

単純な規則で表わされるマルコフ過程の近似解析手法

新倉 康明[†] Johannes Schneider[†] 渡辺 治[†]

[†] 東京工業大学大学院情報理工学研究科 〒152-8552 東京都目黒区大岡山 2-12-1

E-mail: [†]watanabe@is.titech.ac.jp

あらまし 本稿では、単純で比較的状態数の大きなマルコフ過程のモデルを設定し、その平均的な状態遷移を、簡単な計算（これを疑似平均と呼ぶことにする）で近似する手法を提案する。乱択アルゴリズムの動きは、マルコフ過程のモデルで近似することができる場合がある。しかし、マルコフ過程としても状態空間が大きくなるために、その平均的な振る舞いの解析が非常に困難になる場合が多い。そのような解析を簡単な計算で行うための道具が疑似平均である。本稿では、幾つかの実験と解析を通して、疑似平均の近似性能について考察する。

キーワード ランダムウォーク、乱択アルゴリズム

A heuristic analysis for Markov processes expressed by simple rules

Yasuaki Niikura[†], Johannes Schneider[†], and Osamu Watanabe[†]

[†] Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology
Ookayama 2-12-1, Meguro-ku, Tokyo, 152-8552 Japan

E-mail: [†]watanabe@is.titech.ac.jp

Abstract In this paper, we define a Markov process that is simple but yet has a large state, and propose a simple calculation that gives an approximation (which we call “pseudo expectation”) of the average state change of the process. The behavior of some randomized algorithms can be approximated as simple Markov processes. However, it is often the case that the state space of such processes becomes large and that it is difficult to analyze their average behavior. Our proposed pseudo expectation could be a useful and easy tool for estimating the behavior of such processes. This paper considers the approximation performance of pseudo expectation through some experiments and analyses.

Key words random walk, randomized algorithm

1. はじめに

ある問題に対して乱択アルゴリズムを実行するとき、途中の状態をベクトルなどで表現できれば、その動きを追うことはアルゴリズムの性能評価につながる。そして、それを厳密に把握するのが困難である場合には、マルコフ過程で近似モデルを構築し、それを解析の対象とできる場合がある。しかし、そのマルコフ過程自体の状態空間が大きくなるために、解析が困難になる場合が多い。

そこで、「全ての遷移の可能性を考えずに、次状態の期待値の方向へ遷移する」という決定的な動きを考える。本

研究ではこれを疑似平均 z_n と呼ぶことにする。図 1 は、疑似平均のイメージ図である。

幾つかのマルコフモデルでは、真の平均と疑似平均が比較的似た振る舞いをすることが実験的に確かめられている。例えば [4] では、低密度パリティ検査行列の単純復号法が示す振る舞いのモデルを、疑似平均がある程度まで近似できている例が紹介されている。また [3] では、真の平均と疑似平均の関係について統計学的な解釈が与えられている。

本稿では、単純かつ状態数の比較的大きなマルコフ過程の乱択モデルを設定し、幾つかの実験と解析によって、

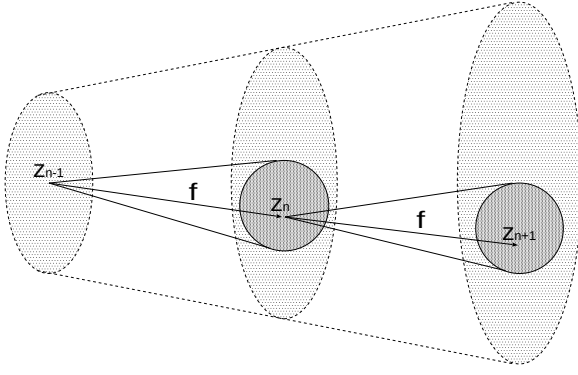


図 1 疑似平均 z_n のイメージ. 楕円内がマルコフ過程の想定する状態空間, 円内の色の濃い部分が z_n の想定する状態空間. f は各状態における次状態の期待値を与える関数

その状態遷移について真の平均と疑似平均の関係をより明確にすることを目的とする.

2. 準備

2.1 既存の定義および定理

まず, マルコフ過程に関する一般的な定義と定理を述べる.

[定義 1] 推移行列 $P = (p_{i,j})$ を持つマルコフ過程が正則であるとは, $P^N = (p_{i,j}^{(N)})$ に対し

$$\exists N \quad \forall i, j \quad p_{i,j}^{(N)} > 0$$

が成り立つことである.

これは言い換えれば, ある N 回目に, 全ての状態にいる可能性がある (到達する確率が正である) というのである.

[定理 1] 正則なマルコフ過程では, 初期確率ベクトル p_0 と無関係に次が成り立つ.

$$\exists w, p_n = p_0 P^n \rightarrow w \quad (n \rightarrow \infty).$$

またそのような確率ベクトル w を, 推移確率 P を持つマルコフ過程の定常分布と呼ぶことにする.

これについての証明はここでは記さないが, 以下から容易に示される.

[補題 1] マルコフ過程において, p_0 を初期確率ベクトルとすると

$$\exists w, \forall p_0, p_n = p_0 P^n \rightarrow w \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことは,

$$\exists W, P^n \rightarrow W = \begin{pmatrix} w \\ \vdots \\ w \end{pmatrix} \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成り立つことと必要十分の関係にある.

以上, [5] を参考に述べた.

2.2 本論文における定義

ここからは, 本研究で導入する定義について説明する.

[定義 2] マルコフ過程に基づく列 $\{S_n | n > 0\}$ に対して, 次のような関数 f を考える.

$$f(S_n) = \mathbf{E}[S_{n+1} | S_n].$$

このとき, 以下のように定義される関数 z_n を, S_n の疑似平均と呼ぶ.

$$z_n = f^n(z_0), z_0 = S_0.$$

そして, マルコフモデルの真の平均に対する疑似平均の近似性能を解析するための足掛かりとして, 本論文では以下のような単純なマルコフモデルを導入する.

[定義 3] 以下のような, 単純な乱択を行なうモデルを定義する.

Model: SIMPLEMODEL

Instance: $S, A_0, B_0, d \in \mathbf{N}$ s.t. $A_0 + B_0 = S$,
 $0 < d < S$. 関数 $\mathcal{P} : [0, S] \rightarrow [a, b]$
s.t. $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Init.Step: $n := 0$ とする.

Rep.Step: 以下を T 回繰り返す.

$\mathcal{P}(A_n)$ の値を確率として, 次の乱択を行なう.

$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} + \begin{cases} \begin{pmatrix} -\min\{d, A_n\} \\ \min\{d, A_n\} \end{pmatrix} & : \mathcal{P}(A_n) \\ \begin{pmatrix} \min\{d, B_n\} \\ -\min\{d, B_n\} \end{pmatrix} & : 1 - \mathcal{P}(A_n) \end{cases}$$

$n := n + 1$ とする.

本論文では, 確率 $\mathcal{P}(A_n)$ を

$$\mathcal{P}(A_n) = \frac{w A_n}{w A_n + B_n} = \frac{w A_n}{(w-1)A_n + S} \quad (w \geq 1) \quad (1)$$

と定義し, $w = 1$, $w > 1$ の場合をそれぞれ推移確率が線型の場合, 非線型の場合と呼ぶことにする.

この SIMPLEMODEL において, $\forall n, A_n + B_n = S$ は

明らかに成り立つ。また、演算子 $\min$ が無効になり

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} \right] \\ = \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -\mathcal{P}(A_n) + (1 - \mathcal{P}(A_n)) \\ \mathcal{P}(A_n) - (1 - \mathcal{P}(A_n)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と考えることができる必要十分条件は

$$\begin{cases} \mathcal{P}(A_n) = 0 & \text{if } A_n < d \\ \mathcal{P}(A_n) = 1 & \text{if } S - A_n < d \end{cases} \quad (2)$$

である。

簡単のため、次節以降で扱う **Instance** は、以下の条件を満たすものとする。この条件と上述の確率の定義 (式 (1)) を合わせると、式 (2) が満たされるための十分条件となる。

[仮定 1] A_0 および B_0 が d を約数に持つ。

3. 解 析

本章では、SIMPLEMODEL における A_n の振る舞いと疑似平均 z_n との関係を解析的に議論する。

3.1 疑似平均の性質

まず線型の場合について、 z_n は次の性質を持つ。

[定理 2] マルコフ過程 $\mathbf{E}[S_n | n \geq 0]$ に対して $f(S_n) = \mathbf{E}[S_{n+1} | S_n]$ で定義される関数 f が線型なら、 S_n の疑似平均 z_n について以下が成り立つ。

$$\forall n \quad z_n = \mathbf{E}[S_n] .$$

(証明) 関数 f が線型より

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[S_{n+1}] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[S_{n+1} | S_n]] \\ &= \mathbf{E}[f(S_n)] \\ &= f(\mathbf{E}[S_n]), \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{E}[S_n] = f^n(S_0) = z_n .$$

□

ここで SIMPLEMODEL における状態遷移の期待値 f について考えると、

$$f(A_n) = \mathbf{E}[A_{n+1} | A_n] = A_n - d \cdot \frac{(w+1)A_n - S}{(w-1)A_n + S}$$

となり、 $w = 1$ の場合は $\forall n \quad z_n = \mathbf{E}[A_n]$ が成り立つ。また z_n は $z_n = f(z_n)$ を解くことで得られる以下の唯一の極限値を持つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{S}{w+1} .$$

3.2 A_n の確率分布

[仮定 1] より、以下が成り立つ。

[注意 1]

$$|A_n - A_0| \bmod 2d = \begin{cases} 0 & (n : \text{even}) \\ d & (n : \text{odd}) . \end{cases} \quad (3)$$

これは n の偶奇によって互いに排反な二つの状態空間が存在することを示している。

また、 $p_{i,j} = \mathbf{Pr}\{A_{n+1} = j | A_n = i\}$ ($i, j \in \{0, 1, \dots, S\}$) とすると、

$$p_{i,j} = \begin{cases} \mathcal{P}(i) & \text{if } i - d = j \\ 1 - \mathcal{P}(i) & \text{if } i + d = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり、推移行列 $P = (p_{i,j})$ は以下のような形を示す。

$$P = \begin{pmatrix} & & p_{0,d} & & & \\ & & & \ddots & & O \\ & p_{d,0} & & & \ddots & \\ & & \ddots & O & & \ddots \\ & & & \ddots & & p_{S-d,S} \\ O & & & \ddots & & \\ & & & & p_{S,S-d} & \end{pmatrix} . \quad (4)$$

ここで、次が成り立つ。

[定理 3] SIMPLEMODEL において、確率変数 A_n は $n \rightarrow \infty$ で周期 2 を持つ確率分布を取る。

(証明) 簡単のため、 $A_n : \text{even}$ として考える (odd の場合は、式 (6) 以降の議論を少々変えれば良い)。

ここで、 $P^2 = (p_{i,j}^{(2)})$ とし、その部分要素 $\{p_{i,j}^{(2)} | i + j \bmod 2d = 0\}$ より構成される次のような 2 つの行列を考える。

$$\begin{aligned} P_e &= \begin{pmatrix} p_{0,0}^{(2)} & p_{0,2d}^{(2)} & p_{0,4d}^{(2)} & \cdots & p_{0,S_e}^{(2)} \\ p_{2d,0}^{(2)} & p_{2d,2d}^{(2)} & p_{2d,4d}^{(2)} & \cdots & p_{2d,S_e}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & \\ p_{S_e,0}^{(2)} & p_{S_e,2d}^{(2)} & p_{S_e,4d}^{(2)} & \cdots & p_{S_e,S_e}^{(2)} \end{pmatrix}, \\ P_o &= \begin{pmatrix} p_{d,d}^{(2)} & p_{d,3d}^{(2)} & p_{d,5d}^{(2)} & \cdots & p_{d,S_o}^{(2)} \\ p_{3d,d}^{(2)} & p_{3d,3d}^{(2)} & p_{3d,5d}^{(2)} & \cdots & p_{3d,S_o}^{(2)} \\ \vdots & & \ddots & & \\ p_{S_o,d}^{(2)} & p_{S_o,3d}^{(2)} & p_{S_o,5d}^{(2)} & \cdots & p_{S_o,S_o}^{(2)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし、

$$(S_e, S_o) = \begin{cases} (S, S-d) & (S \bmod 2d = 0) \\ (S-d, S) & (S \bmod 2d = d) . \end{cases}$$

また、式 (4) より

$$p_{id,jd}^{(2)} \begin{cases} > 0 & \text{if } |i-j| \leq 2 \\ = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

であることに注意. すると, これらは確率ベクトル

$$\begin{cases} p_{e,n} = (\mathbf{Pr}\{A_{2n}=0\}, \mathbf{Pr}\{A_{2n}=2d\}, \\ \quad \dots, \mathbf{Pr}\{A_{2n}=S_e\}) \\ p_{o,n} = (\mathbf{Pr}\{A_{2n+1}=d\}, \mathbf{Pr}\{A_{2n+1}=3d\}, \\ \quad \dots, \mathbf{Pr}\{A_{2n+1}=S_o\}) \end{cases} \quad (6)$$

を持つマルコフ過程 $A_{e,n} = A_{2n}$, $A_{o,n} = A_{2n+1}$ に対しての推移行列となる.

さて, $p_{e,n}$ について考えると, 式 (5) より $\exists k \geq S/d$ に対して P_e^k の要素が全て正になるので, $A_{e,n}$ は正則なマルコフ過程であることが分かる. $A_{o,n}$ についても同様. すると 定理 1 より, これらのマルコフ過程はある定常分布に必ず収束する. ゆえに, 確率変数 A_n は $n \rightarrow \infty$ で周期 2 を持つ確率分布を取る. $\square$

以下, $M = S/d$ ($M \in \mathbf{N}$) とおく. ここで, A_n の確率分布について次の定理が成り立つ.

[定理 4] SIMPLEMODEL について, 推移確率 P に対する定常分布を $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \dots, \hat{p}_S)$ とすると, 以下が成り立つ.

$$\hat{p}_j = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{w^{M-i-1} \{M+i(w-1)\}}{M(w+1)^{M-1}} \binom{M}{i} & \text{if } j = id, i \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(A_{2n} = j) = \begin{cases} 2\hat{p}_j & \text{if } |A_0 - j|/d : \text{even} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Pr}(A_{2n+1} = j) = \begin{cases} 2\hat{p}_j & \text{if } |A_0 - j|/d : \text{odd} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(証明) SIMPLEMODEL における A_n の推移確率 P に対し, 定常分布 $\hat{p}$ は以下を満たす確率ベクトルのことである.

$$\hat{p}P = \hat{p}.$$

これを連立方程式の形で書き表したものが以下である.

$$\hat{p}_i = \begin{cases} \hat{p}_d \cdot p_{d,0} & \text{if } i=0 \\ \hat{p}_{N-d} \cdot p_{N-d,N} & \text{if } i=S \\ \hat{p}_{i-d} \cdot p_{i-d,i} + \hat{p}_{i+d} \cdot p_{i+d,i} & \text{if } 0 < i < S \\ & \text{and } i/d \in \mathbf{N} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

これに, 確率ベクトルの定義である

$$\sum_{j=0}^N \hat{p}_j = 1,$$

$$\forall j \in [0, N] \quad \hat{p}_j \geq 0$$

を加えて得られる計 $S+1$ 本の方程式は互いに独立であり, また [定理 4] で表された $\hat{p}$ はこれら全ての式を満たす. ゆえにこれが唯一の定常分布である.

A_n の確率ベクトル $p_n = (\mathbf{Pr}(A_n = 0), \mathbf{Pr}(A_n = 1), \dots, \mathbf{Pr}(A_n = S))$ に対しても, 式 (3) に注意すると

$$p_n P^2 = p_n$$

で同様の議論が成り立ち, [定理 4] で表された $\mathbf{Pr}(A_n = i)$ が唯一の解であることが分かる. そして [定理 3] より, その解の分布に必ず収束する (厳密には, 周期 2 を持つ振動に落ち着く) ことが言える^(注1). $\square$

また, SIMPLEMODEL は d, w の値によって次のような性質を持つことを確認しておく. (Ehrenfest の拡散モデルについては [2] より再引)

[注意 2] $w=1$ のとき, [定理 2] より以下が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A_{2n}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A_{2n+1}] = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{S}{2}.$$

また, その定常分布は以下のような二項分布を示す.

$$\hat{p}(A = j) = \binom{N}{j} 2^{-S}.$$

特に, $w = 1, d = 1$ の SIMPLEMODEL は一般に **Ehrenfest の拡散モデル** と呼ばれる.

$w \neq 1$ の場合は, 一般に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A_{2n}] \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A_{2n+1}]$$

となるため, 十分大きい n で $\mathbf{E}[A_n]$ の値は周期 2 の振動を示す. その 2 値について, 以下の補題が成り立つ.

[補題 2] SIMPLEMODEL について, 以下が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[A_{n+1}]}{2} = \frac{d(2M-1+w)}{2(1+w)}. \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{E}[A_n] - \mathbf{E}[A_{n+1}]| \leq d. \quad (8)$$

(注1): さらに完全な議論については, [1] の Theorem VIII を参照のこと.

(証明) 式 (7) について

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[A_k] + \mathbf{E}[A_{k+1}]}{2} \\
&= \sum_{i=0}^S \hat{p}(A=i) i \\
&= \sum_{i=0}^M \frac{1}{2} \frac{w^{M-i-1} \{M+i(w-1)\}}{M(w+1)^{M-1}} \binom{M}{i} i d \\
&= \frac{w^{M-1} d}{2 M (w+1)^{M-1}} \underbrace{\left(M \sum_{i=0}^M \left(\frac{1}{w} \right)^i \binom{M}{i} i \right)}_{\left(1+\frac{1}{w}\right)^{M-1} \frac{1}{w} M} \\
&\quad + (w-1) \underbrace{\sum_{i=0}^M \left(\frac{1}{w} \right)^i \binom{M}{i} i^2}_{\left(1+\frac{1}{w}\right)^{M-2} \frac{1}{w} M \left(\frac{M}{w} + 1 \right)} \\
&= \frac{d(2M-1+w)}{2(1+w)}.
\end{aligned}$$

式 (8) について, M :odd の場合

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \mathbf{E}[A_k] - \mathbf{E}[A_{k+1}] \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \{ \mathbf{Pr}(A_k = 2i d) 2i d \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{Pr}(A_{k+1} = (2i+1)d) (2i+1)d \} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \{ \mathbf{Pr}(A_k = 2i d) 2i d \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{Pr}(A_k = 2i d) \mathbf{E}[A_{k+1} | A_k = 2i d] \} \right| \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{M}{2} \rfloor} \{ \mathbf{Pr}(A_k = 2i d) \underbrace{|2i d - f(2i d)|}_{\leq d} \} \right) \leq d.
\end{aligned}$$

ここで, $|2i d - f(2i d)| \leq d$ は 1 回の Rep.Step における変移が高々 d であることによる。

M :even の場合も, 以下について同様の式変形をすれば示される。

$$\begin{aligned}
& \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=1}^{\frac{M}{2}} \{ \mathbf{Pr}(A_k = (2i-1)d) (2i-1)d \right. \\
&\quad \left. - \mathbf{Pr}(A_{k+1} = 2i) 2i \} \right|
\end{aligned}$$

□

上記の補題と, 等式

$$\left| a - \frac{a+b}{2} \right| = \left| b - \frac{a+b}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2}$$

に注意すると, 以下の 2 つの系が得られる。

[系 1]

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}[A_n] - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[A_{n+1}]}{2} \right| \leq \frac{d}{2}.$$

[系 2]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[A_{n+1}]}{2} - z_n \right\} = \frac{d(w-1)}{2(w+1)}.$$

これらはそれぞれ, $n \rightarrow \infty$ における $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n の, $\mathbf{E}[A_n]$ の振動中心からのずれの大きさを表している。

4. 実験

この節では, SIMPLEMODEL の具体例について, A_n と z_n の関係を実験的に計算し, 前章の結果も踏まえて考察する。

4.1 実験の準備

以下に示す具体的な Instance のもとで, A_n の確率分布についての厳密な数値計算を行なう。

$$S = 1000, A_0 \in [0, S], d \in \{1, 2, 5, 10\},$$

$$\mathcal{P}(x) = \frac{wx}{wx + (S-x)}, w \in \{1, 2, 5, 10\}.$$

なお, Instance の組合せは [仮定 1] を成り立たせるものに限定する。

まず, 真の平均 $\mathbf{E}[A_n]$ と 疑似平均 z_n の変化の様子を確認しておく。 $d = 5, A_0 = 600$ と固定し, $w = \{2, 5, 10\}$ についての $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n を表したグラフを図 2 に, また, $w = 5, A_0 = 600$ と固定し, $d = \{2, 5, 10\}$ についての $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n を表したグラフを図 3 にそれぞれ示す (いずれも横軸はステップ数 n)。状態数 S と比較すると, $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n の差は小さく抑えられている。さらに, 十分大きな n に対する $\mathbf{E}[A_n]$ の値の振動の幅 $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbf{E}[A_n] - \mathbf{E}[A_{n+1}]|$ が [補題 2] 式 (8) の右辺と比べてとても小さいことが分かる^(注2)。

以降, 各 d, w, A_0 に対する $\mathbf{E}[A_n]$ の振る舞いを調べるが, 十分大きい n に対してその値が周期 2 を持つので, 簡単のため, $\mathbf{E}[A_n]$ の関数 g が与えられた場合

$$\begin{aligned}
& \text{limit} \{g(\mathbf{E}[A_n])\} \\
&= \max \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} g(\mathbf{E}[A_{2n}]), \lim_{n \rightarrow \infty} g(\mathbf{E}[A_{2n+1}]) \right\}
\end{aligned}$$

と表記することにする。

(注2) : おそらくグラフから振動の幅は確認できない。参考までに, $d = 20, w = 10$ で 10^{-3} 程度の値を示した。

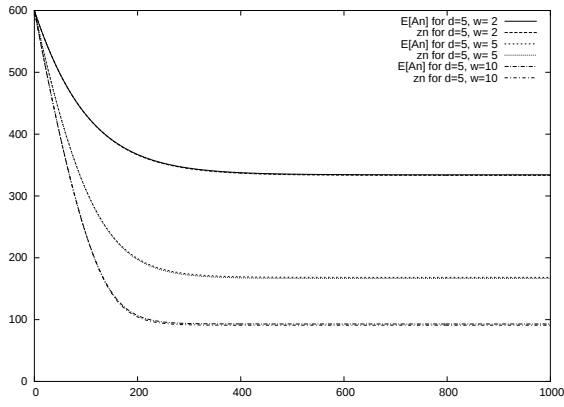


図 2 $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n の変化, $d = 5$ は固定. 上から順に $w = 2, 5, 10$.

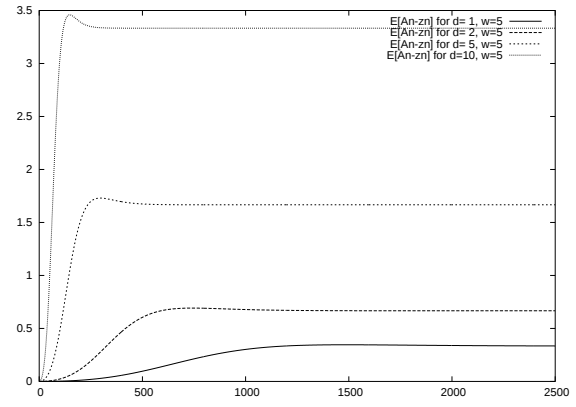


図 4 $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ の変化, $w = 5$ に固定. 上から順に $d = 10, 5, 2, 1$.

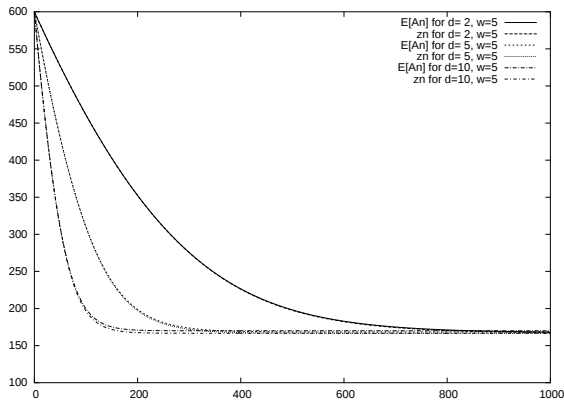


図 3 $\mathbf{E}[A_n]$ と z_n の変化, $w = 5$ は固定. 上から順に $d = 2, 5, 10$.

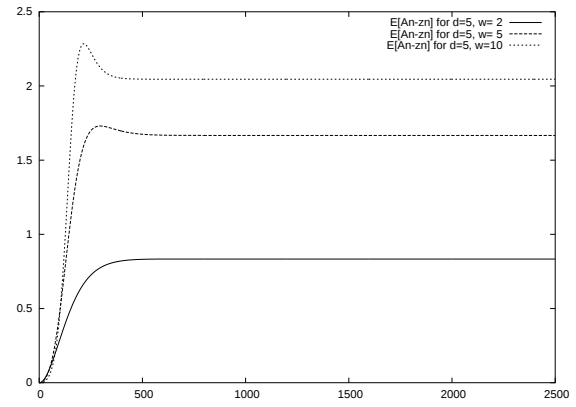


図 5 $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ の変化, $d = 5$ に固定. 上から順に $w = 10, 5, 2$.

4.2 実験結果 I : $\mathbf{E}[A_n] - z_n$

$w = 5, A_0 = 600$ と固定し, $d = \{1, 2, 5, 10\}$ についての $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ を表したグラフを図 4 に, $d = 5, A_0 = 600$ と固定し, $w = \{2, 5, 10\}$ についての $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ を表したグラフを図 5 にそれぞれ示す (いずれも横軸はステップ数 n). 十分大きな n に対する $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ の値は d に比例した大きさを持っており, これは [系 2](p.5) で述べたことと等しい. しかし, w の増加に従って $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ はその収束値 (厳密には $\lim \{\mathbf{E}[A_n] - z_n\}$) よりも大きい値を示すステップが顕著になる. この現象を**突出**と呼ぶことにする.

4.3 実験結果 II : $\mathbf{E}[|A_n - \mathbf{E}[A_n]|]$

$d = 5, A_0 = 600$ と固定し, $w = \{1, 2, 5, 10\}$ についての $\mathbf{E}[|A_n - \mathbf{E}[A_n]|]$ のグラフを示したものが図 6 である. それぞれ $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ のグラフ (図 4) より早い段階で突出が起こり, $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ の突出が最大になる頃 $\mathbf{E}[|A_n - \mathbf{E}[A_n]|]$ が周期 2 の振動におさまりにかけていることが確認できる.

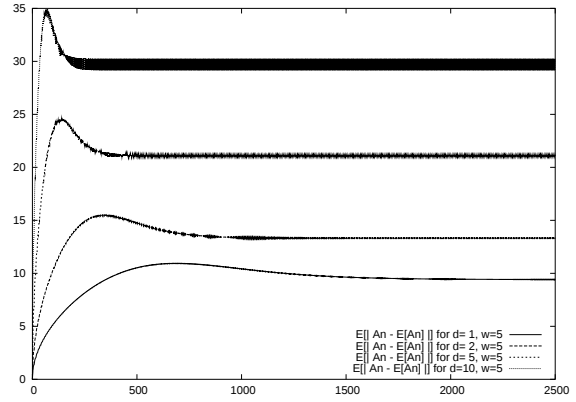


図 6 $\mathbf{E}[|A_n - \mathbf{E}[A_n]|]$ の変化, $w = 5$ に固定. 上から順に $d = 10, 5, 2, 1$.

そこで, A_0 に対して突出がどのように変化するかを調べる. $d \in \{2, 5\}$, $w \in \{1, 2, 5, 10\}$ において, A_0 の変化が比

$$r = \frac{\max_n \{\mathbf{E}[|A_n - \mathbf{E}[A_n]|]\}}{\lim \{|A_n - \mathbf{E}[A_n]|\}} \quad (9)$$

をどのように変化させるかを表したグラフが、図 7 である (横軸は初期値 A_0)。この図から、

$$A_0 > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[A_{n+1}]}{2}$$

という条件において $r > 1$ となる、すなわち突出が起こるということが見て取れる。

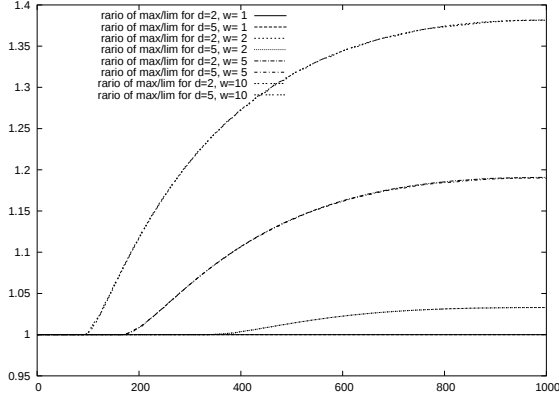


図 7 $\max_n \{|\mathbf{E}[A_n - \mathbf{E}[A_n]]|\}$ の limit $\{|A_n - \mathbf{E}[A_n]|\}$ に対する比の変化。上から順に $w = 10, 5, 2, 1$ 。 d による変化はほとんど見られない。

5. 考 察

収束点における真の平均と疑似平均の差 $\mathbf{E}[A_n] - z_n$ の振る舞いは、厳密に解析することができた。そして、収束までのプロセスを通してその差が状態の総数 S と比べて小さい値であることは、実験的に確かめられた。一方で、Instance によっては、その差が収束点とは別の点で最大の値を示してしまう場合が確かめられた。

あるステップ n において

$$\begin{aligned} \delta_n &= \mathbf{E}[A_{n+1}] - f(\mathbf{E}[A_n]) \\ &= \mathbf{E}[f(A_n)] - f(\mathbf{E}[A_n]) \\ \Delta_n &= \mathbf{E}[A_n] - z_n = \mathbf{E}[A_n] - f^n(A_0) \end{aligned}$$

とおくと、関数 f が線型の場合は $\delta_n = 0$ であるがゆえに $\Delta_n = 0$ が成り立つ。逆に言えば、非線型の場合に $\Delta_n \neq 0$ となるのは $\delta_n \neq 0$ であることによる。これより、 Δ_n に影響を与えている本質的な要素を δ_n と推測する。一方、 $\forall n > 0$ $\delta_n \neq 0$ であるにも関わらず十分大きな n で Δ_n の値が落ち着くのは、 δ_m が $\exists n > m$ $\Delta_n \neq 0$ に与える影響が、 $n - m \rightarrow \infty$ で 0 に収束する性質があるためと推測される。

以上より、 $\Delta_n = \mathbf{E}[A_n] - z_n$ の突出という現象について、次のように予想する。

[予想 1] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}[A_n] + \mathbf{E}[A_{n+1}]}{2}$ より大きな値の A_0 から開始したプロセスでは、 A_n の分散が突出する。

[予想 2] A_n の分散の増減と $\delta_n = \mathbf{E}[f(A_n)] - f(\mathbf{E}[A_n])$ の増減は一致する。

[予想 3] $\Delta_n = \mathbf{E}[A_n] - z_n$ の増減と $\{\delta_m | 0 < m < n\}$ の大小は一致する。

6. おわりに

今後の課題として、以下の二点が考えられる。第一点は、SIMPLEMODEL をより一般的なマルコフモデルへと拡張することである。例えば、今回のモデルは以下のような条件がついたものだった。

[仮定 1] A_0 および B_0 が d を約数に持つ。

しかしながら、この条件を外して行なった実験からは、外したことが原因と思われる実験結果の大きな変化は特に見受けられなかった。よって、解析的に、もしくは統計学的にこの条件を外し、定理を拡張することは可能だと推測される。その後、2 次元以上のベクトルで状態が表されるマルコフモデルへと拡張できればと考えている。

もう一点として、 A_n の分布が落ち着くまでの真の平均と疑似平均の誤差 $\mathbf{E}[A_n - z_n]$ の解析が挙げられる。それによって、その誤差を緩和するような項を z_n の漸化式に取り込み、より近似能力の高い疑似平均を定義することが期待できる。これに対しては、実験より予想された A_n の分散の突出の解析からのアプローチを試みたい。

謝辞 この研究を進めるにあたり、ご協力下さいました渡辺研究室の皆様深く感謝致します。

文 献

- [1] M. A. Berger, *An Introduction to Probability and Stochastic Processes*, pp.107, 1993.
- [2] W. Feller, 確率論とその応用 I 下, 紀伊國屋書店, 1961.
- [3] H. Takahashi and Y. Niikura, An extension of Azuma-Hoeffding inequalities and its application to an analysis for randomized local search algorithms, 第 6 回情報論的学習理論ワークショップ (IBIS2003), Kyoto, pp.177-181, 2003.
- [4] O. Watanabe, T. Sawai and H. Takahashi, Analysis of a randomized local search algorithm for LDPCC decoding problem, In *SAGA03*.
- [5] 松田正一, 洲之内治男, 杉山昌平, 出居茂, OR のための基礎数学 4 確率と DP・待合せ理論, pp.135-152, 1964.