_1,P_2\in R$ が辺を共有するならば $c(P_1)\neq c(P_2)$ を満たす．

故障 F を $G(V/F)$ が強連結となる点の集合をする．要請 I とルーティング R から F に関するものを取り除いた集合をそれぞれ $I/F=I/\{req(x,y)|req(x,y)\in I,x,y\notin F\}$，$R/F=\{p|p\in R,p$ は F の点を含まない $\}$ と定義する．

任意の F に対して R/F が I/F の j-ホップ解となるような R に対する色数を最小にする色づけの色数を $w_f(G,I,R,j)$ と表す．また $w_f(G,I,j)=\min_R w_f(G,I,R,j)$ と定義する．このとき，R は I の j-ホップ解となる耐故障性ルーティングと呼ぶ．

2.3 ルーティングの性質

ここでは光通信網に適したルーティングの様々な性質を定義する．

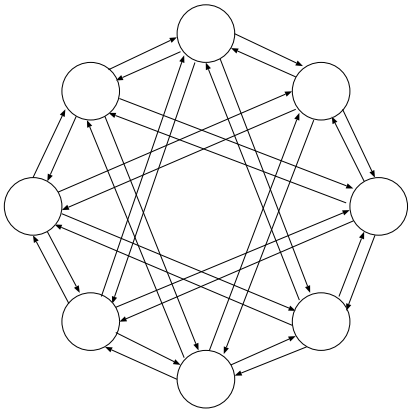
グラフ $G=(V,E)$ と G におけるルーティング R に対して $G(R)=(V,E')$，$p(x,y)\in R$ ならばかつそのときに限り $(x,y)\in E'$ であるものを，G に対する R の路線グラフ (route graph) という．

グラフ G とルーティング R からなる路線グラフ $G(R)$ において，各点の出次数の最大値を路線出次数 (route-out-degree) といい $RD_{out}(R)$ で表す．

ルーティング R に対して R が "k 重 "(k-fold) ルーティングであるとは，R に含まれる任意の 2 点間の路が高々 k 個であることをいう．

ルーティング R に対して R が "最短 "(minimal) ルーティングであるとは，すべての路 $p\in R$ が最短路であることをいう．

リング C_n 上のルーティング R に対して R が "一様 "(uniform) ルーティング [3] であるとは，ある正の整数 $m(<n)$ と正の整数集合 $\{b_1,b_2,...,b_m\}$ に対して R はリング上で各点から出る長さ $b_i(1\leq i\leq m)$ の路をすべて持つことである．つまり，$R=\{p(x,y)\mid |p(x,y)|\in\{b_1,b_2...,b_m\}\ (x,y\in V(C_n))\}$ となる．図 1 に，$n=8,m=2,b_1=1,b_2=3$ の場合の一様路線グラフ $C_8(R)$ を示す．



$C_8(R),m=2,b_1=1,b_2=3$

図 1: 一様路線グラフ

本稿では n 点リング C_n を対象とし，全対全通信要請 I_A を考える．故障 F は C_n の任意の 1 点とするとき，以下の性質を満たすルーティングを示す．

(1) $RD_{out}(R_1)=2(n-1)$,$w_f(C_n,I_A,1)\geq\frac{n^2-n}{2}$ となる 1-ホップ解であり一様かつ 2 重なルーティング R_1

(2) $RD_{out}(R_2^{uni})=4\sqrt{3}\sqrt{\frac{n+8}{2}}+2$
$\frac{3n-1}{2}\sqrt{\frac{n+7}{6}}-\frac{25n}{12}+\frac{73-27\sqrt{15}}{12}$
$<w_f(C_n,I_A,R_2^{uni},2)$
$<\frac{47n+86}{24}\sqrt{\frac{n+8}{6}}+\frac{3n}{4}+\frac{1}{2}$ となる 2-ホップ解であり一様かつ最短なルーティング R_2^{uni}

(3) $RD_{out}(R_2)=n-1$,$w_f(C_n,I_A,R_2,2)<\frac{3n}{2}-1$ となる 2-ホップ解ルーティング R_2

(4) $RD_{out}(R_3)=4\sqrt{n}-1$,$w_f(C_n,I_A,R_3,3)<3n+5\sqrt{n}+5$ となる 3-ホップ解ルーティング R_3

3 1-ホップ ルーティング

3.1 最短かつ 2 重なルーティング

n は 5 以上の整数とする．故障集合 F を C_n/F が強連結となる任意の故障とする．故障がリング上の連続した点の集合であるならば故障は 1 点以上でもよい．I_A/F に対する 1-ホップ解となり一様かつ 2 重なルーティング R_1 を示す．故障を考慮した上で I_A を実現するために，すべての $i,j(0\leq i,j\leq n-1,i\neq j)$

に対して x_i, x_j 間を結ぶ時計回りの路と反時計回りの路 (図 2 参照) のすべてをルーティング R_1 が持つようにする．すなわち，$R_1 = \{p(x_i, x_j) \mid |p(x_i, x_j)| \in \{1, 2, ...n-1\},\ x_i, x_j \in V\}$ と定義される．このルーティング R_1 は一様であり，各 2 点間の路はふたつであるので 2 重である．各 2 点 x_i, x_j 間のふたつの路は点独立であるので，x_i, x_j を含まない F に対してはどちらかの路を用いることで $req(x_i, x_j)$ を満たす．

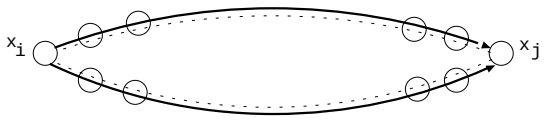


図 2: 2 重の路

定理 1
$C_n(n \geq 5)$ におけるルーティング $R_1 = \{p(x_i, x_j) \mid |p(x_i, x_j)| \in \{1, 2, ...n-1\},\ x_i, x_j \in V(C_n)\}$ とする．このとき C_n/F が強連結となる任意の故障 F に対して R_1 は一様かつ 2 重であり R_1/F は C_n/F における I_A/F の 1-ホップ解である．

3.2 R_1 の路線出次数と色数

R_1 の路線次数を求める．R_1 は一様であるのですべての点の次数は等しく，各点の出次数も等しい．R_1 の定義から各点の出次数は $2 \cdot (n-1)$ であるので $RD_{out}(R_1) = 2n-2$ となる．

次に R_1 に対する色数をもとめるのに次の補題 1, 補題 2 を用いる．

補題 1 [4]
n は 5 以上の整数とする．$Q = \{q_1, q_2, ...q_h\}$ は $\sum_{i=1}^{h} q_i = n$ であるような正の整数集合とする．
$I_Q = \{req(x_i, x_{(i+q_1) \bmod n}), req(x_i, x_{(i+q_2) \bmod n}), ... , req(x_i, x_{(i+q_h) \bmod n}) | 0 \leq i \leq n-1\}$
$\bigcup \{req(x_i, x_{(n+i-q_1) \bmod n}, req(x_i, x_{(n+i-q_2) \bmod n}, \cdots , req(x_i, x_{(n+i-q_h) \bmod n} | 0 \leq i \leq n-1\}$ は C_n 上のすべての点 x_i から $q \in Q$ 離れた点への要求の集合とする．
$R_Q = \{p(x_i, x_j) \mid |p(x_i, x_j)| \in Q,\ x_i, x_j \in V\}$ は C_n 上の $|p(x, y)| \in Q$ となるすべての路 $p(x, y)$ を含むルーティングとする．このとき，$w(C_n, I_Q, R_Q, 1) = n$ である． □

補題 2 [3] n は 5 以上の整数とする．$Q = \{q_1, q_2, ...q_h\}$ は $\sum_{i=1}^{h} q_i < n$ であるような正の整数集合とする．要請 $I_Q = \{req(x, y) | d(x, y) \in Q,\ x, y \in V\}$ は C_n 上で $d(x, y) \in Q$ となるすべての要求 $req(x, y)$ の集合である．$R_Q = \{p(x, y) \mid |p(x, y)| \in Q,\ x, y \in V\}$ は C_n 上で $|p(x, y)| \in Q$ となるすべての路 $p(x, y)$ の集合であり，それらの路はすべて最短である．$w(G, I, R, j)$ は G, I, R, j に対する色数の最小数を表す．このとき

(a) : $\sum_{i=1}^{h} q_i$ が n を割り切るならば，
$$w(C_n, I_Q, R_Q, 1) = \sum_{i=1}^{h} q_i$$
(b) : $n \bmod \sum_{i=1}^{h} q_i = 1$ ならば，
$$w(C_n, I_Q, R_Q, 1) \leq \sum_{i=1}^{h} q_i + 1$$
(c) : $\sum_{i=1}^{h} q_i < l$ ならば，
$$w(C_n, I_Q, R_Q, 1) \leq w(C_n, I_l, R_l, 1)$$

$I_l = \{req(x, y) | d(x, y) = l,\ x, y \in V\}$ は C_n 上の距離が l となるすべての点対の要求の集合である．また，$R_l = \{p(x, y) \mid |p(x, y)| = l,\ x, y \in V\}$ は C_n 上で $|p(x, y)| = l$ となるすべての路 $p(x, y)$ の集合である． □

補題 1, 補題 2-(a) を用いて R_1 の色数をもとめる．

- n は 2 で割り切れるとする．
  補題 1 において，$Q = \{i, n-i\}, i(1 \leq i \leq \frac{n}{2}-1)$ は整数とすれば，各 i に対してちょうど n 色となる．よって合計で $(\frac{n}{2}-1) \cdot n = \frac{(n-2)n}{2}$ 色である．
  $Q = \{\frac{n}{2}\}$ とすれば長さが $\frac{n}{2}$ の路は最短の路であり，$\frac{n}{2}$ は n を割りきるので，補題 2 が適用できちょうど $\frac{n}{2}$ 色必要となる．以上より，長さが $\{1, 2, ...n-1\}$ に含まれるすべての路を考慮したことになる．
  よって色数の総合計は，$\frac{(n-2)n}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$ である．

- n は 2 で割り切れないとする．
  補題 1 において $Q = \{i, n-i\}, i(1 \leq i \leq \frac{n-1}{2})$ は整数とすれば，各 i に対してちょうど n 色となる．これで長さが $\{1, 2, ...n-1\}$ に含まれるすべての路を考慮したことになり，総合計は，$(\frac{n-1}{2}) \cdot n = \frac{n^2-n}{2}$ 色となる．

以上より，$w_f(C_n, I_A, R_1, 1) \leq \frac{n^2-n}{2}$ である．よって次の定理がえられる．

定理 2
ルーティング R_1 に対する路線出次数と必要な色数は, 次式によって与えられる．

$$RD_{out}(R_1) = 2n-2$$
$$w_f\,(C_n, I_A, R_1, 1) \leq \frac{n^2-n}{2}$$

4 2-ホップ ルーティング

4.1 一様かつ最短なルーティング

n は 5 以上の整数とする．F を C_n/F が強連結となる任意の故障とする．故障がリング上の連続した点の集合であるならば故障は 1 点以上でもよい．I_A/F に対する 2-ホップ解となり一様かつ最短なルーティング R_2^{uni} を示す．

R_2^{uni} は高々ふたつの路の連接によってルーティング R_1 に含まれるすべての路が得られればよい．(図 3 参照)．R_1 に含まれる路の長さは 1 から $n-1$ の間であるので，B を要素どうしの高々一回の和で 1 から $n-1$ までがえられる正の整数集合とするとき

$R_2^{uni} = \{p(x,y) \mid |p(x,y)| \in B,\ x,y \in V\}$ と定義する．こうすることで長さ $l_1, l_2 \in B$ の路を用いてすべての点から l_1, l_2, l_1+l_2 離れた点へ到達できるので，B の仮定からすべての点から $l(1 \le l \le n-1)$ 離れた点へ 2-ホップで到達できる．このとき相異なる任意の点 x_i から $x_j (0 \le i,j \le n-1, i \ne j)$ へのふたつの路は 1-ホップのときと同様に点独立であるので，故障 F に対してもどちらかの路を用いて到達することができる．よって

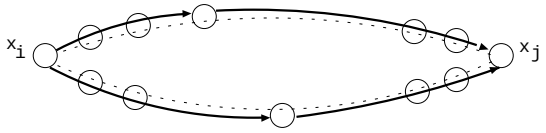


図 3: 路の連接

次に，要素どうしの高々一回の和で 1 から $n-1$ までがえられる正の整数集合 B をもとめる．

補題 3 [4]
k,m は正の整数とする．次のように整数集合 B を定義する．

$B = B^1 \bigcup B^2 \bigcup B^3 \bigcup B^4 \bigcup B^5$
$B^1 = \{1, 2, ..., k\}$
$B^2 = \{2k+1, 2k+1+(k+1), ..., 2k+1+(t-1)(k+1)\}, t = \left\lceil \frac{\lfloor m/2 \rfloor - 2k - 1}{k+1} \right\rceil$
$B^3 = \{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1, ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + k - 1\}$
$B^4 = \{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2k, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2k + (k+1), ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 2k + (s-1)(k+1)\}, s = \left\lceil \frac{m - \lfloor m/2 \rfloor - 3k}{k+1} \right\rceil$
$B^5 = \{m-k, m-k+1, ..., m\}$

このとき，集合 $\{1, 2, ..., 2m\}$ のすべての整数は B のふたつの要素の高々*1*回の和を求めることでえられる． □

必要な色数を減らすためには路の数を減らす，すなわち $|B|$ を減らすことが考えられる．
$|B| = |B^1| + |B^2| + |B^3| + |B^4| + |B^5|$ より
$|B| = k + \left\lceil \frac{\lfloor m/2 \rfloor - 2k - 1}{k+1} \right\rceil + k + \left\lceil \frac{m - \lfloor m/2 \rfloor - 3k}{k+1} \right\rceil + k + 1$
$< 3k + \frac{m-5k-1}{k+1} + 3 = \frac{3k^2+k+m+2}{k+1}$
m は正の整数，$k \ge 1$ より $k = -1 + \sqrt{\frac{m+4}{3}}$ のとき $\frac{3k^2+k+m+2}{k+1}$ は最小となる．また k は整数より $k = -1 + \left\lceil \sqrt{\frac{m+4}{3}} \right\rceil$ とすると $|B| < 2\sqrt{3}\sqrt{m+4} + 1$ である．以上より，次の補題がえられる．

補題 4
m は正の整数とし $k = -1 + \left\lceil \sqrt{\frac{m+4}{3}} \right\rceil$ とする．
このとき，集合 B の要素どうしの高々*1*回の和で集合 $\{1, 2, ..., 2m\}$ を作ることができ，集合 B は高々 $2\sqrt{3}\sqrt{m+4}+1$ 個の整数を含む．

ここで，C_n の直径は $D(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であり，n は整数であるので，$2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \ge n-1$ である．よって，$m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とし，C_n のすべての点 x が $d(x,y) \in B$ となるすべての点 y への路を持つならば，補題 4 よりすべての点は C_n のすべての点と高々ふたつの路の連接で到達できる．R_2^{uni} はそのような路をすべて持つならば，それらの路の長さは高々 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であるので R_2^{uni} は最短である．

定理 3
$m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とし，ルーティング $R_2^{uni} = \{p(x,y) \mid |p(x,y)| \in B,\ x,y \in V(C_n)\}$ とする．
このとき C_n/F が強連結となる任意の故障 F に対して R_2^{uni} は一様かつ最短であり R_2^{uni}/F は C_n/F における I_A/F の 2-ホップ解である．

4.2 R_2^{uni} の路線出次数と色数

R_2^{uni} の路線次数を求める．R_2^{uni} は一様であるので各点の出次数は等しい．R_2^{uni} の定義と集合 B は高々 $2\sqrt{3}\sqrt{m+4}+1 \le 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{n+8}{2}}+1$ 個の整数を含むことから各点の出次数は高々 $2 \cdot (2\sqrt{3}\sqrt{\frac{n+8}{2}} + 1)$ であるので $RD_{out}(R_2^{uni}) \le 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{n+8}{2}} + 2$ となる．

4.2.1 色数の上界

補題 2 を用いて R_2^{uni} の色数の上界をもとめる．

- n は 2 で割り切れると仮定する．
  このとき，$m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ より，m は n を割り切る．

  整数 $i, 1 \le i \le k$ に対して $Q = \{i, m-i\}$ とすると補題 2-(a) より各 i に対して色数は m 色である．$Q = \{m\}$ とすると同様に m 色となる．よって，合計では $m \cdot k + m = m(k+1)$ 色となる．これで，長さが B^1, B^5 に含まれる路はすべて考慮したことになる．

  B^2 の要素の値は高々 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であるので，B^2 の任意の二つの要素の和は高々 $2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le m$ となり，$Q = \{b_1, b_2\}$ $(b_1, b_2 \in B^2, b_1 \ne b_2)$ とすると $b_1 + b_2 \le m$ であるので，補題 2-(a) または補題 2-(c) が適用でき高々 m 色となる．また $|B^2| = t$ であるので，そのような Q は高々 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 個作られる．よって，合計で高々 $m\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 色となる．

  次に B^3 について考える．B^3 の任意の三つの要素を $b_1, b_2, b_3 (b_1 \ne b_2 \ne b_3 \ne b_1)$ とする．このとき，$b_1+b_2+b_3 \le (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + k - 3) + (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + k - 2) + (\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + k - 1) < \frac{3m}{2} + \sqrt{3}\sqrt{m+4} - 6 < 2m$ であるので，$Q = \{b_1, b_2, b_3\}$ として補題 2-(c) を適用すると高々 $2m$ 色となる．また $|B^3| = k$ であるので，そのような Q は高々 $\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 個作られる．よって，合計で高々 $2m\lceil \frac{k}{3} \rceil$ 色となる．

B^4 の要素はすべて高々mであるので，補題 2-(c) から各要素に対し高々m 色，$|B^4| = s$ であるので合計で高々m·s 色となる．

以上から総合計で高々$m(k+1) + m\lceil\frac{t}{2}\rceil + 2m\lceil\frac{k}{3}\rceil + ms$ 色となる．

- n は 2 で割り切れないと仮定する．
このとき $m = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor = \frac{n-1}{2}$ となるので，$n \bmod m = 1$，$n \bmod 2m = 1$ となる．よって，$Q = \{q_1, q_2, ...q_h\}$ に対して，$\sum_{i=1}^{h} q_i \leq m$ ならば補題 2-(b) より高々$m+1$ 色，$\sum_{i=1}^{h} q_i \leq 2m$ ならば高々$2m+1$ 色となる．ここで集合 Q における路の長さの組み合わせは n が 2 で割り切れる場合と同じにすれば，各 Q に対して色数は高々1 増えるだけである．以上から総合計で高々$(m+1)(k+1) + (m+1)\lceil\frac{t}{2}\rceil + (2m+1)\lceil\frac{k}{3}\rceil + (m+1)s$ 色となる．

n は 2 で割り切れない場合を R_2^{uni} の色数の上界として計算する．

$w_f\left(C_n, I_A, R_2^{uni}, 2\right)$
$< \frac{5mk}{3} + \frac{3m}{2} + \frac{4k}{3} + \frac{1}{2} + \frac{(m+1)(3m+10)}{4(k+1)}$
$k = -1 + \left\lceil\sqrt{\frac{m+4}{3}}\right\rceil$ を代入をして
$w_f(C_n, I_A, R_2^{uni}, 2) < \frac{47m+43}{12}\sqrt{\frac{m+4}{3}} + \frac{3m}{2} + \frac{1}{2}$
$m = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor \leq \frac{n}{2}$ を代入して
$w_f(C_n, I_A, R_2^{uni}, 2) < \frac{47n+86}{24}\sqrt{\frac{n+8}{6}} + \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}$ がえられる．

4.2.2 色数の下界

補題 5 [4]
n は 5 以上の整数,$l < n$ は正の整数とする．
$I_l = \{req(x,y) | d(x,y) = l,\ x, y \in V\}$ は C_n 上で $d(x,y) \in l$ であるようなすべての点対 x, y に対する要求の集合であるとし，$R_l = \{p(x,y) \mid |p(x,y)| = l,\ x, y \in V\}$ は $|p(x,y)| = l$ となる路 $p(x,y)$ をすべて含むルーティングとする．
このとき，$w_f(C_n, I_l, R_l, 1) \geq l$ である． □

補題 5 から長さ l の路に対して色数は少なくとも l 色であるので，集合 B の要素の和の合計は 2-ホップ解に必要な色数の下界となる．ここで整数集合 A に対し $\sum A$ は，集合 A の要素の和の合計を表すものとする．各 $B^i (1 \leq i \leq 5)$ の要素の列は等差数列とみなせるので，

$\sum B^1 = \frac{k(k+1)}{2}$
$\sum B^2 \geq \frac{\lfloor m/2\rfloor - 2k - 1}{2(k+1)}\left(\lfloor\frac{m}{2}\rfloor + k\right)$
$\sum B^3 = \frac{k(2\lfloor m/2\rfloor + k - 1)}{2}$
$\sum B^4 \geq \frac{m - \lfloor m/2\rfloor - 3k}{2(k+1)}\left(m + \lfloor\frac{m}{2}\rfloor - 1\right)$
$\sum B^5 = \frac{(k+1)(2m-k)}{2}$

$\sum B = \sum B^1 + \sum B^2 + \sum B^3 + \sum B^4 + \sum B^5$
$> m\left(\frac{3k}{2} + 1\right) + \frac{k^2}{2} - \frac{3k}{2} + \frac{-2k^2 - 5km + 2k + m^2 - m}{2(k+1)}$
$k = -1 + \left\lceil\sqrt{\frac{m+4}{3}}\right\rceil$ を代入して
$\sum B > (3m+1)\sqrt{\frac{m+4}{3}} - \frac{25m}{6} + \frac{73 - 27\sqrt{15}}{12}$
$m = \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ を代入して $\quad (\frac{n-1}{2} \leq \lfloor\frac{n}{2}\rfloor \leq \frac{n}{2})$
$\sum B > \frac{3n-1}{2}\sqrt{\frac{n+7}{6}} - \frac{25n}{12} + \frac{73 - 27\sqrt{15}}{12}$ がえられる．
以上より，$w_f(C_n, I, R_2^{uni}, 2) > \frac{3n-1}{2}\sqrt{\frac{n+7}{6}} - \frac{25n}{12} + \frac{73 - 27\sqrt{15}}{12}$ である．

よって次の定理がえられる．

定理 4
R_2^{uni} の路線出次数と色数は次式で表される．

$$RD_{out}(R_2^{uni}) = 4\sqrt{3}\sqrt{\frac{n+8}{2}} + 2$$

$$\frac{3n-1}{2}\sqrt{\frac{n+7}{6}} - \frac{25n}{12} + \frac{73 - 27\sqrt{15}}{12} < w_f(C_n, I_A, R_2^{uni}, 2) < \frac{47n+86}{24}\sqrt{\frac{n+8}{6}} + \frac{3n}{4} + \frac{1}{2}$$

4.3 色数が $O(n)$ となる 2 ホップ解

n は 4 以上の整数とする．故障集合 F は任意の 1 点とする．I_A/F に対する 2-ホップ解であり色数は $O(n)$ となるルーティング R_2 を示す． C_n 上の点に対して点 $a = x_0$ と点 $b = x_1$ を定め，a から C_n の直径だけ離れた点を $q = x_{\lfloor n/2\rfloor}$ とし $p = x_{\lfloor n/2\rfloor + 1}$ とする (図 4 参照)．点 x は a, b, p, q を除く任意の点とする．1-ホップ目には，x から a と b の距離の近い方へ最短路を用いて到達させ，その最短路とは反対の向きの路を用いて距離の遠い方へ到達させる．x から p, q への路も同様の条件で配置する．p または q（a または b）から a と b（p と q）への路も同様の条件で配置する．2-ホップ目には，a, b, p, q からすべての点へ最短の路を用いて到達させる．図 4 は x と $\{a, b, p, q\}$ の間の路を示し，{a,b,p,q} 間の路を図 5 に示す．

このときの路の集合 R_2 は次のように定義される．

$$\begin{aligned} R_2 = \{ &\overrightarrow{p}(x,a), \overleftarrow{p}(x,b), \overrightarrow{p}(x,q), \overleftarrow{p}(x,p) \mid x \in V/\{a,b,p,q\}\} \\ \bigcup \{ &\overrightarrow{p}(a,q), \overleftarrow{p}(a,p), \overrightarrow{p}(b,q), \overleftarrow{p}(b,p), \overrightarrow{p}(p,a), \\ &\overleftarrow{p}(p,b), \overrightarrow{p}(q,a), \overleftarrow{p}(q,b)\} \\ \bigcup \{ &p_{min}(a,x), p_{min}(b,x), p_{min}(q,x), p_{min}(p,x) \mid x \in V/\{a,b,p,q\}\} \\ \bigcup \{ &\overrightarrow{p}(a,b), \overleftarrow{p}(b,a), \overrightarrow{p}(q,p), \overleftarrow{p}(p,q)\} \end{aligned}$$

補題 6 [4]
R_2 の路を用いることで高々ひとつの点の故障に対して故障した点を除くすべての点は a または b に高々*1*-ホップで到達でき，すべての点は p または q に高々*1*-ホップで到達できる． □

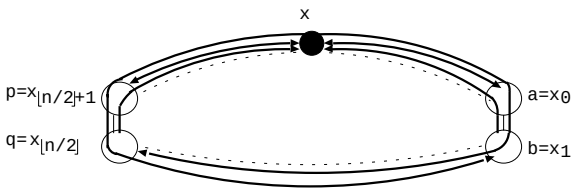


図 4: 2-ホップ解（x に関する路）

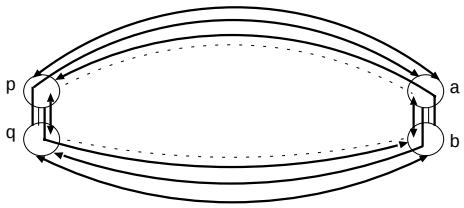


図 5: 2-ホップ解 (a,b,p,q 間の路)

補題 7 [4]
R_2 の路を用いることで，高々ひとつの点の故障に対して故障した点を除くすべての点へ a と b から，もしくは p と q から高々*1*-ホップで到達できる．□

R_2 の路を用いることで，任意の故障に対して補題 6 よりすべての点は a または b に高々1-ホップで到達でき，p または q に高々1-ホップで到達できる．そして補題 7 よりすべての点へ a と b から，もしくは p と q から高々1-ホップで到達できるので次の定理が成り立つ．

定理 5
$C_n(n \geq 4)$ におけるルーティング R_2 に対して，R_2/F は C_n/F における I_A/F の *2*-ホップ解となる．

4.4 R_2 の路線次数と色数

R_2 の路線次数をもとめる．点 a,b,p,q の次数が最大となるのは明らかである．そこで点 a の次数をもとめる．R_2 の定義より a から出る路の数を数えることで点 a の出次数は $2+(n-4)+1=n-1$ であることがわかる．点 b,c,d についても次数は同じである．よって $RD_{out}(R_2)=n-1$ となる．

次に R_2 の色数をもとめる．まず時計回りの向きの路に必要な色数を考える．図 5 に示した点 a,b,p,q 間の路には 2 色必要になる．a と p の間の点を $x(x \in \{x_{\lfloor n/2\rfloor+2},\ldots,x_{n-1}\})$，$b$ と q の間の点を $y(y \in \{x_2,\ldots,x_{\lfloor n/2\rfloor-1}\})$ とする．
$\overrightarrow{p}(p,x),\overrightarrow{p}(x,a),\overrightarrow{p}(b,y),\overrightarrow{p}(y,q)$ の 4 つの路に 1 色を割り当てる．x,y はそれぞれ高々 $\lceil n/2\rceil$ であるので，このような路には高々 $\lceil n/2\rceil$ 色必要となる．さらに $\overrightarrow{p}(q,x)$ と $\overrightarrow{p}(x,q)$ に 1 色を割り当て，$\overrightarrow{p}(a,y)$ と $\overrightarrow{p}(y,a)$ に 1 色を割り当てる．$x+y=n-4$ であるのでこれにはちょうど $n-4$ 色必要となる．よって合計で高々 $2+\lceil n/2\rceil+(n-4)<3n/2-1$ 色必要となる．反時計回りの路についても同様である．以上より $w_f(C_n,I_A,R_2,2)<3n/2-1$ となる．

よって次の定理がえられる．

定理 6
$C_n(n \geq 4)$ におけるルーティング R_2 に対する路線出次数と必要な色数は，次式によって与えられる．

$$RD_{out}(R_2)=n-1$$
$$w_f\,(C_n,I_A,R_2,2)<\tfrac{3n}{2}-1$$

5 3-ホップ ルーティング

5.1 3 ホップ解

n は 4 以上の整数とする．故障集合 F は任意の 1 点とする．I_A/F に対する 3-ホップ解であり路線出次数は $O(\sqrt{n})$，色数は $O(n)$ となるルーティング R_3 を示す．
C_n 上の点を $\lceil\sqrt{n}\rceil$ 個ずつに区切って考える．具体的には，$1 \leq i \leq k=\lceil n/\lceil\sqrt{n}\rceil\rceil$ であるとして，点 $s_i=x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot(i-1)}$ とし点 $t_i=x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot i-1}$ とするとき，$V_i=\{s_i=x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot(i-1)},x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot(i-1)+1},\cdots,x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot i-2},t_i=x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot i-1}\}$ と定義する．n が $\lceil\sqrt{n}\rceil$ で割りきれるとは限らないので $i=k$ のときは $V_k=\{s_k=x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot(k-1)},x_{\lceil\sqrt{n}\rceil\cdot(k-1)+1},\cdots,x_{n-2},t_k=x_{n-1}\}$ と定義する (図 6-(a) 参照)．
点 $x \in V_i$ から点 $y \in V_j$ $(1 \leq i,j \leq k)$ へのルーティングの基本的な流れは次のようになる．1-ホップ目に x から $\{t_{i-1},s_i,t_i,s_{i+1}\}$ へ最短路を用いて到達させ (図 6-(a) 参照)，2-ホップ目に $\{t_{i-1},s_i,t_i,s_{i+1}\}$ から $\{t_{j-1},s_j,t_js_{j+1}\}$ へ到達させる (図 6-(b)，図 6-(c) 参照)．そして 3-ホップ目に $\{t_{j-1},s_j,t_j,s_{j+1}\}$ から y へ最短路を用いて到達させる (図 6-(a) 参照) ことで x から y へ 3-ホップで到達できる．このときの路の集合 R_3 は次のように定義される．

$$\begin{aligned}R_3=\{&p_{min}(x,s_i),p_{min}(s_i,x),p_{min}(x,t_i),\\&p_{min}(t_i,x)|x \in V_i/\{s_i,t_i\},1 \leq i \leq k\}\}\\
\bigcup\{&p_{min}(x,s_2),p_{min}(s_2,x),p_{min}(x,t_k),p_{min}(t_k,x)\\&|x \in V_1/\{s_1,t_1\}\}\\
\bigcup\{&p_{min}(x,s_1),p_{min}(s_1,x),p_{min}(x,t_{k-1}),\\&p_{min}(t_{k-1},x)|x \in V_k/\{s_k,t_k\}\}\\
\bigcup\{&p_{min}(x,s_{i+1}),p_{min}(s_{i+1},x),p_{min}(x,t_{i-1}),\\&p_{min}(t_{i-1},x)|x \in V_i/\{s_i,t_i\},2 \leq i \leq k-1\}\}\\
\bigcup\{&p_{min}(t_i,s_{(i \bmod k)+1}),p_{min}(s_{(i \bmod k)+1},t_i)\\&|1 \leq i \leq k\}\\
\bigcup\{&\overrightarrow{p}(s_i,s_j),\overleftarrow{p}(s_j,s_i),\overrightarrow{p}(t_i,t_j),\overleftarrow{p}(t_j,t_i)\\&|i<j,(1 \leq i,j \leq k)\}\\
\bigcup\{&\overrightarrow{p}(s_1,t_1),\overleftarrow{p}(t_1,s_1),\overrightarrow{p}(s_k,t_k),\overleftarrow{p}(t_k,s_k)\}\\
\bigcup\{&\overrightarrow{p}(s_1,t_i),\overleftarrow{p}(t_i,s_1),\overrightarrow{p}(s_i,t_k),\overleftarrow{p}(t_k,s_i)\\&|2 \leq i \leq k-1\}\\
\bigcup\{&\overrightarrow{p}(t_j,s_i),\overleftarrow{p}(s_i,t_j)\\&|i \leq j,2 \leq i \leq k,1 \leq j \leq k-1\}\\
\bigcup\{&\overrightarrow{p}(s_i,t_j),\overleftarrow{p}(t_j,s_i)\\&|i-j>1,2 \leq i \leq k,1 \leq j \leq k-1\}\end{aligned}$$

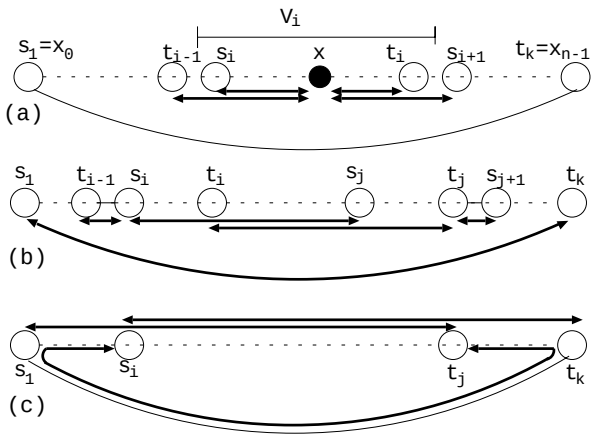


図 6: 3-ホップ解

補題 8 [4]
R_3 の路を用いることで，高々ひとつの点の故障に対して点 $x \in V_i(1 \leq i \leq k)$ から $t_{i-1}(i-1=0$ ならば $t_k)$ と s_i へ，もしくは t_i と $s_{(i \bmod k)+1}$ へ 1-ホップで到達できる． □

補題 9 [4]
R_3 の路を用いることで，高々ひとつの点の故障に対して $t_{i-1}(i-1=0$ ならば $t_k)$ と s_i から，もしくは t_i と $s_{(i \bmod k)+1}$ から点 $x \in V_i(1 \leq i \leq k)$ へ 1-ホップで到達できる． □

補題 10 [4]
R_3 の路を用いることで，高々ひとつの点の故障に対して，$1 \leq i \leq k$ とするとき $t_i = x_{i \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil - 1}$ または $s_{(i \bmod k)+1} = x_{i \cdot \lceil \sqrt{n} \rceil}$ から
点 $y \in \{s_1, ..., s_k, t_1, ..., t_k\}/\{t_i, s_{(i \bmod k)+1}\}$ へ 1-ホップで到達できる． □

補題 11 [4]
R_3 の路を用いることで，高々ひとつの点の故障に対して点 $x, y \in \{s_1, s_2, ..., s_k, t_1, t_2, ..., t_k\}, x \neq y$ とするとき x から y へ高々2-ホップで到達できる． □

$x, x' \in V/\{s_1, ..., s_k, t_1, .., t_k\}$ とし，$y, y' \in \{s_1, ..., s_k, t_1, .., t_k\}$ とする．R_3 の路を用いることで任意の故障に対して補題 8，補題 10，補題 9 より x から x' に高々3-ホップで到達でき，補題 11 より y から y' に高々2-ホップで到達できる．そして補題 8，補題 10 より x から y に高々2-ホップで到達でき，補題 11，補題 9 より y から x に高々3-ホップで到達できる．よって次の定理がえられる．

定理 7
$C_n(n \geq 4)$ におけるルーティング R_3 に対して，R_3/F は C_n/F における I_A/F の 3-ホップ解となる．

5.2 R_3 の路線出次数と色数

R_3 の路線次数をもとめる．点 $s_i, t_j(1 \leq i, j \leq k = \lceil n/\lceil \sqrt{n} \rceil \rceil)$ のどれかの次数が最大となるのは明らかである．R_3 の定義より s_i の出次数を数える．点 $x \in V_i/\{s_i, t_i\}$ へ出る路が高々$\lceil \sqrt{n} \rceil - 2$ 個，同じく点 $x \in V_{i-1}/\{s_{i-1}, t_{i-1}\}$ へ出る路が高々$\lceil \sqrt{n} \rceil - 2$ 個ある．$s_j(i \neq j, 1 \leq j \leq k)$ へ出る路が $k-1$ 個あり，$t_j(1 \leq j \leq k-1)$ へ出る路が k 個ある．$k \leq \lceil \sqrt{n} \rceil$ であるから，s_i から出る路の数は合計で高々$2(\lceil \sqrt{n} \rceil - 2) + (k-1) + k \leq 4\lceil \sqrt{n} \rceil - 5 < 4\sqrt{n} - 1$ となる．$t_i(1 \leq i \leq k)$ の出次数も s_i の場合と同様であるので $RD_{out}(R_3) < 4\sqrt{n} - 1$ となる．

次に R_3 の色数をもとめる．まず図 6-(a) に示した点 $x \in V_i(1 \leq i \leq k)$ と $\{t_{i-1}, s_i, t_i, s_{i+1}\}$ 間の路には $2(\lceil \sqrt{n} \rceil - 2)$ 色必要になる．$s_i, s_j(i \neq j, 1 \leq i, j \leq k)$ 間の路にはそれぞれ 1 色を割り当てることで $k(k-1)$ 色となり，t_i, t_j 間の路にも同様に $k(k-1)$ 色となる．$s_1, t_i(1 \leq i \leq k)$ 間の路と $s_i, t_k(1 \leq i \leq k)$ 間の路にはそれぞれ $k-1$ 色ずつ必要であり，s_1, t_k 間の有向辺を共有する $s_i, t_j(2 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k-1)$ 間の路にはそれぞれ 1 色を割り当てることで $(k-1) \cdot (k-2)$ 色となる．t_i と $s_{(i \bmod k)+1}(1 \leq i \leq k)$ 間の最短路には 1 色を割り当てる．以上から合計で $2(\lceil \sqrt{n} \rceil - 2) + k(k-1) + 2(k-1) + (k-1)(k-2) + 1 = 2\lceil \sqrt{n} \rceil + 3k^2 - 3k - 3 < 3n + 5\sqrt{n} + 5$ 色となる．よって $w_f(C_n, I_A, R_3, 3) < 3n + 5\sqrt{n} + 5$ である．よって次の定理がえられる．

定理 8
R_3 の路線出次数と色数は，次式によって与えられる．

$$RD_{out}(R_3) = 4\sqrt{n} - 1$$
$$w_f(C_n, I_A, R_3, 3) < 3n + 5\sqrt{n} + 5$$

6 あとがき

今後の課題としてルーティングの性質に今回とは違うものを与えた場合のルーティングや，他のグラフに対するルーティングの考察などがあげられる．

参考文献

[1] S.S.Wagner and H.kobrinski:"WDM Applications in Broadband Telecommunication Networks",IEEE Comm.,27,3,22-30(1989).

[2] J.-C.Bermond,L.Gargano,S.Perennes,and A.A.Rescigno: "Efficient collective communication in optical networks", Lecture Notes in Computer Science,1099,574-585(1996).

[3] Jaroslav Opatrny: "Uniform Multi-hop All-to-All Optical Routings in Rings", Lecture Notes in Computer Science,2000,237-246(2000).

[4] 高橋, 伊藤, 陳, 和田:"リング型 WDM 光通信ネットワークに対する耐故障性ルーティングについて", 名古屋工業大学電気情報工学科和田研究室テクニカルレポート,TR-2001-01(2001).