2003－AL－90 (8)
2003／5／23

単位格子交差グラフについての考察

和田 正範　　山崎 浩一

群馬大学 工学部 情報工学科
〒376-8515 群馬県 桐生市 天神町 1-5-1

概要　2 部置換グラフ, convex グラフ, および単位格子交差グラフから成るクラスをそれぞれ BPG, CG, および UGIG で表す. 既知の結果として BPG $\subsetneq$ UGIG および BPG $\subsetneq$ CG が知られている. 本論文では, CG $\subsetneq$ UGIG を示す.

A note on unit grid intersection graphs

Masanori Wada　　Koichi Yamazaki

Department of Computer Science Gunma University
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu zip:376-8515, Gunma, Japan

abstract　Let BPG, CG, and UGIG be classes of bipartite permutation graphs, convex graphs, and unit grid intersection graphs respectively. It is known that BPG $\subsetneq$ UGIG and BPG $\subsetneq$ CG. In this paper, we show CG $\subsetneq$ UGIG.

1　初めに

各対象物に各頂点が 1 対 1 に対応し, 異なる 2 つの対象物が交わる時かつその時に限りそれらに対応する頂点の間に辺が存在するとき, そのグラフを**交差グラフ**と呼ぶ. この自然な概念は, その (定義の) 単純性や汎用性から多くの応用分野を持ち, それ故に, 様々なタイプの交差グラフが研究されている. 例えば, 対象物が実線の区間である区間グラフや対象物が単位円 (球) である単位ディスクグラフなどがある [2].

平面上の x 軸または y 軸と平行な (閉) 区間を対象物とする交差グラフは**格子交差グラフ**と呼ばれ, 2 部グラフを構成する. 格子交差グラフに関しては, 定義から自然に導かれる, 行列を用いた特徴付け [3], boxicity と呼ばれるグラフパラメータによる特徴付け [1], 認識問題の NP 完全性 [8] など幾つか報告されているが, 2 部グラフの他の部分クラスとの関係についての研究はほとんどされていない ([15] 参照).

2 部グラフにおいて, 様々な部分クラスが研究されているが, 勢力的に研究されている部分クラスとして, 2 部置換グラフ, convex グラフ, chordal bipartite グラフがある. これらのグラフ

から成るクラスをそれぞれ BPG, CG, BCG で表すと, BPG $\subsetneq$ CG $\subsetneq$ BCG という関係が成り立つ [2].

全ての区間の長さが等しい格子交差グラフは**単位格子交差グラフ**と呼ばれる. 単位格子交差グラフ全体から成るクラスを UGIG で表すと, BPG $\subsetneq$ UGIG であることは既に知られている [15]. 本論文では, この既知の結果を拡張し, CG $\subsetneq$ UGIG であること示す.

2 諸定義

2.1 grid intersection グラフ

2 次元平面上での x 軸または y 軸に平行な開区間の集合を考える. x 軸, y 軸と平行な区間のある集合をそれぞれ I_x, I_y で表す. I_x の全ての要素を x 軸に, I_y の全ての要素を y 軸に射影した時, 共通の端点の座標を持つ区間が無く, I_x 内同士かつ I_y 内同士の要素は互いに交差していない区間の集合 $I_x \cup I_y$ を **格子表現**という. ある格子表現 $I_x \cup I_y$ によって表現される交差グラフを**格子交差グラフ**といい, $G(I_x \cup I_y)$ で表す (図 1 参照). また, 格子交差グラフ全体からなる集合を GIG で表す. 明らかに $G(I_x \cup I_y)$ は 2 部グラフであり, $G = (U, V; E)$ と書くことができ, U と V の集合は I_x と I_y にそれぞれ対応している.

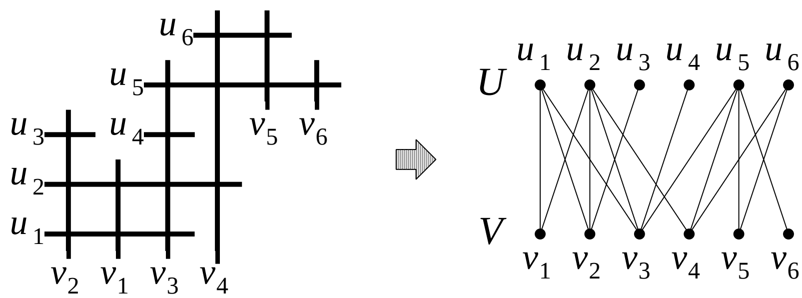

図 1: 格子表現と格子交差グラフ.

任意の $i_1, i_2 \in I_x$ において,$|i_1| = |i_2|$ を満たし, かつ任意の $i_1, i_2 \in I_y$ において, $|i_1| = |i_2|$ を満たす格子表現を**単位格子表現**と呼び, 単位格子表現によって表現されるグラフを**単位格子交差グラフ**と呼ぶ. また, 単位格子交差グラフ全体から成るグラフの集合を UGIG で表す. 単位格子表現において, 一般性を失う事無く任意の $i, j \in I_x \cup I_y$ において, $|i_1| = |i_2|$ と仮定できる. UGIG $\subsetneq$ GIG であることは知られている [15].

2.2 convex グラフ

W をある集合とし, 全単射 $f : W \to \{1, \ldots, |W|\}$ を W の要素の番号付け関数とする. S を W のある部分集合とする. $f(w_i) = \max_{w_j \in S} f(w_j)$ を満たす $w_i \in W$ を $maxIDX(S, f)$ で表す. 同様に $f(w_i) = \min_{w_j \in S} f(w_j)$ を満たす $w_i \in W$ を $minIDX(S, f)$ で表す. $minIDX(S, f) \leq i \leq maxIND(S, f)$ を満たす任意の i に対し, $w_i \in S$ が成り立つとき S **は** f **に関して連続である**と言う. 文脈から f が明らかなときには f を省略する. 例えば, $maxIND(S, f)$ の代わりに $maxIND(S)$ を用いたり, 単に"S は連続である" と記述する.

$G = (U, V; E)$ を 2 部グラフとする. $u \in U \cup V$ に対し, u と隣接する全ての頂点から成る集合

を $N(u)$ で表す. U の各頂点 u に対して, $N(u)$ が連続となるような (V の) 番号付け関数 f が存在するとき, f を **convex labeling** と呼ぶ. V に対して convex labeling が存在するとき, G は V において **convex on** であると言う. U の convex on も同様に定義される. U と V の 2 つの頂点集合のうちの少なくとも 1 つの頂点集合で convex on である 2 部グラフを **convex グラフ**と呼ぶ. convex グラフからなるグラフの集合を CG で表す. 図 2 のグラフは V において convex on の convex グラフで, convex labeling $f : v_i \to i$ を持つ.

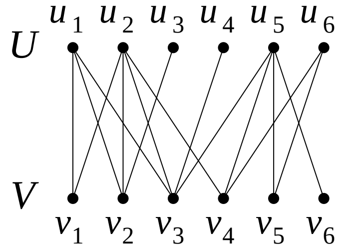

図 2: ある convex グラフ.

3 CG $\subsetneq$ UGIG

本節では CG グラフから成る集合が格子交差グラフから成る集合に真に含まれることを示す.

定理 3.1 CG $\subsetneq$ UGIG

証明 $G = (U, V; E),\ U = \{u_1, \ldots, u_m\}, V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を convex グラフとし, V がある convex labeling f を持つものとする. g を下記のアルゴリズム $OrderOfU$ で得られた関数とする. δ を十分小さい正数とする.

先ず G の格子表現を構成する方法について述べる. 各頂点 $u \in U$ に対し, 対応する区間の始点, 終点, y 座標を, $minIDX(N(u), f) - \delta$, $maxIDX(N(u), f) + \delta$, $g(u)$ に設定する. 各頂点 $v \in V$ に対し, 対応する区間の始点, 終点, x 座標を, $minIDX(N(v), g) - \delta$, $maxIDX(N(v), g) + \delta$, $f(i)$ に設定する. これにより G の格子表現が得られる (図 3 参照).

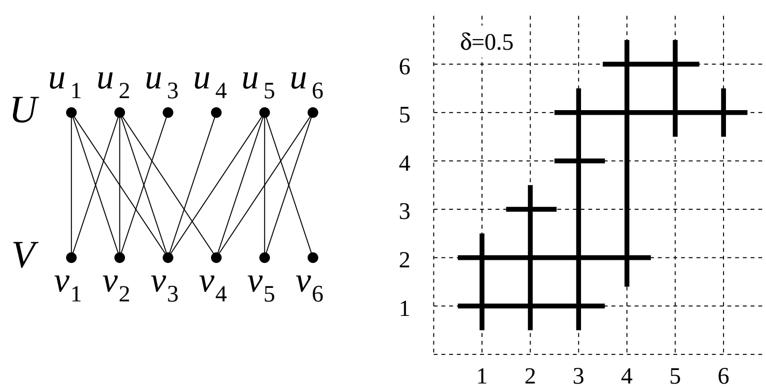

図 3: Convex グラフと格子表現.

次に得られた格子表現を単位格子表現に変換する方法について述べる. δ を十分小さくとる事に注意する. $[x_i, x_j]$ を格子表現のある水平方向の区間とする. 任意の $x_h \le x_i$ に対し, $[x_i, x_j]$ を $[x_h, x_j]$ に変更して得られる格子表現も G の格子表現である. 同様に $[y_i, y_j]$ を垂直方向の区間とすると, 任意の $y_h \le y_i$ に対し, $[y_i, y_j]$ から $[y_h, y_j]$ に変更して得られる格子表現も G の格子表現である. 従って, 格子表現の区間の長さを unit に変換する事ができる (図 4 参照).

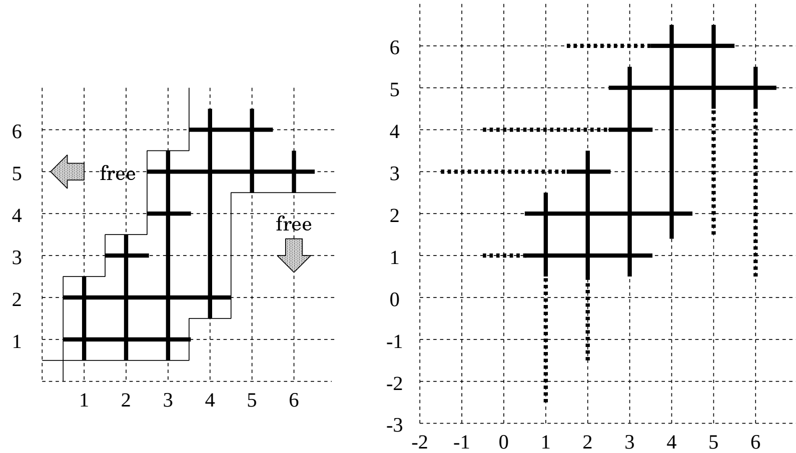

図 4: 格子表現と単位格子表現.

次に真部分集合であることを示す. interval bigraph ならば chordal bipartite グラフであることと, 長さ 6 のサイクル C_6 は chordal bipartite グラフでないこと, さらに, C_6 は単位格子表現を持つことから, $C_6 \in \mathsf{UGIG}$ かつ $C_6 \notin \mathsf{CG}$ が得られる.

procedure *OrderOfU*

INPUT : a convex $G = (U, V; E)$ where V has a convex labeling f;
OUTPUT : a bijection $g : U \to \{1, \ldots, |U|\}$

begin
  $num := 1$; $W := U$;
  while $W \neq \emptyset$ **do**
    find a vertex $u \in W$ which minimize $minIDX(N(w), f)$ for any $w \in W$
      (ties are broken arbitrarily);
    set $g(u) = num$;
    $num := num + 1$;
    $W := W - \{u\}$;
  od
  Output g;
end.

□

4 終わりに

今後の課題として以下の問題が挙げられる:

- UGIG の同型判定問題と認識問題
- interval bigraph[7] ならば格子交差グラフか?

これらのクラスの同型判定, 認識問題の時間計算量を表 1 に示す.

グラフのクラス	同型判定	認識
chordal bipartite グラフ	GI 完全 [10]	P [12],[13],[14]
Interval bigraph	open	P[7]
GIG	open	NP 完全 [8]
UGIG	open	open
CG	P[11]	P[9]

表 1: 同型判定と認識問題の時間計算量

参考文献

[1] S. Bellantoni, I.B.A. Hartman, T. Przytycka, and S. Whitesides, "Grid intersection graphs and boxicity", *Discrete Mathematics* 114:41-49,1993.

[2] A. Brandstädt, V.B.Le and J.P.Spinrad, SIAM Monographs on Discrete Mathematics and Applications, SIAM 1999.

[3] I.B.A. Hartman, I. Newman, and R. Ziv, "On grid intersection graphs", *Discrete Mathematics* 87:41-52,1991.

[4] K.P. Bogart and D.B. West, "A short proof that 'proper=unit' ", *Discrete Mathematics* 201:21-23,1999.

[5] C.E. Lekkerkerker and J.Ch. Boland, "Representations of a finite graph by a set of intervals on the real line", *Fund.Math.* 51:45-64,1962.

[6] G.Ehrlich, S. Even and R.E. Tarjan, "Intersection graphs of curves in the plane", *J Combin. Theory Ser.* B 21:8-20,1976.

[7] Haiko Müller, "Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time", *Discrete Applied Mathematics* 78:189-205,1997, Erratum, preprint 1999, 4 pages.

[8] Jan Kratochivil, "A special planar satisfiability problem and a consequence of its NP-connpleteness", *Discrete Applied Mathematics* 52:233-252,1994.

[9] M. Habib, R. McConnell, C. Paul and L. Viennot, "Lex-BFS and Partition Refinement, with Applications to Transitive Orientation, Interval Graph Recognition and Consecutive Ones Testing", *Theoretical Computer Science* 234:59-84,2000.

[10] T. Nagoya, R. Uehara, and S. Toda, "Completeness of Graph Isomorphism Problem for Bipartite Graph Classes", COMP2001-93, *IEICE Technical Report*, 3/12 2002.

[11] L. Chen, "Graph Isomorphism and Identification Matrices: Sequential Algorithms", *J. of Computer and System Sciences*, 59:450-475, 1999.

[12] A. Lubiw, "Doubly Lexical Orderings of Matrices", *SIAM Journal on Computing*,16(5):854-879,1987.

[13] R. Paige and R.E. Tarjan, "Three Partition Refinement Algorithms", *SIAM Journal on Computing*,16(6):973-989,1987.

[14] J.P. Spinrad, "Doubly Lexical Ordering of Dense 0-1 matrices", *Information Processing Letters*,45:229-235,1993.

[15] M.Togasaki, M.Wada, and K.Yamazaki, "Some fundamental properties of unit and proper grid intersection graphs", 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.100, No.25:1-7,2000.