

# バタフライネットワークにおけるadaptiveな故障診断

岡下 綾 荒木 徹 柴田 幸夫

{aya, arakit, shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

群馬大学工学部 情報工学科  
〒376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

## 概要

多数のプロセッサが結合されたシステムにおいて、故障したプロセッサを自動的に識別するためのモデルとしてシステムレベルの故障診断が研究されている。これは、各プロセッサが他のプロセッサの状態を検査し、その検査結果を解析することによりシステム内の故障プロセッサを特定するものである。これに関して、Nakajimaにより、少ない検査数で故障診断を行うためのアプローチとしてadaptiveな診断が提案されている。本論文では、代表的なネットワークモデルの一つであるバタフライネットワークにおけるadaptiveな故障診断について考察し、少ない検査数とラウンド数で全ての故障を識別するアルゴリズムを設計する。

キーワード: 故障診断, PMC モデル, adaptive な故障診断, 同時  $t$  診断可能システム, バタフライネットワーク。

## On Adaptive Diagnosis of Butterfly Networks

Aya Okashita Toru Araki Yukio Shibata

{aya, arakit, shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

Department of Computer Science, Gunma University  
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma 376-8515

## Abstract

It is known that system-level diagnosis is a very important technique for identifying faulty processors in a system with a large number of processors. Processors can test other processors, and then output the test results. The aim of diagnosis is to determine correctly the faulty/fault-free status of all processors. Nakajima proposed the adaptive diagnosis which requires fewer tests in order to perform diagnosis correctly. In this paper, we present adaptive diagnosis algorithms for a system modeled by butterfly networks. The number of tests and testing rounds of adaptive diagnosis are found to be smaller than those of one-step diagnosis.

**Keywords:** System-level diagnosis, PMC model, adaptive diagnosis,  $t$ -diagnosable system, butterfly networks.

## 1 はじめに

多数のプロセッサが結合されているネットワークシステムにおいては、システム内に発生する故障の可能性が高くなるため、その耐故障化が重要な問題である。システムの耐故障性に関して、故障したプロセッサを自動的に識別する、システムレベルの故障診断が、システムの信頼性を高めるための重要な問題の一つとして研究が行われている。システムレベルの故障診断についての研究は、Preparata ら [12] によって提案されたモデルにその端を発する。これは、システム内の各プロセッサが互いの状態を検査し、その検査結果を解析することにより、故障プロセッサを識別するというものである。ここで、正常なプロセッサが行った検査の結果は信頼できるが、故障したプロセッサの検査結果は信頼できないものとする。このモデルは現在 PMC モデルと呼ばれており、システムを有向グラフで表すことにより、故障診断の問題を数学的に定式化したものである。

PMC モデルでは、各プロセッサがあらかじめ割り当てられた検査を実行し、その検査結果を解析することにより故障プロセッサを識別する。それに対して、Nakajima[11] によって提案された adaptive な診断では、プロセッサが行う検査をいくつかのステップに分けて実行することにより、検査数を減らし、診断を効率化することができる。ここで、各ステップで行う検査は、それ以前の検査結果から決定される。実際、 $n$  個のノードを持ち、 $t$  個以下のすべての故障を識別するためには、adaptive でない方法では少なくとも  $nt$  本のテストが必要である [12] のに対し、adaptive な方法では、すべてのノード間で通信が可能であるようなシステムにおいては、 $n+t-1$  本の検査で充分であることが示された [3]。

本報告では、バタフライネットワークにおける adaptive な診断について考察する。バタフライはハイパーキューブと類似の構造をもつネットワークであり、ハイパーキューブと並んで代表的なネットワークモデルとして知られている [10]。バタフライネットワークは、頂点の次数を増やさずに、結合する頂点数を増やすことができるという特徴をもつ。結合するプロセッサ数が非常に多くなると、ハイパーキューブによる結合では各頂点の次数も大きくなってし

まうため、それと類似の構造を持つネットワークが望まれる。同様の構造を持つネットワークとしては Cube-Connected Cycles (CCC) が広く知られている [13]。

本報告では、バタフライネットワークにおいて、少ない検査数とラウンド数で故障したプロセッサを識別するためのアルゴリズムについて考察する。そして、Kranakis ら [8] によるハイパーキューブ上の adaptive な診断と類似の結果が得られることを示す。

## 2 バタフライネットワーク

有向  $k$  進  $r$  次元バタフライ  $\vec{BF}(k, r)$  とは、 $k$  進  $r$  桁のベクトル  $\vec{x} = x_0x_1 \dots x_{r-1}$ ,  $0 \leq x_i \leq r-1$  と非負整数  $\ell$  のペア  $\langle \vec{x}; \ell \rangle$  で表される  $rk^r$  個の頂点を持つ。整数  $\ell$  をその頂点のレベルという。頂点  $\langle \vec{x}; \ell \rangle$  は頂点  $\langle \vec{x}'; \ell+1 \rangle$  へ有向辺を持つ。ここで、 $\vec{x}'$  は  $\vec{x}$  と  $\ell$  ビット目の要素のみが異なるベクトルである。ただし頂点のレベルについての演算は全て  $r$  を法とする。有向バタフライ  $\vec{BF}(k, r)$  の各辺から向きを削除することによって得られる無向グラフをバタフライ  $BF(k, r)$  と呼ぶ。図 1 に  $BF(3, 3)$  を示す。定義より、 $BF(k, r)$  の各頂点の次数は  $2k$  である。

## 3 故障診断可能システム

システムは無向グラフ  $G = (V, E)$  によってモデル化される。ここで、システム内の各ユニット（プロセッサ）とユニット間の通信リンクは、それぞれ  $G$  の頂点と辺に対応する。各ユニットは、通信リンクによって隣接するユニットの状態を検査することができる。ユニット  $u$  が  $v$  を検査することを、頂点の順序対  $(u, v)$  で表す。検査  $(u, v)$  の結果を、 $u$  が  $v$  を正常と判断したとき 0、故障と判断したとき 1 で表す。

検査  $(u, v)$  の集合  $A$  を、システム  $G = (V, E)$  の検査割り当てと呼ぶ。システムの検査割り当ては、有向グラフ  $T = (V, A)$  によって有向グラフにより表すことができる。すなわち、有向辺  $(u, v) \in A$  は、ユニット  $u$  が  $v$  を検査することを表す。与えられた検査割り当てに対し、その全ての検査結果の集合をシンドロームと呼ぶ。

システムは、故障の数が  $t$  を超えないという仮定のもとで、すべての故障ユニットを識別できるような

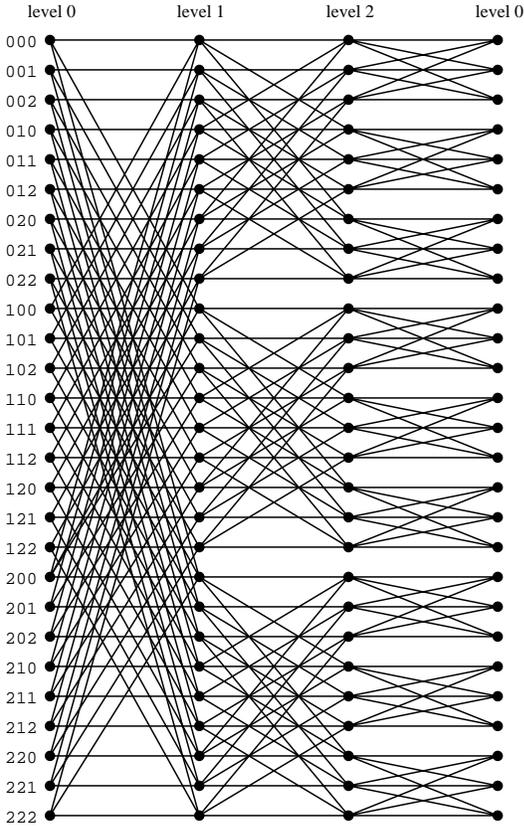


図 1: 3 進 3 次元バタフライ BF(3,3) .

検査割り当てが存在するとき、同時  $t$  診断可能であるという。同時  $t$  診断可能なシステムでは、ユニット数が  $2t + 1$  個以上であり、かつ各ユニットが少なくとも  $t$  個の他のユニットによって検査されなければならない [12]。システムが同時  $t$  診断可能であるための必要十分条件は、Hakimi and Amin[6] によって与えられた。

Preparata ら [12] による同時  $t$  診断は、与えられたシステムに対して、検査割り当てがあらかじめ定められており、すべての検査を実行した後に故障ユニットの識別を行うものであった。この方法では、システム全体で少なくとも  $nt$  回の検査を実行しなければならない。それに対して、Nakajima[11] によって提案された adaptive な診断では、検査割り当てをいくつかのステップに分けて実行する。ここで各ステップで実行される検査は、以前の検査結果を解析することによって決定される。Blecher[3] は、システムが完全グラフで表される場合に検査数  $n + t - 1$  で同時  $t$  診断が可能であることを証明し、さらに、この検査

数が最小であることを示した。また、adaptive な故障診断の評価には、検査数の他にラウンド数を用いる。各ユニットは、1 回の検査を実行するために 1 ラウンド必要とすると仮定する。また、二つの検査  $(u, v)$  と検査  $(x, y)$  は、 $u, v, x, y$  がすべて異なる時のみ並列に実行できるとする。論文 [2, 7] では、完全グラフで表されるネットワーク上では定数ラウンドにより同時  $t$  診断が可能であることが示されている。上記の研究では、完全グラフが考察の中心であった。それに対して、近年プロセッサ間の結合が制限されたネットワークにおける adaptive な故障診断についても、いくつかの研究が発表されている。Kranakis ら [9] により、木やサイクルといった単純な構造を持ったネットワークにおいて、最適、または最適に近い検査数で実行できるアルゴリズムを提案した。Feng ら [5] はハイパキューブにおける adaptive について考察し、検査数  $2^n([\log n] + 2)$ 、ラウンド数  $n + 4$  のアルゴリズムを示した。Kranakis and Pelc[8] はその結果を改良し、検査数  $2^n + 3n/2$  のアルゴリズムと、高々 11 ラウンドのアルゴリズムを与えた。Björklund[4] はハイパキューブにおいて最適な検査数  $2^n + n - 1$  ですべての故障を識別できることを示した。さらに高々 4 ラウンドで診断を行うアルゴリズムを与えている。

#### 4 バタフライにおける adaptive な診断

$k$  進  $r$  次元バタフライ  $BF(k, r)$ ,  $k \geq 2, r \geq 3$  は同時  $2k$  診断可能であることが示されている [1]。したがって、故障ユニットは高々  $2k$  個であるとする。本節では  $k \geq 2, r \geq 3$  とする。

$BF(k, r)$  と  $r - 1$  桁のベクトル  $\vec{x} = x_0x_1 \cdots x_{r-2}$ ,  $0 \leq x_i < k - 1$  に対して、 $C(\vec{x})$  を、次のような長さ  $kr$  のサイクルとする。本報告ではこれをリングと呼ぶ：

$$\begin{aligned} &\langle \vec{x}0; 0 \rangle, \langle \vec{x}0; 1 \rangle, \dots, \langle \vec{x}0; r - 1 \rangle, \\ &\langle \vec{x}1; 0 \rangle, \langle \vec{x}1; 1 \rangle, \dots, \langle \vec{x}1; r - 1 \rangle, \\ &\dots \\ &\langle \vec{x}(k - 1); 0 \rangle, \langle \vec{x}(k - 1); 1 \rangle, \dots, \langle \vec{x}(k - 1); r - 1 \rangle, \\ &\langle \vec{x}0; 0 \rangle. \end{aligned}$$

各リング  $C(\vec{x})$  上で、レベルの低い頂点からレベルの高い頂点へ検査を行うことを時計回りの検査と呼ぶ。BF(k, r) は  $k^{r-1}$  個のリングを持つ。明らかに、 $\vec{x} \neq \vec{y}$  ならば、 $C(\vec{x})$  と  $C(\vec{y})$  は共通の頂点を含まない。

検査結果が 0 であるような検査を **0-arrow** と呼び、リングにおける 0-arrow の極大列を **0-string** と呼ぶ。0-string の先頭の頂点を **top**、末尾の頂点を **bottom** と呼ぶ。1-arrow, 1-string も同様に定義される。

$\bar{x} \neq \bar{y}$  に対して、頂点  $u \in C(\bar{x})$  と  $v \in C(\bar{y})$  が隣接するとき、リング  $C(\bar{x})$  と  $C(\bar{y})$  は隣接するといひ、 $v$  は  $u$  の外近傍であるという。明らかに、リング  $C(\bar{x})$  と  $C(\bar{y})$  が隣接するための必要十分条件は  $\bar{x}$  と  $\bar{y}$  が 1 ビットのみ異なることである。

リングの時計回りのすべての検査結果が 0 であるとき、そのリングを **healthy** リングと呼び、検査結果 1 を含むリングを **unhealthy** リングと呼ぶ。

補題 4.1 healthy リングのすべての頂点は正常である。

証明。リングのすべての検査結果が 0 であるため、リング上のすべての頂点が正常であるか、すべての頂点が故障であるかのどちらかである。リングには  $rk$  個の頂点が存在し、 $rk > 2k$  であることから、すべての頂点が故障であるならば故障の数の仮定に矛盾する。■

バタフライ  $BF(k, r)$  における診断アルゴリズム  $\Delta$  **TWOWAY-DIAG** は、Algorithm 1 に示すような 3 ステップから成る。

---

**Algorithm 1** アルゴリズム  $\Delta$  **BUTTERFLY-DIAG**

---

ステップ 1 各リングを時計回りに検査し、healthy リングと unhealthy リングに分類する。healthy リング上のすべての頂点を正常と診断する。

ステップ 2 unhealthy リングのレベル 1 から  $r-2$  の頂点を、healthy リング上の外近傍から検査する。

ステップ 3 unhealthy リングのレベル 0 とレベル  $r-1$  の頂点を検査する。

---

補題 4.2 アルゴリズム  $\Delta$  **BUTTERFLY-DIAG** のステップ 1 は、検査数  $rk^r$ 、 $r$  が偶数ならば 2 ラウンド、 $r$  が奇数ならば 3 ラウンドで実行できる。

証明。 $r$  が偶数のとき、各リング上で、まず偶数レベルの頂点が奇数レベルの頂点を検査し、続いて奇数レベルの頂点が偶数レベルの頂点を検査することに

より、すべての検査を実行できる。よって 2 ラウンド必要となる。 $r$  が奇数のとき、1 ラウンドでレベル  $r-1$  の頂点を除くすべての偶数レベルの頂点が奇数レベルの頂点を検査し、次のラウンドで、奇数レベルの頂点が偶数レベルの頂点を検査する。最後にレベル  $r-1$  の頂点がレベル 0 の頂点を検査する。よって、3 ラウンドでステップ 1 を実行することができる。検査数については、すべての頂点が 1 回ずつ検査を行うため、 $rk^r$  個の検査が必要となる。■

ステップ 2 において、unhealthy リングが  $2k-1$  個以上存在したとき、各 unhealthy リング上には高々 2 個の故障しか存在しない。Kranakis ら [9] により、 $n$  個の頂点を持つリングにおいて、2 個以下の故障を、検査数高々  $n+1$ 、2 ラウンドで識別可能であることが示されている。したがって、unhealthy リングが高々  $2k-2$  個の場合を考える。

補題 4.3 unhealthy リングが高々  $2k-2$  個ならば、unhealthy リング上のレベル 1 からレベル  $r-2$  の頂点は、healthy リング上の外近傍を持つ。

証明。 $C$  を任意の unhealthy リングとする。 $C$  におけるレベル 1 からレベル  $r-2$  の各頂点は  $2k-2$  個の外近傍を持つ。 $C$  以外の unhealthy リングは高々  $2k-3$  個であるから、healthy リング上の外近傍を少なくとも一つ持つ。■

さらに、unhealthy リング上のレベル 1 から  $r-2$  の頂点に対して、healthy リング上の頂点を 1 対 1 に対応させることができる。

補題 4.4 unhealthy リングが高々  $2k-2$  個のとき、バタフライ  $BF(k, r)$  の unhealthy リング上のレベル 1 から  $r-2$  の頂点の集合を  $UH$  とし、 $UH$  の頂点と隣接する healthy リング上の頂点を  $H$  とする。このとき、 $UH$  と  $H$  を二部分割とする二部グラフには、 $UH$  のすべての頂点を含むマッチングが存在する。

証明。任意の  $S \subseteq UH$  に対し、 $S$  の頂点と隣接する healthy リング上の頂点の集合を  $N(S)$  とする。このとき  $|S| \leq |N(S)|$  となることが証明できれば、Hall の定理により補題が成立する。

$|S| = 1$  の時は、補題 4.3 により明らかに成り立つ。 $S$  を  $|S| > |N(S)|$  を満たす最小の濃度を持つ集合と

する． $S' = S \setminus \{v\}$  とすると， $S$  の最小性により  $S'$  は Hall の定理の条件を満たす．よって  $|N(S')| \geq |S'| = |S| - 1 > |N(S)| - 1$ ． $N(S') \subseteq N(S)$  であることから， $N(S) = N(S')$  かつ  $|S'| = |N(S)| = |N(S')|$  が成り立つ． $S'$  は Hall の定理を満たすので， $S'$  と  $N(S')$  の頂点の間に完全マッチングが存在する．このマッチングにより対応する 2 頂点をマッチする頂点と呼ぶ．また  $v$  を含む unhealthy リングを  $C$  とする．

$v$  の外近傍を  $x_1, x_2, \dots, x_{2k-2}$  とする． $x_1, \dots, x_p$  を unhealthy リング上の頂点とし， $x_i, i = 1, 2, \dots, p$  を含む unhealthy リングを  $C_i$  とする．また， $y_j, j = p+1, \dots, 2k-2$  を  $x_j$  とマッチする頂点とし， $y_j$  を含む unhealthy リングを  $C_j$  とする．もし  $y_j$  が  $v$  と異なるレベルの頂点ならば， $C_j$  は  $C$  と隣接しない． $y_{q+1}, \dots, y_{2k-2}, q \geq p$  を  $v$  と同じレベルの頂点とする．また  $z_l, l = q+1, \dots, 2k-2$  を  $y_l$  と隣接する healthy リング上の頂点とし，かつ  $v$  と異なるレベルにある頂点とする．最後に  $z_l$  とマッチする頂点を含む unhealthy リングを  $C_l, l = q+1, \dots, 2k-2$  とする．

上記の様に定めた  $2k-1$  個のリング  $C, C_1, C_2, \dots, C_{2k-2}$  は，パタフライの構造からすべて異なる unhealthy リングである．これは unhealthy リングの数を高々  $2k-2$  としていることに矛盾する．■

与えられた unhealthy リングに対して，Algorithm 2 に示すアルゴリズム RING-DIAG を用いることにより，unhealthy リング上のレベル 1 から  $r-2$  の頂点を検査できる．このとき，アルゴリズム RING-DIAG において，検査される頂点はレベル 1 から  $r-2$  の頂点であることに注意する．ポインタ CUR がレベル 0， $r-1$  の頂点  $v$  を指した場合，CUR は  $v$  の時計回りの近傍にシフトする．

**補題 4.5** アルゴリズム RING-DIAG は， $f$  個の故障を含む unhealthy リングのレベル 1 から  $r-2$  の頂点を，検査数  $f+1$ ，ラウンド数  $f+1$  で診断できる．特に  $f=1$  のとき，検査数 1，ラウンド数 1 で診断できる．

**証明．** アルゴリズム RING-DIAG において，CUR を正常な外近傍によって検査される頂点とする．検査結果が 1 のとき，CUR は故障である．検査結果が 0

---

#### Algorithm 2 アルゴリズム RING-DIAG

---

```

if ちょうど 1 つの 1-arrow が存在する then
    START  $\leftarrow$  0-string の bottom;
else if 0-arrow が存在する then
    START  $\leftarrow$  任意の 1-string の top から反時計回りの頂点;
else
    START  $\leftarrow$  任意の頂点;
end if
CUR  $\leftarrow$  START;
while リングに診断されていない頂点が存在 do
    CUR  $\leftarrow$  (CUR から時計回りの診断されていない最初の頂点);
    CUR を正常な外近傍から検査する;
    if 検査結果が 1 then
        CUR を故障と診断;
    else
        LAST  $\leftarrow$  CUR を含む 0-string の top;
        CUR から LAST までの全ての頂点を正常と診断;
        LAST の時計回りの近傍を故障と診断;
    end if
end while
(LAST,  $v$ ) が 1-arrow である  $v$  を故障と診断;
( $u$ , CUR) が 1-arrow である  $u$  を故障と診断;

```

---

のとき，CUR は正常であり，CUR から LAST までの頂点はすべて正常であり，LAST の時計回りの近傍は故障である．よって，いずれの場合も一つの故障に対して一つの検査が行われる．最後に，診断されていない頂点が全て正常である場合に 0-string の bottom を検査するため，検査数は高々  $f+1$ ，ラウンド数は高々  $f+1$  となる． $f=1$  のとき，最初に検査する頂点は故障頂点の時計回りの近傍となるため，すべての正常な頂点は 1 つの検査で識別でき，0-string の top の頂点が故障頂点を検査している．よって，検査数は 1 である．■

**補題 4.6** アルゴリズム RING-DIAG を用いることにより，すべての unhealthy リング上のレベル 1 から  $r-2$  の頂点は，検査数が高々  $3k$ ，高々  $2k+1$  ラウン

ドで診断できる。

証明．故障をちょうど 1 個含む unhealthy リングの数を  $a$  とし，少なくとも 2 個の故障を含む unhealthy リングの数を  $b$  とする．また  $B$  を少なくとも 2 個の故障を持つリングのにある故障の総数とする．すべての unhealthy リングにアルゴリズム RING-DIAG を適用したときの検査数は高々  $a+B+b$  である． $a+B \leq 2k$  かつ  $b \leq k-1$  より， $a+B+b \leq 3k-1$  がいえる．補題 4.4 から，すべての unhealthy リングは並列に処理できることから，最もラウンド数がかかる unhealthy リングについて考えると， $2k$  個の故障を持つ unhealthy リングに対して高々  $2k+1$  ラウンドが必要である．■

補題 4.4 の結果を用いることにより，すべての unhealthy リングのレベル 1 から  $r-2$  の頂点を，並列に 1 ラウンドで検査することが可能である．

補題 4.7 すべての unhealthy リングのレベル 1 から  $r-2$  の頂点は，検査数  $k(r-2)(2k-2)$ ，1 ラウンドで識別できる．

最後にアルゴリズム BUTTERFLY-DIAG のステップ 3 について考える．ステップ 2 が終了したとき，unhealthy リングのレベル 1， $r-2$  のすべての頂点の状態が分かっている．レベル  $r-2$  のすべての正常な頂点  $x$  に対して，その時計回りの近傍  $y$ （レベル  $r-1$ ）を，ステップ 1 での検査結果によって識別する．さらに， $y$  が正常ならば  $y$  の時計回りの近傍  $z$ （レベル 0）の状態もステップ 1 での検査結果によって識別する．ここまでで，既に  $2k$  個の故障が識別されていれば，アルゴリズムは終了する．識別された故障が  $2k-1$  個以下のとき，まだ状態が不明な頂点の集合を  $H$  とする．

補題 4.8  $H$  の頂点について，次のいずれかが成り立つ．

- (1)  $H$  のどの頂点も，すでに正常と識別されている頂点と隣接する．
- (2) 高々 1 つのレベル  $r-1$  の頂点  $x \in H$  が，すでに正常と識別されている頂点と隣接せず，かつ，すでに  $2k-1$  個の故障が識別されている．

証明．ある頂点  $x \in H$  が正常と識別されている頂点と隣接していないと仮定する．頂点  $x$  のレベルが 0 ならば， $x$  のレベル 1 の近傍は全て故障である． $x$  のレベル  $r-1$  の近傍は，故障であるか，または  $H$  の要素であるかのどちらかである． $y \in H$  を  $x$  と隣接する頂点とすると， $y$  の反時計回りの近傍は故障である．したがって，すでに  $2k$  個の故障が識別されていることとなり，矛盾となる．

頂点  $x$  のレベルが  $r-1$  ならば， $x$  のレベル  $r-2$  における近傍はすべて故障であり，かつ  $x$  のレベル 0 における近傍は故障であるか，または  $H$  の頂点かのどちらかである． $z \in H, z \neq y$  を  $x$  と隣接する頂点とする．このとき， $z$  の反時計回りの近傍を  $w$  とすると， $w$  は故障であるか，または  $H$  の要素かのどちらかである．もし  $w \in H$  ならば， $w$  の反時計回りの近傍は故障である．したがって，すでに  $2k-1$  個の故障が識別されている．■

補題 4.9  $H$  のすべての頂点は，検査数が高々  $2k$ ，高々  $4k-2$  ラウンドで識別できる．

証明．まず，補題 4.8 の (1) の場合について考える．このとき，以下の方法を  $H = \emptyset$  となるか，故障が  $2k$  個になるまで繰り返す：レベル  $r-1$  の  $H$  の要素  $w$  を選び，その頂点を正常な頂点から検査する．もし  $w$  が正常ならば， $w$  の時計回りの近傍の状態をステップ 1 の検査結果から識別する． $w$  が故障ならば，さらに  $w$  の時計回りの近傍を正常な近傍から検査する． $H$  にレベル  $r-1$  の頂点がなければ， $H$  の任意の要素を選び，正常な頂点から検査する．

このときの検査数を考える．レベル  $r-2$  に  $s$  個の故障が存在するとし，かつ，それらの頂点の時計回りの近傍であり，かつ正常な頂点の数を  $s_1$  とする．このときの検査数は  $s_1 + 2(s-s_1) = 2s - s_1$  である．また，このときレベル  $r-2, r-1, 0$  に少なくとも  $s + (s-s_1) = 2s - s_1$  個の故障が存在する．仮定より，これは  $2k$  を超えない．したがって，必要とする検査数は高々  $2k$  である．

補題 4.8 の (2) の場合， $x$  の時計回りの近傍を  $y$  とする． $x$  以外の  $H$  の要素は正常な近傍を持つ．よって (1) の場合と同様に， $x$  以外の頂点を検査する．もし，故障が識別されれば終了する．故障が識別され

なかったとき、最後に  $y$  から  $x$  を検査する。このときに必要な検査数は、レベル  $r-2$  に故障が  $2k-1$  個存在し、かつレベル  $r-1$  に故障が存在しないとき最大となる。したがって、高々  $k+1$  の検査数ですべての  $H$  の頂点の状態を識別できる。

必要なラウンド数は高々  $|H|$  である、 $|H|$  の最大数は  $4k-2$  であることはすぐに分かる。■

次に、ステップ 3 を少ないラウンド数で実行することを考える。レベル  $r-2$  の正常な頂点の時計回りの近傍は、ステップ 1 での検査結果によって識別できる。また unhealthy リングのレベル 1 の正常な頂点によって、同リング上の反時計回りの近傍であるレベル 0 の頂点を検査する。検査を行った後、識別された故障が  $2k$  個に満たないとき、レベル 1,  $r-1$  の状態が不明であるような頂点を検査する。次の補題は、これらの頂点を 1 ラウンドで検査できることを示している。

**補題 4.10** バタフライ  $BF(k, r)$  の unhealthy リング上のレベル 1,  $r-1$  で、状態が不明であるような頂点の集合を  $H_1$  とし、 $H_1$  の頂点と隣接し、かつすでに正常と診断されている頂点の集合を  $H_2$  とする。このとき、 $H_1$  と  $H_2$  を二部分割とする二部グラフには、 $H_1$  のすべての頂点を含むマッチングが存在する。

**証明**。任意の  $S \subseteq H_1$  に対し、 $S$  の頂点と隣接する正常な頂点の集合を  $N(S)$  とする。 $|S| = 1$  のとき、 $|N(S)| \geq 1$  となることが容易に証明できる。 $S$  を  $|S| > |N(S)|$  を満たす最小の濃度を持つ集合とする。任意の  $v \in S'$  を選び、 $S' = S \setminus \{v\}$  とすると、補題 4.4 の証明と同じように、 $N(S) = N(S')$  かつ  $|S'| = |N(S)| = |N(S')|$  が成り立つ。 $S'$  は Hall の定理の条件を満たすので、 $S'$  と  $N(S')$  の頂点の間に完全マッチングが存在する。このマッチングで対応する 2 頂点を、マッチする頂点と呼ぶ。

頂点  $v$  のレベルを 0 とする ( $v$  のレベルが  $r-1$  でも同様の議論ができる)。 $v$  と隣接する  $2k$  個の頂点のそれぞれに対して、その頂点と対応する故障が存在することを示す。このとき、すでに  $2k$  個の故障が識別されていることになり矛盾が生ずる。 $N(S) = N(S')$  より、 $v$  と隣接する正常な頂点はすべて  $N(S')$  に含まれることに注意する。

$v$  のレベル  $r-1$  の近傍で、故障と識別されている頂点の集合を  $F_1$ 、正常な頂点の集合を  $FF_1$ 、状態が不明な頂点の集合を  $UD_1$  とする。 $x$  を  $FF_1$  の任意の要素とし、 $x'$  を  $x$  とマッチする頂点とする ( $x'$  はレベル 0 の頂点)。このとき  $x'$  の時計回りの近傍  $x''$  (レベル 1) は故障である。このような故障の集合を  $F_2 = \{x'' | x \in FF_1\}$  とすると、バタフライの構造から  $|F_2| = |FF_1|$  が成り立つ。 $y$  を  $UD_1$  の任意の要素とすると、 $y$  の半時計回りの頂点  $y'$  (レベル  $r-2$ ) は故障である。このような故障の集合を  $F_3 = \{y' | y \in UD_1\}$  とすると、 $|F_3| = |UD_1|$  である。これらの故障の集合  $F_1, F_2, F_3$  は、互いに共通の頂点を含まない。したがって  $|F_1 \cup F_2 \cup F_3| = k$ 。

$v$  のレベル 1 の近傍で、故障した頂点の集合を  $F_4$ 、正常な頂点の集合を  $FF_4$  とする。 $z$  を  $FF_4$  の任意の要素とし、 $z^1$  を  $z$  とマッチする頂点とする ( $z^1$  はレベル 0 の頂点)。 $z^1$  のレベル  $r-1$  の  $k$  個の近傍は  $F_i$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ , と共通部分を持たない。 $|F_1 \cup F_2 \cup F_3| = k$  であるので、 $z^1$  はレベル  $r-1$  の正常な頂点  $z^2$  と隣接する。この  $z^2$  は  $v$  と隣接しない。さらに  $z^2$  とマッチする頂点を  $z^3$  (レベル 0) とし、 $z^3$  の時計回りの近傍にある故障頂点を  $z^4$  (レベル 1) とする。このような  $z^4$  の集合を  $F_5 = \{z^4 | z \in FF_4\}$  とする。

以上のように定めた故障の集合  $F_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 5$ , は互いに独立であり、かつ  $|\cap_{i=1}^5 F_i| = 2k$  を満たす。■

**補題 4.11** アルゴリズム BUTTERFLY-DIAG のステップ 3 は、検査数  $2k^2-1$ 、高々 2 ラウンドで実行できる。

**証明**。まず、レベル  $r-2$  の正常な頂点の時計回りの近傍を、ステップ 1 での検査結果によって識別する。次に unhealthy リングのレベル 1 の正常な頂点によって、同リング上の反時計回りの近傍であるレベル 0 の頂点を検査する。これは検査数  $k(2k-2)$ 、1 ラウンドでできる。検査を行った後、識別された故障が  $2k$  個に満たないとき、レベル 1,  $r-1$  の状態が不明であるような頂点を検査する。これは補題 4.10 により検査数高々  $2k-1$ 、1 ラウンドで実行することができる。■

以上の補題をまとめることにより、以下の結果を

得る .

定理 4.12 バタフライ  $BF(k, r)$ ,  $k \geq 2$ ,  $r \geq 3$  に高々  $2k$  個の故障が存在するとき, アルゴリズム  $\Delta$ BUTTERFLY-DIAG は, 次の検査数とラウンド数で, すべての頂点の状態を診断する .

- (1) 検査数が高々  $rk^r + 5k$ , かつ高々  $6k + 2$  ラウンド .
- (2) 検査数が高々  $r(k^r + k) + 4k^2 - 4k - 1$ , かつ  $r$  が偶数ならば高々  $5$  ラウンド,  $r$  が奇数ならば高々  $6$  ラウンド .

特に  $r \geq 2k + 1$  の場合, ベクトル  $\vec{x} = x_1 x_2 \cdots x_{r-1}$ ,  $0 \leq x_i \leq k - 1$ ,  $0 \leq i \leq r - 1$  に対して, リング  $C(\vec{x})$  を  $\langle \vec{x}; 0 \rangle, \langle \vec{x}; 1 \rangle, \dots, \langle \vec{x}; r - 1 \rangle, \langle \vec{x}; 0 \rangle$  のような長さ  $r$  のサイクルと定義しても, 補題 4.1, 4.2 が成立する . さらに, 補題 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7 と同様の結果が, unhealthy リング上のすべての頂点について成立することを示すことができる . したがって,  $r \geq 2k + 1$  の場合アルゴリズム  $\Delta$ BUTTERFLY-DIAG のステップ 2 を unhealthy リング上のすべての頂点に対して行うことが可能になる

定理 4.13 バタフライ  $BF(k, r)$  において,  $r \geq 2k + 1$  ならば, 以下の検査数とラウンド数ですべての故障を識別することができる .

- (1) 検査数が高々  $rk^r + 3k$ , 高々  $2k + 4$  ラウンド
- (2) 検査数が高々  $rk^r + rk(2k - 2)$ ,  $r$  が偶数なら高々  $3$  ラウンド,  $r$  が奇数なら高々  $4$  ラウンド .

## 5 まとめ

本報告では, バタフライ  $BF(k, r)$  における adaptive な故障診断について考察した . バタフライ  $BF(k, r)$  において, 故障の数が  $2k$  を越えないと仮定したときに, 少ない検査数ですべてのユニットの診断を行うアルゴリズムと, 定数ラウンドですべてのユニットの診断を行うアルゴリズムを提案し, その検査数とラウンド数を求めた . 頂点数  $n$  で仮定できる故障の数の上限が  $t$  であるグラフに対して, 最小の検査数は  $n + t - 1$  である [3] . 今回提案したアルゴリズムは, バタフライ  $BF(k, r)$  を検査数が高々  $n + 5t/2$  で実行できる . また  $r \geq 2k - 1$  ならばバタフライ  $BF(k, r)$  は検査数  $n + 3t/2$  ですべてのユニットを診断できる .

また,  $r$  が奇数ならば  $4$  ラウンド,  $r$  が偶数ならば  $3$  ラウンドですべてのユニットを診断できることを示した .

## 参考文献

- [1] ARAKI, T., SHIBATA, Y. Optimal diagnosable systems on Cayley graphs, submitted.
- [2] BEIGEL, R., HURWOOD, W. and KAHALE, N. Fault diagnosis in a flash, Proc. 36th Symp. Foundations of Computer Science (1995).
- [3] BLECHER, P. M. On a logical problem, *Discrete Math.*, **43** (1983), 107–110.
- [4] BJÖRKLUND, A. Optimal adaptive fault diagnosis of hypercubes, SWAT 2000, Lecture Notes in Computer Science 1851, (2000) 527–534.
- [5] FENG, C., BHUYAN, L. N. and LOMBARDI, F. Adaptive system-level diagnosis for hypercube multiprocessors, *IEEE Trans. Computers*, **45**, 10 (Oct. 1996), 1157–1170.
- [6] HAKIMI, S. L., AMIN, A. T. Characterization of connection assignment problem of diagnosable systems, *IEEE Trans. Computers*, **C-23**, 1 (Jan. 1974), 86–88.
- [7] HAKIMI, S. L. and NAKAJIMA, K. On adaptive system diagnosis, *IEEE Trans. Computers*, **C-33**, 3 (Mar. 1984), 234–240.
- [8] KRANAKIS, E. and PELC, A. Better adaptive diagnosis of hypercubes, *IEEE Trans. Computers*, **49**, 10 (Oct. 2000), 1013–1020.
- [9] KRANAKIS, E., PELC, A. and SPATHARIS, A. Optimal adaptive fault diagnosis for simple multiprocessor systems, *NETWORKS*, **34** (1999), 206–214.
- [10] LEIGHTON, F. T. *Introduction to Parallel Algorithms and Architectures: Arrays, Trees, Hypercubes*, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA (1992).
- [11] NAKAJIMA, K. A new approach to system diagnosis, Proc. 19th Allerton Conf. Comm. Control and Computing (1981).
- [12] PREPARATA, F. P., METZE, G. and CHIEN, R. T. On the connection assignment problem of diagnosable systems, *IEEE Trans. Electronic Computers*, **EC-16**, 6 (Dec. 1967), 848–854.
- [13] PREPARATA, F. P. and VUILLEMIN, J. The cube-connected cycles: a versatile network for parallel computations, *Commun. of the ACM*, **24** (1981), 300–309.