

MaxMin 残余帯域パス探索のためのアルゴリズム

山本真基, yamamoto@netlab.nec.co.jp
NEC, 〒 108-8557 東京都港区芝浦 2-11-5

概要. 光ネットワークに光パスを設定する時, 最小コストパスが複数存在した時など, 設定できるパスの候補が複数存在した場合は, あるパス選択基準を採用することによって, 光パスの収容効率を考慮したパス設定をすることができる. ここでは, 光リンクの残余帯域のばらつきが, 光ネットワーク全体として少なくなるようなパス選択基準を想定し, そのようなパスを探索するためのアルゴリズムを提案する.

キーワード. 光ネットワーク, 最小コストパス集合, MaxMin 残余帯域パス探索

An algorithm for searching for a path with MaxMin residual bandwidth

Masaki Yamamoto, yamamoto@netlab.nec.co.jp
NEC, 2-11-5 Shibaura Minato-ku Tokyo 108-8557

Abstract. On establishing a light path in an optical network, in case that multiple candidates for the light path, e.g. multiple shortest paths, can be set up, taking a path choice criterion makes us establish light paths with respect to efficiency where they are accommodated. We propose an algorithm for searching for a path based on a path choice criterion which makes the residual bandwidths inclined to be same in the whole optical network.

Keywords. Optical network, Set of shortest paths, MaxMin residual bandwidth path search

1 はじめに

光ネットワークに光パスを設定する時, 一般的に最もコスト(または, メトリック)の小さいパスが探索され, そのパスに沿って光パスの設定が行われる. しかし, 最小コストパスが複数存在した時など, 設定できるパスの候補が複数存在した場合は, あるパス選択基準を採用することによって, 光パスの収容効

率を考慮したパス設定をすることができる.

ここでは, 設定できるパスの候補を最小コストパス(最小コストパス問題に関するものは [1], [2])として, その中から以下の性質をもつパス p を選択するパス選択基準を想定し, そのようなパスを探索するためのアルゴリズムを提案する(ここでは, 残余帯域を(最大帯域) - (使用帯域)とし, 辺 e の残余帯域を $res(e)$ (ただし, ≥ 0) と表記する.)

性質 1 最小コストパスの集合を M とした時, 辺の集合で表されているものとする. つまり, $M_i^{(t)}$ が $s, e_1, v_1, \dots, t$ (ただし, $s, v_1, \dots, t \in V$, $e_1, \dots \in E$) と通過するパスとすると,

$$\min_{e \in p} \{res(e)\} = \max_{q \in M} \left\{ \min_{e \in q} \{res(e)\} \right\}$$

性質 1 を満たすパス p を, ここでは MaxMin 残余帯域をもつパスと呼ぶ.

第二節では準備として, 最小コストパス集合を探索するためのアルゴリズムを示し, 最小コストパスの数が頂点数 (ノード数) の多項式でおさえられない場合のグラフ (ネットワーク) を示す. 第三節では, MaxMin 残余帯域をもつパスを探索するためのアルゴリズムとその正当性, 時間計算量がグラフ辺の数に比例することを示す. 第四節は, まとめと今後の課題である.

なお, ここで記述されるアルゴリズムは C 言語風の疑似コードである.

2 準備

ここで扱うグラフは単純有向グラフであり, $G = (V, E)$ (V : 頂点集合, E : 辺集合) と表記する. また, 各辺のコストは正数であるとし¹, 頂点 u から頂点 v への辺 $e = (u, v)$ のコストを $c(e)$ または c_{uv} と表記する.

頂点 s から頂点 t へのパス p が通過する辺の集合を A とした時, p のコストを $|p|$ と表記し, 以下の値とする.

$$|p| = \sum_{e \in A} c(e)$$

また, p が s から t への最小コストパスであるとは, s から t へ到達可能なパスの集合を P とした時, 以下が満たされていることである.

$$\forall q \in P \left[|p| \leq |q| \right]$$

ここでは, 上式を満たす $|p|$ を s から t への最小コストと呼び, $d(t)$ と表記する.

頂点 s から頂点 t への最小コストパスの集合を $M^{(t)} = \{M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \dots\}$ とする. ただし, パス $M_i^{(t)}$ は, それが通過する頂点と

¹最小コストパス集合には閉路のあるパスは含めない.

$$\begin{aligned} M_i^{(t)} &= V_i^{(t)} \cup E_i^{(t)} \\ V_i^{(t)} &= \{s, v_1, \dots, t\} \\ E_i^{(t)} &= \{e_1, \dots\} \end{aligned}$$

であり, 以下の二つを満たす.

$$\forall i, j \left[i \neq j \implies M_i^{(t)} \neq M_j^{(t)} \right]$$

$$\sum_{e \in E_1^{(t)}} c(e) = \sum_{e \in E_2^{(t)}} c(e) = \dots = d(t)$$

2.1 最小コストパス集合探索のためのアルゴリズム

図 2 に, 最小コストパス集合を探索するにあたって必要となる, 部分グラフを生成するためのアルゴリズムを示す. このアルゴリズムについて以下のことがいえる.

命題 1 グラフ $G = (V, E)$ における, 頂点 s から頂点 $v \in V$ への最小コストパスの集合を $M^{(v)}$ とする. また, グラフ $G' = (V', E')$ 上で s から $v \in V$ へ到達可能なパスの集合を $M'^{(v)}$ とする. この時, すべての $v \in V$ に対して $M'^{(v)} = M^{(v)}$ である.

証明. 以下の二つを仮定して, $|S|$ についての数学的帰納法より証明する. (ただし, S_i を $|S| = i$ ($1 \leq i \leq |V'|$) である S とする.)

帰納仮定 1: すべての $v \in S_i$ に対して $M'^{(v)} = M^{(v)}$ である ($distance(v) = d(v)$.)

帰納仮定 2: すべての $v \in candidate_i$ に対して, 以下の二つを満たす.

$$\begin{aligned} distance(v) &= \min_{v' \in S_i, (v', v) \in E} \left\{ \begin{aligned} &distance(v') + c_{v'v} \end{aligned} \right\} \\ parent(v) &= \left\{ v' \in S_i \mid distance(v) = \begin{aligned} &distance(v') + c_{v'v}, (v', v) \in E \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

まず, $|S| = 1$ の時, $S_1 = \{s\}$, $M^{(s)} = M^{(s)} = \phi$ であることから, 帰納仮定 1 が成立する. また, $candidate_1 = \{v \mid (s, v) \in E\}$ であることから, 帰納仮定 2 の二つの式が成立することは明らかである.

次に, $|S| = i - 1$ の時は帰納仮定が成立するとして, $|S| = i$ の時にもそれが成立することを示す. $S_i = S_{i-1} \cup \{u\}$ とすれば, アルゴリズムより, 頂点 u は以下を満たす.

$$distance(u) = \min_{v \in candidate_{i-1}} \{distance(v)\} \quad (1)$$

帰納仮定 1 を示すためには, $M^{(u)} = M^{(u)}$ を示せば十分である. $M^{(u)}$ を以下の A, B 二つに分ける ($M^{(u)} = A \cup B$, $A \cap B = \phi$.)

$$A = \{p \in M^{(u)} \mid \forall v \in p [v \in S_i]\}$$

$$B = \{p \in M^{(u)} \mid \exists v \in p [v \in (V - S_i)]\}$$

$|S_{i-1}|$ についての帰納仮定 1 と帰納仮定 2 より, $A = M^{(u)}$ であることがいえる (つまり, $A \neq \phi$ である.) $B \neq \phi$ とした時, $p \in B$ が通過する頂点を順に $v_0 = s, v_1, \dots, v_j, \dots, u$ とすると, $v_j \in S_{i-1}$ かつ $v_{j+1} \in (V - S_{i-1})$ である頂点 v_j, v_{j+1} ($\neq u$) が存在する. $p' = s, v_1, \dots, v_j, p'' = v_{j+1}, \dots, u$ とした時, $p' \in M^{(v_j)}$ かつ $v_j \in parent(v_{j+1})$ の場合,

$$\begin{aligned} |p| &= distance(v_{j+1}) + |p''| \\ &> distance(v_{j+1}) \quad (\because |p''| > 0) \\ &\geq distance(u) \quad (\because \text{式 (1)}) \end{aligned}$$

この $distance(u) \leq |p|$ より, $B = \phi$ であることがいえる. また, $p' \in M^{(v_j)}$ または $v_j \notin parent(v_{j+1})$ である時も, 帰納仮定 1, 帰納仮定 2 より同様の結果が得られる. $A = M^{(u)}$, $B = \phi$ より $M^{(u)} = M^{(u)}$ がいえる.

帰納仮定 2 が成立することはアルゴリズムの $distance(\cdot)$ 値の更新手続きより明らか. ■

2.2 最小コストパスの数

次のようなグラフ $G = (V, E)$ が与えられた時の, 頂点 s から頂点 t への最小コストパ

スの数 $|M^{(t)}|$ について考えてみる (ただし, $|V| = n = kl + 2$ とする.)

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_l \cup \{s, t\}$$

$$|V_1| = |V_2| = \dots = |V_n| = k$$

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{l-1} \cup E_s \cup E_t$$

$$E_s = \{(s, v) \mid v \in V_1\}$$

$$E_t = \{(v, t) \mid v \in V_l\}$$

$$E_i = \{(u, v) \mid u \in V_i, v \in V_{i+1}\}$$

$$c(e_1) = \dots = c(e_m), \{e_1, \dots, e_m\} = E$$

この時, 最小コストパスの数 $|M^{(t)}|$ は,

$$|M^{(t)}| = k^l = k^{\frac{n-2}{k}}$$

である. k を定数とみなした時, $|M^{(t)}|$ は $|V|$ の指数関数で表される. このことは, 性質 1 を満たすパスを探索するにあたって, 候補となる最小コストパスをすべて探索するアルゴリズムは現実的でないことを意味する.

3 MaxMin 残余帯域パス探索アルゴリズム

図 1 に, グラフ $G' = (V', E')$ (図 2 のアルゴリズムの出力グラフ), s (ソース), t (宛先) を入力とした, 性質 1 を満たすパスを探索するためのアルゴリズムを示す.

このアルゴリズムの終了時 (アルゴリズムの終了性は命題 3 から) の各頂点 $v \in V''$ における変数 $maxminafter^{(v)}$, p_v について, 次のことがいえる.

命題 2 頂点 s から頂点 $t' \in V'' - \{s\}$ への最小コストパス集合を $M^{(t')} = \{M_1^{(t')}, M_2^{(t')}, \dots\}$ とした時, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} \forall t' \in V'' - \{s\} \left[maxminafter^{(t')} \right. \\ \left. = \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t')}} \{res(e)\} \right\} \right] \quad (2) \end{aligned}$$

また, 頂点 t' におけるパス $p_{t'}$ について, 以下が成立する.

$$\begin{aligned} \forall t' \in V'' - \{s\} \left[maxminafter^{(t')} \right. \\ \left. = \min_{e \in p_{t'}} \{res(e)\} \right] \quad (3) \end{aligned}$$

MaxMin 残余帯域パス探索アルゴリズム

入力 : $G' = (V', E'), s, t$

出力 : $p_t : s, e_1, u_1, \dots, t$

mainprogram($G' = (V', E'), s, t$)

/* 宛先 t に関係する部分を抽出 */

$G'' = (V'', E'')$ for which

$V'' = \{V' \cap M \mid M \in M^{(t)}\}$

$E'' = \{E' \cap M \mid M \in M^{(t)}\}$

$\text{parent}(u) = \{v \mid (v, u) \in E''\}$

/* 頂点が未探索であることを表す */

for each ($u \in V''$)

$\text{maxminafter}^{(u)} = -1$

end for each

$\text{maxminafter}^{(s)} = \infty$

$p_s = s$

$\text{maxminafter}^{(t)} = \text{bwps_rcall}(t)$

Output p_t

end mainprogram

int

bwps_rcall(u)

if ($\text{maxminafter}^{(u)} \geq 0$) **then**

return $\text{maxminafter}^{(u)}$

for each ($e = (v, u) \in E''$)

$\text{minafter}_v^{(u)}$

$= \min \{\text{bwps_rcall}(v), \text{res}(e)\}$

end for each

$\text{maxminafter}^{(u)}$

$= \max_{(v,u) \in E''} \{\text{minafter}_v^{(u)}\}$

append $(v, u), u$ to p_v for p_u

i.e. $p_u : p_v, (v, u), u$ for which

$\text{minafter}_v^{(u)} = \text{maxminafter}^{(u)}$

return $\text{maxminafter}^{(u)}$

end mtr_rcall

図 1: MaxMin 残余帯域パス探索アルゴリズム

証明 . 頂点 t' における $\text{maxminafter}^{(t')}$ と $p_{t'}$ は , 各頂点 $t'' \in \text{parent}(t')$ のそれぞれから求められる . また , 補題 1 より ,

$$\forall u \in V'', \forall v \in V'' \left[v \in \text{parent}(u) \implies \left| M^{(v)} \right| = \left| M^{(u)} \right| \text{ or } \left| M^{(v)} \right| < \left| M^{(u)} \right| \right]$$

である . ゆえに , $|M^{(t')}|$ についての数学的帰納法より証明する . ただし , $t'' \in \text{parent}(t')$ に対して $|M^{(t')}| = |M^{(t'')}|$ である場合 ($\text{parent}(t') = \{t''\}$ である時) は , 帰納仮定を直接に用いることはできない (後述 .)

まず , $|M^{(t')}| = 1$ の時 , そのパスを $M_1^{(t')}$ とすれば ,

$$\forall u \in M_1^{(t')} \left[|\text{parent}(u)| = 1 \right]$$

である . よって , $\text{parent}(u) = \{v\}$, $e = (v, u)$ とおけば , アルゴリズムより ,

$$\forall u \in M_1^{(t')} \left[\text{maxminafter}^{(u)} = \text{minafter}_v^{(u)} \right] \quad (4)$$

$$\forall u \in M_1^{(t')} \left[\text{minafter}_v^{(u)} = \min \left\{ \text{maxminafter}^{(v)}, \text{res}(e) \right\} \right] \quad (5)$$

である . $\text{parent}(t') = \{t''\}$, $\text{parent}(t'') = \{t'''\}$, $\dots$, $e' = (t'', t')$, $e'' = (t''', t'')$, $\dots$ とおき , 上式 (4) , (5) を順次適用すれば ,

$$\begin{aligned} & \text{maxminafter}^{(t')} \\ &= \max_{(v,t') \in E''} \left\{ \text{minafter}_v^{(t')} \right\} \\ &= \text{minafter}_{t''}^{(t')} \\ &= \min \left\{ \text{maxminafter}^{(t'')}, \text{res}(e') \right\} \\ &= \min \left\{ \text{minafter}_{t'''}^{(t'')}, \text{res}(e') \right\} \\ &= \min \left\{ \min \left\{ \text{maxminafter}^{(t''')}, \text{res}(e'') \right\}, \text{res}(e') \right\} \\ &\quad \vdots \\ &= \min_{e \in M_1^{(t')}} \left\{ \text{res}(e) \right\} \end{aligned}$$

である . $|M^{(t')}| = 1$ であるから ,

$$\text{maxminafter}^{(t')} = \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t')}} \left\{ \text{res}(e) \right\} \right\}$$

となる．また， $M_1^{(t')} = p_{t'}$ であることより，

$$\begin{aligned} & \maxminafter^{(t')} \\ &= \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t')}} \{res(e)\} \right\} \\ &= \min_{e \in M_1^{(t')}} \{res(e)\} \\ &= \min_{e \in p_{t'}} \{res(e)\} \end{aligned}$$

であることがいえる（初期段階の証明終了．）

次に， $|M^{(v)}| < |M^{(t')}| = i$ を満たす頂点 v については (2), (3) が成立しているものとして，頂点 t' でもそれらが成立することを示す．補題 1 より， $|M^{(t')}| = i$ である場合の証明を，以下の二つの場合に分けて示す．

- a) $\forall v \in \text{parent}(t') \left[|M^{(v)}| < |M^{(t')}| \right]$
- b) $\exists v \in \text{parent}(t') \left[|M^{(v)}| = |M^{(t')}| \right]$

a) の場合， $\maxminafter^{(v)}$ については帰納仮定の (2) を用いることができる．ゆえに，

$$\begin{aligned} & \maxminafter^{(t')} \\ &= \max_{(v,t') \in E''} \left\{ \minafter_v^{(t')} \right\} \\ &= \max_{e=(v,t') \in E''} \left\{ \min \left\{ \maxminafter^{(v)}, res(e) \right\} \right\} \\ &= \max_{e=(v,t') \in E''} \left\{ \underbrace{\min \{A, res(e)\}}_B \right\} \end{aligned}$$

である．ただし，

$$A = \max_{i: M_i^{(v)} \in M^{(v)}} \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\}$$

とする．上式の B の部分について，以降で示されるよう， $A \leq res(e)$ と $A > res(e)$ の時とで，同じ式変形をすることができる．まず， $A \leq res(e)$ である時は，

$$\begin{aligned} A &= \max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\} \leq res(e) \\ \iff \forall i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[\min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \leq res(e) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \forall i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[\min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right] \\ &= \min \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\}, res(e) \right\} \\ \iff \forall i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[\min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right] \\ &= \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \end{aligned}$$

である．ゆえに $A \leq res(e)$ である時は，

$$\begin{aligned} B &= A \\ &= \max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\} \\ &= \max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

である．次に， $A > res(e)$ である時，

$$\begin{aligned} A &= \max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\} > res(e) \\ \iff \exists i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[\min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} > res(e) \right] \\ \iff \forall i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[res(e) \right] \\ &= \min \left\{ res(e), \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\} \\ \iff \forall i: M_i^{(v)} \in M^{(v)} &\left[res(e) \right] \\ &= \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \end{aligned}$$

である．ゆえに $A > res(e)$ である時は，

$$\begin{aligned} B &= res(e) \\ &= \max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

である．ゆえに，(6), (7) より，

$$\begin{aligned} & \maxminafter^{(t')} \\ &= \max_{e=(v,t') \in E''} \left\{ \underbrace{\max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \right\}}_B \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{e=(v,t') \in E''} \left\{ \max_{i: M_i^{(t')} \cap e \neq \emptyset} \left\{ \min_{e' \in M_i^{(t')}} \{res(e')\} \right\} \right\} \\
&= \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t')}} \{res(e)\} \right\}
\end{aligned}$$

である．また，頂点 $u \in \text{parent}(t')$ ，辺 $e = (u, t')$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\text{maxminafter}^{(t')} \\
&= \max_{e'=(v,t') \in E''} \left\{ \text{minafter}_v^{(t')} \right\} \\
&= \max_{e'=(v,t') \in E''} \left\{ \min \left\{ \text{maxminafter}^{(v)}, res(e') \right\} \right\} \\
&= \min \left\{ \text{maxminafter}^{(u)}, res(e) \right\}
\end{aligned}$$

であったとすると， $p_{(t')}$ は p_u, e, t' と通過するパスとなる． p_u に対しては，帰納仮定の (3) を用いることができるため，

$$\begin{aligned}
&\text{maxminafter}^{(t')} \\
&= \min \left\{ \min_{e' \in p_u} \{res(e')\}, \{res(e)\} \right\} \\
&= \min_{e \in p_{t'}} \{res(e)\}
\end{aligned}$$

である．これより，a) の場合が証明された．

次に，b) である場合， $|\text{parent}(t')| = 1$ であることから，次のことがいえる．あるパス $p: v, u, \dots, w, t' \ (|\text{parent}(v)| > 1, \text{parent}(u) = \dots = \text{parent}(w) = 1, v, u, \dots, w \in V'' - \{s\})$ が存在して，

$$\forall i: M_i^{(t')} \in M^{(t')} [p \not\subseteq M_i^{(t')}]$$

である．ゆえに，頂点 v で (2) が成立するならば頂点 u でも (2) が成立することがいえればよい．頂点 u に対して，

$$\begin{aligned}
&\text{maxminafter}^{(u)} \\
&= \max_{e=(v,u) \in E''} \left\{ \text{minafter}_v^{(u)} \right\} \\
&= \max_{e=(v,u) \in E''} \left\{ \min \left\{ \text{maxminafter}^{(v)}, res(e) \right\} \right\} \\
&= \max_{e=(v,u) \in E''} \left\{ \min \left\{ \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_i \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)}} \{res(e')\} \right\}, res(e) \left. \right\} \\
&= \max_{e=(v,u) \in E''} \left\{ \max_{i: M_i^{(v)} \in M^{(v)}} \left\{ \min_{e' \in M_i^{(v)} \cup \{e\}} \{res(e')\} \right\} \right\} \quad (\because (6), (7)) \\
&= \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(u)}} \{res(e)\} \right\}
\end{aligned}$$

である．また，同様に，頂点 v で (3) が成立するならば頂点 u でも (3) が成立することがいえればよい．頂点 u に対して，

$$\begin{aligned}
&\text{maxminafter}^{(u)} \\
&= \max_{e=(v,u) \in E''} \left\{ \text{minafter}_v^{(u)} \right\} \\
&= \min \left\{ \text{maxminafter}^{(v)}, res(e) \right\} \\
&= \min \left\{ \min_{e' \in p_v} \{res(e')\}, res(e) \right\} \\
&= \min_{e \in p_u} \{res(e)\}
\end{aligned}$$

である．これより b) の場合が証明された．

ゆえに，すべての頂点 $t' \in V''$ で (2), (3) が成立することがいえ，命題が証明された．■

系 1 頂点 s から頂点 t への最小コストパス集合 $M^{(t)} = \{M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \dots\}$ について，以下が成立する．

$$\text{maxminafter}^{(t)} = \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t)}} \{res(e)\} \right\}$$

また， $\text{maxminafter}^{(t)}$ とパス p_t に関して，以下のことが成立する．

$$\text{maxminafter}^{(t)} = \min_{e \in p_t} \{res(e)\}$$

補題 1 $G'' = (V'', E'')$ において，すべての頂点 $u \in V''$ とすべての頂点 $v \in \text{parent}(u)$ に対して，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&|\text{parent}(u)| = 1 \text{ の時, } |M^{(u)}| = |M^{(v)}| \\
&|\text{parent}(u)| > 1 \text{ の時, } |M^{(u)}| > |M^{(v)}|
\end{aligned}$$

証明．それぞれのパス $p \in M^{(u)}$ に対して，頂点 $v \in \text{parent}(u)$ とパス $q \in M^{(v)}$ が一対一

に対応して, p は $q, (v, u), u$ と通過するパスである．これより,

$$|M^{(u)}| = \sum_{v \in \text{parent}(u)} |M^{(v)}|$$

である．上式より, $|\text{parent}(u)| = 1$ である時, $|M^{(u)}| = |M^{(v)}|$ である．また, 上式より, $|\text{parent}(u)| > 1$ である時, 以下が成り立つ．

$$\forall v \in \text{parent}(u) \left[|M^{(u)}| > |M^{(v)}| \right]$$

■

図 1 に示されたアルゴリズムの時間計算量について, 次のことがいえる．

命題 3 入力グラフを $G' = (V', E')$ とすれば, アルゴリズムの時間計算量は, $O(|E'|)$ である．

証明．まず, グラフ G'' の構築に関して, 頂点 t から頂点 s へグラフを逆探索することにより, G'' は $O(|E'|)$ で得ることができる．

次に, グラフ G'' の探索に関して, 必要とされる時間計算量が $O(|E''|)$ であることを示すためには, $G'' = (V'', E'')$ の各辺に着目した時, 同じ辺が重複して探索されることがないことを示せば十分である．

辺 $e = (v, u) \in E''$ が重複して探索されたとする．アルゴリズムより, 頂点 u に関して,

$$\text{maxminafter}^{(u)} = -1$$

が満たされている．これは, 第一回目の頂点 u への探索に関して, 補題 2 に反する．■

X を, 頂点集合 V'' に対して順序をあたえる関数の集合とする．つまり, $\sigma \in X (V'' \rightarrow \{1, \dots, n\})$ に対して,

$$\forall u, v \in V'' \left[u \neq v \implies \sigma(u) \neq \sigma(v) \right]$$

である．グラフ $G'' = (V'', E'')$ について, G'' が閉路を含まないことより, ある $\sigma \in X$ が存在して, 以下が成り立つ ([2] を参照．)

$$\forall u, v \in V'' \left[(u, v) \in E'' \implies \sigma(u) < \sigma(v) \right]$$

上を満たす頂点への順序の割り当てを, *topological ordering* と呼び, 次では σ と表記する．

補題 2 $a_i (i = 0, 1, \dots)$ を, 図 1 のアルゴリズム実行中, 第 i 回目に呼び出される関数 `bwps_rcall` の引数となる頂点とする．この時,

$$\forall v \in V'', \exists i \geq 0 \left[v = a_i \right]$$

である．また, $\text{maxminafter}_i^{(u)}$ を第 i 回目に呼び出された関数 `bwps_rcall` が, `return` 文により値を返した直後の $\text{maxminafter}^{(u)}$ の値とする．この時, 以下が成立する．

$$\forall u \in V'', \forall i \geq 0, \forall j : j > i$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{maxminafter}_j^{(u)} = -1 \\ \text{かつ } u \in \{a_0, \dots, a_i\} \end{array} \right] \implies \sigma(a_j) < \sigma(a_i)$$

証明．アルゴリズムと, σ が topological ordering であることより示される．■

系 1 と命題 3 より, 図 1 に示されたアルゴリズムに関して, 以下の定理が成り立つ．

定理 1 頂点 s から頂点 t へのマルチパス集合 $M^{(t)} = \{M_1^{(t)}, M_2^{(t)}, \dots\}$ について,

$$\text{maxminafter}^{(t)} = \max_i \left\{ \min_{e \in M_i^{(t)}} \{res(e)\} \right\}$$

とする．この時, このアルゴリズムは, 以下を満たすパス p_t を $O(|E|)$ で出力する．

$$\text{maxminafter}^{(t)} = \min_{e \in p_t} \{res(e)\}$$

4 おわりに

ここでは, 設定できるパスの候補を最小コストパスとし, その中から 性質 1 を満たすパス p を探索するためのアルゴリズムを提案した．

参考文献

- [1] : Deo, N., and C. Pang, “Shortest path algorithms: Taxonomy and annotation”, Networks 14, 275-323, 1984.
- [2] : Ravindra K. Ahuja, Thomas L. Magnanti, James B. Orlin, “Network Flows - theory, algorithms, and applications”, Prentice-Hall Inc., 1993.

部分グラフ生成アルゴリズム

入力 : $G = (V, E), s$

出力 : $G' = (V', E')$

mainprogram($G = (V, E), s$)

for each ($u \in V$)

$distance(u) = \infty, parent(u) = \phi$

end for each

$candidate = \phi$

$V' = \phi, E' = \phi, S = \phi$

$candidate_i = \phi$ for $1 \leq i \leq |V|$

$distance(s) = 0$

$candidate = candidate \cup \{s\}$

while ($candidate \neq \phi$)

 choose $u \in candidate$ for which

$distance(u) = \min\{distance(v) \mid v \in candidate\}$

$S = S \cup \{u\}, candidate = candidate - \{u\}$

for each ($e = (u, v) \in E$)

if ($distance(v) > distance(u) + c(e)$) **then**

$candidate = candidate \cup \{v\}$

$distance(v) = distance(u) + c(e)$

$parent(v) = \{u\}$

else if ($distance(v) = distance(u) + c(e)$) **then**

$parent(v) = parent(v) \cup \{u\}$

end for each

$candidate_{|S|} = candidate$

$E' = E' \cup \{(v, u) \mid v \in parent(u)\}$

end while

 Output $G' = (V', E')$ for which $V' = S$

end mainprogram

図 2: 部分グラフ生成アルゴリズム