

[チュートリアル講演] 確率的情報処理と確率伝搬アルゴリズムの基礎

田中 和之[†]

[†] 東北大学大学院情報科学研究科応用情報科学専攻, 仙台市

E-mail: †kazu@statp.is.tohoku.ac.jp

あらまし 本チュートリアル講演では, 人工知能における確率推論という形で注目を集めつつあるベイジアンネットワークを例に取り確率的情報処理の基礎とその具体的アルゴリズムを構成する処方箋としての確率伝搬法 (信念伝搬法, Belief Propagation) についての解説を行う。

キーワード 確率的情報処理, 確率推論, 確率伝搬法, ベイジアンネットワーク, グラフィカルモデル

Probabilistic Information Processing and Belief Propagation

Kazuyuki TANAKA[†]

[†] Department of Applied Information Sciences, Graduate School of Information Sciences,

Tohoku University, Aramaki-aza-aoba 09, Aoba-ku, Sendai 980-8579, Japan

E-mail: †kazu@statp.is.tohoku.ac.jp

Abstract The basic frameworks of the Bayesian network and the belief propagation in the probabilistic information processing are reviewed in the standpoint of probabilistic inference. Some simple examples of Bayesian networks for the probabilistic inference are demonstrated and the basic formulation of the belief propagation algorithm is explained.

Key words probabilistic information processing, probabilistic inference, belief propagation, Bayesian network, graphical model

1. はじめに.

この 10 年ほどの間に情報処理に関するさまざまな分野で, 問題を確率的な枠組みのもとで取り扱おうという, いわゆる確率的情報処理 (Probabilistic Information Processing) が注目を集めており, その範囲は符号理論, 信号・画像処理から人工知能, 情報通信技術, データマイニングに至るまで広範囲にわたっている [1] ~ [3]. 従来, この確率的情報処理は一部の特殊な場合を除いて一般にはシステムのサイズとともに必要な計算量が指数関数的に増大してしまうなどの問題があったため, 実用化には長い道のりがあると考えられ, あまり注目されなかった. ところが, 近年, コンピュータの性能が飛躍的に向上し, そのことを契機として確率的方法論が見直され, 情報処理の種々の分野で大規模な確率モデルの取り扱いが実際に検討されるようになり, 並行してそれらの検討を支える理論的枠組みの必要性も徐々に意識されるようになってきた.

本チュートリアル講演では, 確率的情報処理の中でも最近, 人工知能における確率推論という形で注目を集めつつあるベイジアンネットワーク [4] と, その具体的アルゴリズムを構成する処方箋としての確率伝搬法 (信念伝搬法, Belief Propagation) [5] ~

[7] についての解説を行う。

2. ベイジアンネットワークとグラフィカルモデル.

まず, ベイジアンネットワークについて具体的な例を示して簡単に触れることにする. 一般にベイジアンネットワークは複数のノードとそのノード間の因果関係を表す有効線分を用いて与えられる. 各ノードには確率変数が, 有効線分には条件付き確率がそれぞれ割り当てられる.

例として 4 個のノードを考え, 図 1 に示すようなグラフ表現で与えられる確率的推論機構を用いて, どのようなものかをわかりやすく解説しよう. この 4 個のノードに対してそれぞれに [曇りである], [スプリンクラーが作動している], [雨が降る], [芝生がぬれている] という命題を割り当て, そのそれぞれの命題に対応して true (T) と false (F) という 2 つの状態をとる確率変数をそれぞれ A_C , A_S , A_R , A_W により表すものとする. 結合確率と条件付き確率の関係式により

$$\begin{aligned} \Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R, A_W = a_W\} \\ = \Pr\{A_W = a_W | A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R\} \end{aligned}$$

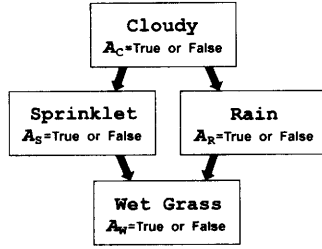


図 1 4 個のノードからなる確率的推論機構の例.

Fig.1 An example of probabilistic inference consisting of four nodes.

$$\begin{aligned} & \times \Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C, A_S = a_S\} \\ & \times \Pr\{A_S = a_S | A_C = a_C\} \Pr\{A_C = a_C\} \end{aligned} \quad (1)$$

が導かれる。ここで、各命題に対する因果関係として「曇りである」とすればいずれ「雨が降る」可能性がある。「曇りでない」とすれば晴れているということで芝生を枯らさないために「スプリンクラーを作動させる」ということになる。そして「雨が降る」かまたは「スプリンクラーを作動させる」ということにより「芝生がぬれている」という状況が発生する。 $\Pr\{A_W = a_W | A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R\}$ は A_C すなわち「曇っているかどうか」には直接は依存せず、 $\Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C, A_S = a_S\}$ は S すなわち「スプリンクラーが作動しているかどうか」には直接依存しないことを考慮するとそれぞれ

$$\begin{aligned} & \Pr\{A_W = a_W | A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R\} \\ & = \Pr\{A_W = a_W | A_S = a_S, A_R = a_R\} \\ & \Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C, A_S = a_S\} \\ & = \Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C\} \end{aligned} \quad (2)$$

と与えられる。従って、結合確率 $\Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R, A_W = a_W\}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} & \Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R, A_W = a_W\} \\ & = \Pr\{A_W = a_W | A_S = a_S, A_R = a_R\} \\ & \quad \times \Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C\} \\ & \quad \times \Pr\{A_S = a_S | A_C = a_C\} \Pr\{A_C = a_C\} \end{aligned} \quad (3)$$

式 (3) における $\Pr\{A_W = a_W | A_S = a_S, A_R = a_R\}$, $\Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C\}$, $\Pr\{A_S = a_S | A_C = a_C\}$, $\Pr\{A_C = a_C\}$ の値はあらかじめ問題設定の中で与えられているものとする。式 (3) の確率推論機構を表したのが図 1 である。ここで、

$$\begin{aligned} W_{A,S,R}(a_A, a_S, a_R) & \equiv \Pr\{A_W = a_A | A_S = a_S, A_R = a_R\} \\ W_{R,C}(a_R, a_C) & \equiv \Pr\{A_R = a_R | A_C = a_C\} \\ W_{S,C}(a_S, a_C) & \equiv \Pr\{A_S = a_S | A_C = a_C\} \Pr\{A_C = a_C\} \end{aligned} \quad (4)$$

という関数を新たに導入すると、結合確率分布は

$$\Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, A_R = a_R, A_W = a_W\}$$

$$= W_{A,S,R}(a_A, a_S, a_R) W_{R,C}(a_R, a_C) W_{S,C}(a_S, a_C) \quad (5)$$

という形に書き換えられる。このように書き換えて結合確率分布をノード間が無向線分または多角形で結ばれた図 2 のようなグラフ表現に対応づけることが可能となる。さて、ここで「芝生がぬれている」のは一体何が原因なのかを推定したいとする。この場合、

$$\begin{aligned} \Pr\{A_R = a_R | A_W = a_W\} & = \frac{\Pr\{A_R = a_R, A_W = a_W\}}{\Pr\{A_W = a_W\}} \\ \Pr\{A_S = a_S | A_W = a_W\} & = \frac{\Pr\{A_S = a_S, A_W = a_W\}}{\Pr\{A_W = a_W\}} \end{aligned}$$

を計算して比較することになる。これらの条件付き確率は次の周辺確率を計算することにより得られる。

$$\begin{aligned} & \Pr\{A_R = a_R, A_W = a_W\} \\ & = \sum_{a_C=T, F} \sum_{a_S=T, F} \Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, \\ & \quad A_R = a_R, A_W = a_W\} \\ & \Pr\{A_S = a_S, A_W = a_W\} \\ & = \sum_{a_C=T, F} \sum_{a_R=T, F} \Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, \\ & \quad A_R = a_R, A_W = a_W\} \\ & \Pr\{A_W = a_W\} \\ & = \sum_{a_C=T, F} \sum_{a_S=T, F} \sum_{a_R=T, F} \Pr\{A_C = a_C, A_S = a_S, \\ & \quad A_R = a_R, A_W = a_W\} \end{aligned}$$

得られた $\Pr\{A_R = \text{true} | A_W = \text{true}\}$ と $\Pr\{A_S = \text{true} | A_W = \text{true}\}$ を比較することで「芝生がぬれている」のは「雨」ためだったのか「スプリンクラー」のせいだったかということが推論できるわけである。

もう少し複雑な推論機構として図 3 に示す推論機構を考えよう。この例題はベイジアンネットの標準的な例題を掲載したホームページ <http://www.norsys.com/> に「Asia」という名前で掲載されているものである。この推論機構は 8 個のノードから構成されている。各ノードに 1 番から 8 番までの通し番号をふる。各ノードには「+1」と「-1」という 2 つの状態が割り当てられている。この時、結合確率分布はベイズ規則をもとに次のように構成される。

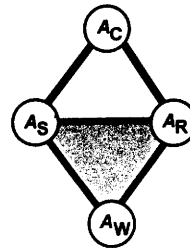


図 2 図 1 の確率的推論機構のグラフ表現.

Fig.2 Graphical representation of the probabilistic inference given in Fig.1.

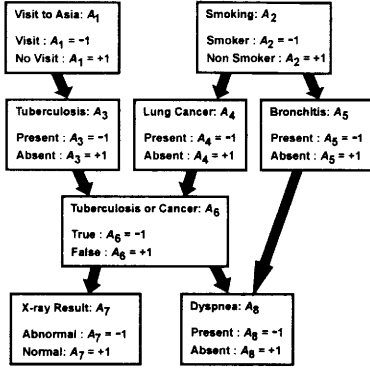


図3 確率的推論機構の例.
Fig. 3 An example of probabilistic inference.

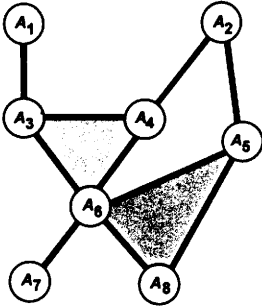


図4 図3の確率的推論機構のグラフ表現.
Fig. 4 Graphical representation of the probabilistic inference given in Fig. 3.

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \\
 & \quad A_5 = a_5, A_6 = a_6, A_7 = a_7, A_8 = a_8\} \\
 &= \Pr\{A_7 = a_7, A_8 = a_8 | A_1 = a_1, A_2 = a_2, \\
 & \quad A_3 = a_3, A_4 = a_4, A_5 = a_5, A_6 = a_6\} \\
 & \times \Pr\{A_5 = a_5, A_6 = a_6 | A_1 = a_1, \\
 & \quad A_2 = a_2, A_3 = a_3, A_4 = a_4\} \\
 & \times \Pr\{A_3 = a_3, A_4 = a_4 | A_1 = a_1, A_2 = a_2\} \\
 & \times \Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

右辺の表式に見られる条件付き確率は図3では

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \Pr\{A_7 = a_7, A_8 = a_8 | A_1 = a_1, A_2 = a_2, \\
 & \quad A_3 = a_3, A_4 = a_4, A_5 = a_5, A_6 = a_6\} \\
 & \quad = V_{56 \rightarrow 8}(a_8 | a_5, a_6) V_{6 \rightarrow 7}(a_7 | a_6) \\
 & \Pr\{A_5 = a_5, A_6 = a_6 | A_1 = a_1, A_2 = a_2, \\
 & \quad A_3 = a_3, A_4 = a_4\} \\
 & \quad = V_{2 \rightarrow 5}(a_5 | a_2) V_{34 \rightarrow 6}(a_6 | a_3, a_4) \\
 & \Pr\{A_3 = a_3, A_4 = a_4 | A_1 = a_1, A_2 = a_2\} \\
 & \quad = V_{1 \rightarrow 3}(a_3 | a_1) V_{2 \rightarrow 4}(a_4 | a_2) \\
 & \Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2\} = V_1(a_1) V_2(a_2)
 \end{aligned} \right. \tag{7}$$

という形に与えられる。これにより式(6)に与えられた結合確率分布は次のような形に書き換えられる。

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \\
 & \quad A_5 = a_5, A_6 = a_6, A_7 = a_7, A_8 = a_8\} \\
 &= V_{56 \rightarrow 8}(a_8 | a_5, a_6) V_{6 \rightarrow 7}(a_7 | a_6) \\
 & \quad \times V_{34 \rightarrow 6}(a_6 | a_3, a_4) V_{2 \rightarrow 5}(a_5 | a_2) V_{2 \rightarrow 4}(a_4 | a_2) \\
 & \quad \times V_{1 \rightarrow 3}(a_3 | a_1) V_2(a_2) V_1(a_1)
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで

$$\left\{ \begin{aligned}
 & W_{568}(a_5, a_6, a_8) \equiv V_{56 \rightarrow 8}(a_8 | a_5, a_6) \\
 & W_{67}(a_6, a_7) \equiv V_{6 \rightarrow 7}(a_7 | a_6) \\
 & W_{346}(a_3, a_4, a_6) \equiv V_{34 \rightarrow 6}(a_6 | a_3, a_4) \\
 & W_{25}(a_2, a_5) \equiv V_{2 \rightarrow 5}(a_5 | a_2) \\
 & W_{24}(a_2, a_4) \equiv V_{2 \rightarrow 4}(a_4 | a_2) V_2(a_2) \\
 & W_{13}(a_1, a_3) \equiv V_{1 \rightarrow 3}(a_3 | a_1) V_1(a_1)
 \end{aligned} \right. \tag{9}$$

とおくことにより結合確率分布は

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3, A_4 = a_4, \\
 & \quad A_5 = a_5, A_6 = a_6, A_7 = a_7, A_8 = a_8\} \\
 &= W_{568}(a_5, a_6, a_8) W_{346}(a_3, a_4, a_6) W_{67}(a_6, a_7) \\
 & \quad \times W_{25}(a_2, a_5) W_{24}(a_2, a_4) W_{13}(a_1, a_3)
 \end{aligned} \tag{10}$$

と表される。この結合確率分布に対応するグラフ表現は図4で与えられる。この例題において

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\equiv \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8\} \\
 \mathbf{a} &\equiv \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}
 \end{aligned}$$

という記号を導入すると $\Pr\{A_1 = a_1, A_2 = a_2, A_3 = a_3, A_4 = a_4, A_5 = a_5, A_6 = a_6, A_7 = a_7, A_8 = a_8\}$ は $\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\}$ と書くことができる。同様にして $\mathbf{a}_{568} = \{a_5, a_6, a_8\}$, $\mathbf{a}_{346} = \{a_3, a_4, a_6\}$, $\mathbf{a}_{67} = \{a_6, a_7\}$, $\mathbf{a}_{25} = \{a_2, a_5\}$, $\mathbf{a}_{24} = \{a_2, a_4\}$, $\mathbf{a}_{13} = \{a_1, a_3\}$ という記号を導入し、更に $\mathbf{B} \equiv \{568, 346, 67, 24, 25, 13\}$ という集合を定義する。この時、 $\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\}$ は次のように表される。

$$\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\} = \prod_{\gamma \in \mathbf{B}} W_\gamma(\mathbf{a}_\gamma) \tag{11}$$

例えば

$$\Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\} = \frac{\Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\}}{\Pr\{A_8 = a_8\}}$$

を求めたい場合には、右辺の表式にある $\Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\}$ および $\Pr\{A_8 = a_8\}$ を計算することになるが、これは $\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\}$ の周辺確率分布であり、

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\} \\
 &= \sum_{\zeta_1 = \pm 1} \sum_{\zeta_2 = \pm 1} \cdots \sum_{\zeta_8 = \pm 1} \delta_{a_5, \zeta_5} \delta_{a_8, \zeta_8} \Pr\{\mathbf{A} = \boldsymbol{\zeta}\}
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 & \Pr\{A_8 = a_8\} \\
 &= \sum_{\zeta_1 = \pm 1} \sum_{\zeta_2 = \pm 1} \cdots \sum_{\zeta_8 = \pm 1} \delta_{a_8, \zeta_8} \Pr\{\mathbf{A} = \boldsymbol{\zeta}\}
 \end{aligned} \tag{13}$$

により計算される。

更にノードの個数が増えると、より複雑なネットワーク構造が現れてくる。このような確率推論を目的として構成されたネットワークは一般にベイジアンネットワークと呼ばれている。また、図 2 や図 4 の例のようにグラフ表現で表される確率モデルは確率推論ではグラフィカルモデルとよばれる。

3. 確率伝搬法

ベイジアンネットワークによる推論問題の確率モデル化は古くからベイズ統計の枠組みにおいてよく知られていた。しかしながら、ノードの総数を K とすると、一部の特殊な場合を除いて、一般には周辺確率分布の計算に $O(\exp(K))$ のオーダーの計算量が必要になってしまうため、長い間実用的推論システムとしては無視されてきた。しかし、1980 年代半ばに人工知能の分野で Pearl [5] により提案された確率伝搬法が 1990 年代後半から現在に至るまで、このベイジアンネットワークを実用的アルゴリズムとして構成するキープアプリケーションとしてニューロコンピューティングとよばれる分野を中心に注目を集めつつある [4]。本節では、この確率伝搬法について段階を踏みながら解説する。

K 個の確率変数 $\mathbf{A} = \{A_i | i = 1, 2, \dots, K\}$ とその実現値 $\mathbf{a} = \{a_i | i = 1, 2, \dots, K\}$ に対する結合確率分布 $\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\} = P(\mathbf{a})$ が

$$P(\mathbf{a}) = \frac{\prod_{i=1}^{K-1} W_{i,i+1}(a_i, a_{i+1})}{\sum_{\zeta} \prod_{i=1}^{K-1} W_{i,i+1}(\zeta_i, \zeta_{i+1})} \quad (14)$$

により与えられる場合を考える。例えば $K = 5$ の場合のグラフ表現は図 5 のように与えられる。この確率モデルに対して $\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_i)$ および $\mathcal{R}_{i+1 \rightarrow i}(a_i)$ という 2 つの量を次のように導入する。

$$\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_i) = \sum_{\zeta_1=1}^{M_1} \sum_{\zeta_2=1}^{M_2} \dots \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \delta_{a_i, \zeta_i} \times \prod_{j=1}^{i-1} W_{j,j+1}(\zeta_j, \zeta_{j+1}) \quad (15)$$

$$\mathcal{R}_{i+1 \rightarrow i}(a_i) = \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i+1}=1}^{M_{i+1}} \dots \sum_{\zeta_K=1}^{M_K} \delta_{a_i, \zeta_i} \times \prod_{j=i}^{K-1} W_{j,j+1}(\zeta_j, \zeta_{j+1}) \quad (16)$$

$\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_{i+1})$ および $\mathcal{R}_{i-1 \rightarrow i}(a_{i-1})$ は次の漸化式を満たすこ



図 5 1 次元鎖的構造を持つ確率的推論機構のグラフ表現の例。

Fig. 5 Graphical representation of a probabilistic inference with one-dimensional chain structure.

とは容易に確かめられる。

$$\mathcal{L}_{1 \rightarrow 2}(a_2) = \sum_{\zeta_1=1}^{M_1} \sum_{\zeta_2=1}^{M_2} \delta_{a_2, \zeta_2} W_{1,2}(\zeta_1, \zeta_2) \quad (17)$$

$$\mathcal{R}_{K \rightarrow K-1}(a_{K-1}) = \sum_{\zeta_{K-1}=1}^{M_{K-1}} \sum_{\zeta_K=1}^{M_K} \delta_{a_{K-1}, \zeta_{K-1}} \times W_{K-1,K}(\zeta_{K-1}, \zeta_K) \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_{i+1}) = \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i+1}=1}^{M_{i+1}} \delta_{a_{i+1}, \zeta_{i+1}} \times \mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(\zeta_i) W_{i,i+1}(\zeta_i, \zeta_{i+1}) \quad (i = 2, 3, \dots, K-1) \quad (19)$$

$$\mathcal{R}_{i-1 \rightarrow i}(a_{i-1}) = \sum_{\zeta_{i-1}=1}^{M_{i-1}} \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \delta_{a_{i-1}, \zeta_{i-1}} \times \mathcal{R}_{i+1 \rightarrow i}(\zeta_i) W_{i-1,i}(\zeta_{i-1}, \zeta_i) \quad (i = K-1, K-2, \dots, 2) \quad (20)$$

漸化式 (19) および (20) を用いて逐次的に得られた $\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_i)$ および $\mathcal{R}_{i-1 \rightarrow i}(a_i)$ を用いて周辺確率分布は

$$P_i(a_i) = \frac{\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_i) \mathcal{R}_{i+1 \rightarrow i}(a_i)}{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(\zeta_i) \mathcal{R}_{i+1 \rightarrow i}(\zeta_i)} \quad (21)$$

$$P_{i,i+1}(a_i, a_{i+1}) = \frac{\mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(a_i) W(a_i, a_{i+1}) \mathcal{R}_{i+2 \rightarrow i+1}(a_{i+1})}{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i+1}=1}^{M_{i+1}} \mathcal{L}_{i-1 \rightarrow i}(\zeta_i) W(\zeta_i, \zeta_{i+1}) \mathcal{R}_{i+2 \rightarrow i+1}(\zeta_{i+1})} \quad (22)$$

と与えられ、これにより周辺確率分布が求められることになる。

これと同様の取り扱いにより複雑な構造をもつ確率モデルに一般化される。これをできるだけ明確に表すために、結合確率分布の構造とグラフ表現との関係をより一般的に定義する。まず $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_K\}$ に対して K 個のノードの集合 $\Omega = \{1, 2, \dots, K\}$ を考える。このノードのうちのいくつかの対を選んで線分で結ぶ。線分で結ばれたノード対を最近接ノード対と呼ぶことにし、すべての最近接ノード対の集合を $\mathbf{B}$ により表すことにする。この確率変数 $\mathbf{A}$ とその実現値 $\mathbf{a}$ および集合 $\mathbf{B}$ に対して結合確率分布 $\Pr\{\mathbf{A} = \mathbf{a}\} = P(\mathbf{a})$ が

$$P(\mathbf{a}) = \frac{\prod_{ij \in \mathbf{B}} W_{i,j}(a_i, a_j)}{\sum_{\zeta} \prod_{ij \in \mathbf{B}} W_{i,j}(\zeta_i, \zeta_j)} \quad (23)$$

と表される場合を考える。仮に $\mathbf{B}$ が

$$\mathbf{B} = \{ij | i = 1, 2, \dots, K-1, j = i+1\} \quad (24)$$

により与えられる時、式 (23) は式 (14) と等価となる。式 (24) に付随して与えられるグラフ表現を 1 次元鎖と呼ぶことにす

る。また、 $\mathbf{B}$ に属する任意の最近接ノード対 ij に対して $\mathbf{B}$ から ij を除いた集合 $\mathbf{B} \setminus \{ij\}$ を考える。この $\mathbf{B}$ と $\mathbf{B} \setminus \{ij\}$ に対してグラフ表現を考えたとき、 $\mathbf{B}$ に付随するグラフが単連結グラフであり、且つ $\mathbf{B} \setminus \{ij\}$ は常に 2 つの単連結グラフに分かれてしまう時、 $\mathbf{B}$ に付随するグラフを木構造を持つという。 $\mathbf{B}$ に

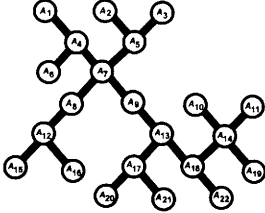


図 6 木構造として表された確率モデルのグラフ表現。

Fig. 6 Graphical representation of a probabilistic model with tree structure.

付随するグラフが図 6 のように木構造を持つとき、式 (23) で与えられた確率モデルに対するノード i の周辺確率分布は次のように与えられる。

$$P_i(a_i) = \frac{1}{Z_i} \prod_{i' \in c_i} \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \quad (i \in \Omega) \quad (25)$$

$$P_{ij}(a_i, a_j) = \frac{1}{Z_{ij}} \left(\prod_{i' \in c_i \setminus \{j\}} \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \right) W_{ij}(a_i, a_j) \times \left(\prod_{j' \in c_j \setminus \{i\}} \Lambda_{j' \rightarrow j}(a_j) \right) \quad (ij \in \mathbf{B}) \quad (26)$$

ここで $\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i)$ は漸化式

$$\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) = \frac{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i'}=1}^{M_{i'}} \delta_{a_i, \zeta_i} W_{i, i'}(\zeta_i, \zeta_{i'}) \prod_{j \in c_{i'} \setminus \{i\}} \Lambda_{j \rightarrow i'}(\zeta_{i'})}{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i'}=1}^{M_{i'}} W_{i, i'}(\zeta_i, \zeta_{i'}) \prod_{j \in c_{i'} \setminus \{i\}} \Lambda_{j \rightarrow i'}(\zeta_{i'})} \quad (i \in \Omega, i' \in c_i) \quad (27)$$

から逐次的に計算され、 Z_i と Z_{ij} は規格化定数である。 c_i はノード i のすべての最近接ノードの集合を意味し、 $c_{i'} \setminus \{i\}$ は $c_{i'}$ からノード i を除いた集合を表す^(注1)。また従って、この場合も $\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i)$ から平均 m_i 、分散 V_i が求められることになる。

ここまでの確率モデルの構造をまとめると、式 (23) に与えられる確率分布において最近接ノード対の集合 $\mathbf{B}$ に付随するグラフ構造が一次元鎖または木構造である場合、そのグラフ上で与えられるある局所的な漸化式に従って逐次的に計算する問題へと帰着されるということになる。この 2 つの場合は式 (19), (20), (27) において $\sum_{\zeta_i=1}^{M_i}$ を数値的に計算したとしても、基本的には (数値計算の際に桁落ち等で生じる誤差を除いては) 厳密

(注1) : 例えば、式 (24) で $\mathbf{B}$ が与えられた場合、 $c_i = \{i-1, i+1\}$ 、 $c_i \setminus \{i \pm 1\} = \{i \mp 1\}$ となる。

な取り扱いをしていると見なすことができる。問題はこれらのより一般的な確率モデルをどのように扱えば良いかということになる。グラフが木構造を持つということは閉路がないということの意味しているが閉路を有するグラフの場合は本節の定式化の範囲では取り扱い切れなくなってしまう。確率推論の分野ではこの閉路の問題を、一部の確率モデルに対しては局所的なある種の変換を施すことにより、木構造をもつグラフに変換することで解決してきた。しかし、一つのグラフのなかに存在する閉路の個数が多くなってくると、このような変換だけでは対応しきれない場合がでてくる。確率的情報処理では厳密な取り扱いの難しい確率モデルに対しては厳密な取り扱いをあらかじめ、近似を導入し、統計量を得るためのできるだけ近似精度のよいアルゴリズムを構成するという視点で、確率推論のための近似アルゴリズムの一つとして確率伝搬法が採用されている。式 (27) は図 7 の様に一般に最近接ノード対の集合 $\mathbf{B}$ に付随するグラフが木構造を持たない場合でも、書き下すことができ、次のような反復計算アルゴリズムを用いて計算される。こ

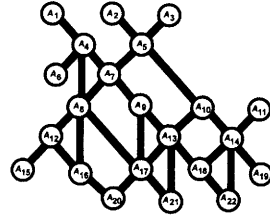


図 7 閉路を有するグラフ構造として表された確率モデルの例。

Fig. 7 Graphical representation of a probabilistic model with cycle.

の場合、式 (27) は $\{\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i)\}$ に対する固定点方程式と見なすことができる。

確率伝搬法のアルゴリズム

- Step 1: $\{W_{i, i'}(a_i, a_{i'}) | i, i' \in \mathbf{B}\}$ を読み込む。
- Step 2: $\{\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) | i \in \Omega, i' \in c_i\}$ の初期値を設定する。
- Step 3: $r \leftarrow 0$ と設定する。
- Step 4: $r \leftarrow r + 1$, $\bar{\Lambda}_{i' \rightarrow i}(a_i) \leftarrow \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i)$ ($i \in \Omega, i' \in c_i$) と設定する。
- Step 5: $\{\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) | i \in \Omega, i' \in c_i\}$ の値を次の更新則により更新する。

$$\Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \leftarrow \frac{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i'}=1}^{M_{i'}} \delta_{a_i, \zeta_i} W_{i, i'}(\zeta_i, \zeta_{i'}) \prod_{j \in c_{i'} \setminus \{i\}} \bar{\Lambda}_{j \rightarrow i'}(\zeta_{i'})}{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_{i'}=1}^{M_{i'}} W_{i, i'}(\zeta_i, \zeta_{i'}) \prod_{j \in c_{i'} \setminus \{i\}} \bar{\Lambda}_{j \rightarrow i'}(\zeta_{i'})} \quad (i \in \Omega, i' \in c_i)$$

Step 6: 収束判定条件

$$\frac{1}{|\Omega|} \sum_{i \in \Omega} \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} |\bar{\Lambda}_{i' \rightarrow i}(\zeta_i) - \Lambda_{i' \rightarrow i}(\zeta_i)| < 10^{-6}$$

を満足しなければ Step 4 にもどり、満足すれば

$$Z_i \Leftarrow \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \prod_{i' \in c_i} \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \quad (i \in \Omega) \quad (28)$$

$$Z_{ij} \Leftarrow \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \sum_{\zeta_j=1}^{M_j} W_{ij}(\zeta_i, \zeta_j) \left(\prod_{i' \in c_i \setminus \{j\}} \Lambda_{i' \rightarrow i}(\zeta_i) \right) \times \left(\prod_{j' \in c_j \setminus \{i\}} \Lambda_{j' \rightarrow j}(\zeta_j) \right) \quad (ij \in \mathbf{B}) \quad (29)$$

$$P_i(a_i) \Leftarrow \frac{1}{Z_i} \prod_{i' \in c_i} \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \quad (i \in \Omega) \quad (30)$$

$$P_{ij}(a_i, a_j) \Leftarrow \frac{1}{Z_{ij}} W_{ij}(a_i, a_j) \left(\prod_{i' \in c_i \setminus \{j\}} \Lambda_{i' \rightarrow i}(a_i) \right) \times \left(\prod_{j' \in c_j \setminus \{i\}} \Lambda_{j' \rightarrow j}(a_j) \right) \quad (ij \in \mathbf{B}) \quad (31)$$

により $P_i(a_i)$ と $P_{ij}(a_i, a_j)$ を計算して終了する。

ここまで、集合 $\mathbf{B}$ を 2 個のノード対の集合として定義してきたが、確率伝搬法は「集合 $\mathbf{B}$ に属する任意の要素が 2 個以上のノードの集合、すなわちクラスターである場合」にも容易に拡張することができる。簡単のため、ここでは、集合の $\mathbf{B}$ に属する任意の 2 組の相異なる要素 γ および γ' に対してその共通部分は常にノードである、すなわち $\gamma \cap \gamma' \in \Omega$ が成り立つ場合に限定する。そして c_i の定義を「ノード i を部分集合としてもつすべてのクラスター $\gamma \in \mathbf{B}$ の集合である」すなわち、 $c_i \equiv \{\gamma | \gamma \supset i, \gamma \in \mathbf{B}\}$ と拡張する。このとき、上の確率伝搬法のアルゴリズムは次のような一般化された形に拡張される。

一般化された確率伝搬法のアルゴリズム

- Step 1: $\{W_\gamma(\mathbf{a}_\gamma) | \gamma \in \mathbf{B}\}$ を読み込む。
Step 2: $\{\lambda_{\gamma \rightarrow i}(a_i) | i \in \Omega, \gamma \in c_i\}$ の初期値を設定する。
Step 3: $r \leftarrow 0$ と設定する。
Step 4: $r \leftarrow r + 1$, $\tilde{\lambda}_{\gamma \rightarrow i}(a_i) \leftarrow \lambda_{\gamma \rightarrow i}(a_i)$ ($i \in \Omega, \gamma \in c_i$) と設定する。
Step 5: $\{\lambda_{\gamma \rightarrow i}(a_i) | i \in \Omega, \gamma \in c_i\}$ の値を次の更新則により更新する。

$$\lambda_{\gamma \rightarrow i}(a_i) \Leftarrow \frac{\sum_{\zeta_\gamma} \delta_{a_i, \zeta_i} W_\gamma(\zeta_\gamma) \prod_{i' \in \gamma \setminus \{i\}} \prod_{\gamma' \in c_{i'} \setminus \{\gamma\}} \tilde{\lambda}_{\gamma' \rightarrow i'}(\zeta_{i'})}{\sum_{\zeta_\gamma} W_\gamma(\zeta_\gamma) \prod_{i' \in \gamma \setminus \{i\}} \prod_{\gamma' \in c_{i'} \setminus \{\gamma\}} \tilde{\lambda}_{\gamma' \rightarrow i'}(\zeta_{i'})} \quad (i \in \Omega, \gamma \in c_i)$$

Step 6: 収束判定条件

$$\frac{1}{|\Omega|} \sum_{\gamma \in c_i} \sum_{i \in \Omega} \sum_{\zeta_i=1}^{M_i} |\tilde{\lambda}_{\gamma \rightarrow i}(\zeta_i) - \lambda_{\gamma \rightarrow i}(\zeta_i)| < 10^{-6}$$

を満足しなければ Step 4 にもどり、満足すれば

$$P_i(a_i) \Leftarrow \frac{\prod_{\gamma \in c_i} \lambda_{\gamma \rightarrow i}(a_i)}{\sum_{\zeta_i=1}^{M_i} \prod_{\gamma \in c_i} \lambda_{\gamma \rightarrow i}(\zeta_i)} \quad (i \in \Omega) \quad (32)$$

$$P_\gamma(\mathbf{a}_\gamma) \Leftarrow \frac{W_\gamma(\mathbf{a}_\gamma) \prod_{i \in \gamma} \prod_{\gamma' \in c_i \setminus \{\gamma\}} \lambda_{\gamma' \rightarrow i}(a_i)}{\sum_{\zeta_\gamma} W_\gamma(\zeta_\gamma) \prod_{i \in \gamma} \prod_{\gamma' \in c_i \setminus \{\gamma\}} \lambda_{\gamma' \rightarrow i}(\zeta_i)} \quad (\gamma \in \mathbf{B}) \quad (33)$$

により $P_i(a_i)$ ($i \in \Omega$) と $P_\gamma(\mathbf{a}_\gamma)$ ($\gamma \in \mathbf{B}$) を計算して終了する。

ここで $\mathbf{a}_\gamma$ および $\sum_{\zeta_\gamma}$ は

$$\mathbf{a}_\gamma \equiv \{a_i | i \in \gamma\}, \quad \sum_{\zeta_\gamma} \equiv \prod_{i \in \gamma} \sum_{\zeta_i=1}^{M_i}$$

をそれぞれ表す。このアルゴリズムは例えば図 8 に与えられるようなカクタス木のグラフ表現を持つ確率モデルでは厳密な結果を与えてくれる。カクタス木とは $\mathbf{B}$ に属する要素の任意のクラスターを 1 つ選んでそのグラフから取り除くと常に 2 つのグラフに分かれてしまうという構造を持っているグラフのことである。これもやはり木構造を持つてると見なすことができる。しかしながら「集合 $\mathbf{B}$ が 2 個以上のノードからなるクラ

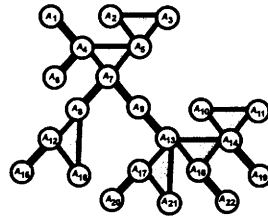


図 8 カクタス木の形のグラフ表現として表された確率モデルの例。
Fig. 8 Graphical representation of a probabilistic model with cactus tree structure.

スターの集合であり、 $\mathbf{B}$ に属する任意の 2 組の相異なるクラスター γ および γ' に対して常に $\gamma \cap \gamma' \in \Omega$ が成り立つ」という条件の下での一般のグラフ表現としては図 9 のようなものも考えられ、一般に確率推論として扱われるベイジアンネットワークではこのようなグラフ表現を扱う場合が多い。このような場合には上のアルゴリズムはやはり厳密な結果を与えるという保証がなくなってしまう。ではあるが、この場合も厳密な取り扱いををあきらめて、近似アルゴリズムとして、近似精度のよい統計量を得られるアルゴリズムであれば、一つの接近法として有力なキーアプリケーションとなることが期待される。

4. 確率推論に対する確率伝搬法の例

前節で与えられた一般化された確率伝搬法のアルゴリズムを図 3 で与えられた例題「Asia」に適用した例について説明する。この場合、前節で与えられた一般化された確率伝搬法のアルゴリズムにおける Ω , $\mathbf{B}$ および c_i は $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathbf{B} = \{13, 24, 25, 346, 568, 67\}$, $c_1 = \{13\}$, $c_2 = \{24, 25\}$, $c_3 = \{13, 346\}$, $c_4 = \{24, 346\}$, $c_5 = \{25, 568\}$, $c_6 = \{346, 568, 67\}$, $c_7 = \{67\}$, $c_8 = \{568\}$ によりそれぞれ与えられる。

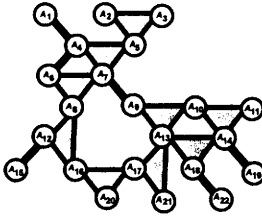


図9 集合 B が2個以上のノードからなるクラスターの集合であり、 B に属する任意の2組の相異なる要素 γ および γ' に対して常に $\gamma \cap \gamma' \in \Omega$ が成り立つグラフ表現の例。

Fig. 9 An example of graphical representation in which the cluster of the common nodes of two or more clusters in B is always single node and it is valid that $\gamma \cap \gamma' \in \Omega$ for any clusters γ and γ' belonging to the set B .

表1 図3で与えられた確率推論における条件付き確率 $\Pr\{A_5 = a_5 | A_8 = a_8\}$ の値。(a) 一般化された確率伝搬法。(b) 厳密計算。
Table 1 Values of $\Pr\{A_5 = a_5 | A_8 = a_8\}$ for the probabilistic inference given in Fig.3. (a) Generalized belief propagation. (b) Exact calculation.

a_5	a_8	(a)	(b)
+1	+1	0.8447	0.8468
+1	-1	0.1739	0.1660
-1	+1	0.1554	0.1532
-1	-1	0.8261	0.8340

式(8)における $V_{56 \rightarrow 8}$, $V_{6 \rightarrow 7}$, $V_{34 \rightarrow 6}$, $V_{2 \rightarrow 5}$, $V_{2 \rightarrow 4}$, $V_{1 \rightarrow 3}$, V_1 の値はホームページ <http://www.norsys.com/> で与えられている値を用いている。周辺確率分布 $\Pr\{A_8 = a_8\} = P_8(a_8)$ および $\Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\} = P_{58}(a_5, a_8)$ を一般化された確率伝搬法および厳密計算により求め、その結果を式(12)に代入することにより得られた条件付き確率 $\Pr\{A_2 = a_2 | A_5 = a_5\}$ の値を表1に与える。この場合の厳密計算とは $\Pr\{A_5 = a_5, A_8 = a_8\}$ および $\Pr\{A_8 = a_8\}$ をその定義(12)および(13)に従って計算することを意味する。確率伝搬法が厳密計算の結果に非常に近い値を与えていることがわかる。

5. 確率的画像処理と確率伝搬法

前節までは確率推論を題材として確率的情報処理と確率伝搬法について解説してきたが、もう一つの確率的画像処理の例として、本節では確率モデルとベイズ統計に基づく画像処理について紹介する[8]～[12]。これもベイジアンネットワークの一つである。

デジタル画像は画素(ピクセル)と呼ばれる基本構成要素から構成される。画素はそれぞれがある明るさを持ち、明るさが強ければ白く、弱ければ黒くなる。このような明るさの強弱を実数または整数として表した量が階調値であり、たくさんの階調値が格子状に配列されることで、全体として一つの画像を表現している。この時、様々な要因から劣化されてしまった画像から劣化される前の画像、すなわち原画像を推定するという問題が、画像修復である。

この過程を確率モデルを用いて考えてみる。正方格子上に並べられた各画素に $1, 2, \dots, K$ という通し番号のラベルをつけ、 i というラベルの付けられた画素の位置ベクトルを $\vec{r}_i$ で表すことにする。原画像の画素 i の階調値 x_i に対する確率変数を X_i とすると、全画素の階調値の集合に対する確率変数は $X = \{X_1, X_2, \dots, X_K\}$ と表される。同様に劣化画像に対しても、画素 i の階調値 y_i に対する確率変数を Y_i とすると、全画素の階調値の集合に対する確率変数は $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_K\}$ で表される。

考えるべき確率モデルは、原画像の生成過程を特定する部分と、原画像が与えられたときにその原画像から劣化画像を生成する劣化過程を特定する部分に分けられる。原画像 x が生成される確率 $\Pr\{X = x\}$ と、原画像 x が与えられたという条件の下での劣化画像 y が生成される条件付き確率 $\Pr\{Y = y | X = x\}$ とを指定すれば、ベイズの公式

$$\Pr\{X = x | Y = y\} = \frac{\Pr\{Y = y | X = x\} \Pr\{X = x\}}{\Pr\{Y = y\}} \quad (34)$$

を用いて、与えられた劣化画像 y から原画像 x が確率的に推定できるということになる。基本的な例としては、確率 $\Pr\{X = x\}$ と $\Pr\{Y = y | X = x\}$ を

$$\Pr\{X = x\} = \frac{1}{Z} \prod_{ij \in B} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}(x_i - x_j)^2\right) \quad (35)$$

$$\Pr\{Y = y | X = x\} = \prod_{i=1}^K \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_i - x_i)^2\right) \quad (36)$$

という形に仮定するというものがある。式(35)において、 $\prod_{ij \in B}$ はすべての最近接画素対の集合 $B = \{ij | i, j = 1, 2, \dots, K, |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = 1\}$ についての積であり、 Z は規格化定数を表している。式(35)は階調値の空間的変化が滑らかな画像ほど生成される確率が高くなるように構成されている。式(36)は分散が σ^2 の加法的白色ガウス雑音と呼ばれるもので、 K 個の互いに独立な平均0、分散1のガウス確率変数 $N_1, N_2, \dots, N_K$ を導入すると、 $Y_i = X_i + \sigma N_i$ ($i = 1, 2, \dots, K$) という関係が得られる。この原画像が事前確率分布 $\Pr\{X = x\}$ に従って生成され、劣化過程 $\Pr\{Y = y | X = x\}$ において劣化されることにより劣化画像が生成される際の因果関係を図10に与える。事前確率分布(35)と加法的白色ガウス雑音(36)を用いた確率的画像処理アルゴリズムを第3節で与えた確率伝搬法により構成した場合の画像修復の例を図11に示す。これは最も簡単な例であるが、同様の確率的画像処理手法は画像修復にとどまらず、エッジ検出、領域分割、画像圧縮から動画の中の移動体の検出にいたるまで多くの応用へと発展しつつある。

6. ベイジアンネットワークと確率伝搬法の最近の発展

本チュートリアル講演では確率的情報処理のひとつとして注目を集めているベイジアンネットワークと確率伝搬法についての解説を行った。最近、この確率伝搬法の数理解造をカルバックライブラー情報量の最小化に対する変分原理および情報幾何

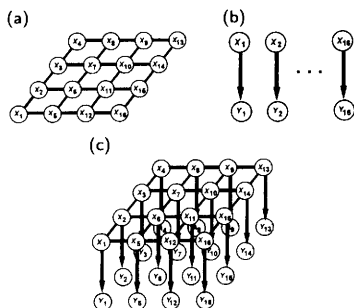


図 10 確率的画像処理におけるベイジアンネットワークの構造. (a) 事前確率分布 $\Pr\{X = x\}$. (b) 劣化過程 $\Pr\{Y = y|X = x\}$. (c) 結合確率分布 $\Pr\{X = x, Y = y\} = \Pr\{Y = y|X = x\}\Pr\{X = x\}$.

Fig. 10 Bayesian network in probabilistic image processing. (a) A priori probability distribution $\Pr\{X = x\}$. (b) Degradation process $\Pr\{Y = y|X = x\}$. (c) Joint probability distribution $\Pr\{X = x, Y = y\} = \Pr\{Y = y|X = x\}\Pr\{X = x\}$.

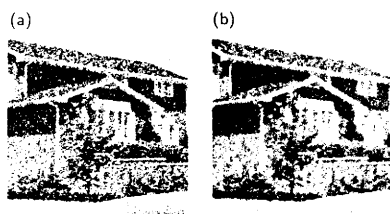


図 11 確率的画像処理による画像修復の例. (a) 劣化画像 (分散 40^2 の加法的白色ガウス雑音). (b) 確率的画像処理による修復画像 (確率伝搬法).

Fig. 11 Probabilistic image restoration. (a) Degraded image (Additive white Gaussian noise with variation 40^2). (b) Restored image (Belief Propagation).

の立場から系統的に理解しようと言ういくつかの試みが行われている [13] ~ [15]. 特にカルバックライブラー情報量に対する変分原理からのアプローチからは、確率伝搬法が実は物理学における統計力学分野で 20 世紀初頭から研究されているベータ近似、クラスター変分法と呼ばれる大規模確率モデルにおける近似解析手法とその数学的構造がほぼ等価であることが、ごく最近解明され、確率的情報処理という土俵の上に情報処理、統計科学、統計力学という 3 つの異なる分野が融合した新しい学問体系が生み出されつつある。

また、確率的情報処理は本チュートリアル講演で触れた人工知能、画像処理以外にも情報通信技術における誤り訂正符号、CDMA マルチユーザ復調方式などにも応用される試みも行われている [16] ~ [19]. 更に充足可能性問題への確率的情報処理の立場からのアプローチの研究もなされている [20], [21]. 確率的情報処理の最近の研究のよりわかりやすい解説については文献 [22] を参照していただきたい。

文 献

- [1] B. Frey: *Graphical Models for Machine Learning and Digital Communication* (MIT Press, 1998).
- [2] 田中和之, 樺島祥介他著: ミニ特集/ベイズ統計・統計力学と情報処理, 計測と制御, Vol.42, No.8, Aug. 2003.
- [3] 甘利俊一, 池田和司他著: 特集/統計科学の最前線 —新しい情報科学への技術と展望, 数理科学 2004 年 3 月号, March 2004.
- [4] 本村陽一: “ベイジアンネットワークによる確率的推論技術”, 計測と制御, Vol.42, No.8, pp.649-654, Aug. 2003.
- [5] J. Pearl: *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference* (Morgan Kaufmann, 1988).
- [6] 汪金芳, 田栗正章, 手塚集, 樺島祥介, 上田修功: 統計科学のフロンティア「計算統計 I」(岩波書店, 2003).
- [7] 田中利幸: “人工知能と確率推論” 数理科学 2004 年 3 月号, pp.46-52, March 2004.
- [8] K. Tanaka: “Statistical-mechanical approach to image processing (Topical Review)”, J. Phys. A: Math. & Gen., Vol.35, No.37, pp.R81-R150, Sept. 2002.
- [9] 田中和之: “統計力学を用いた確率的画像処理アルゴリズムの基礎—確率伝搬法と統計力学—”, 計測と制御, Vol.42, No.8, pp.631-636, Aug. 2003.
- [10] K. Tanaka, J. Inoue and D. M. Titterton: “Probabilistic image processing by means of Bethe approximation for Q-Ising model”, J. Phys. A: Math & Gen., Vol. 36, No. 43, pp.11023-11036, Oct. 2003.
- [11] 田中和之: “確率モデルと画像分析—ゆらぎの生み出す新しい情報処理の世界—”, 数理科学 2004 年 3 月号, pp.15-21, March 2004.
- [12] K. Tanaka, H. Shouno, M. Okada and D. M. Titterton: “Accuracy of the Bethe approximation for hyperparameter estimation in probabilistic image processing”, J. Phys. A: Math. & Gen., Vol. 37, No.36, pp.8675-8696, Sept. 2004.
- [13] J. S. Yedidia, W. T. Freeman and Y. Weiss: “Generalized belief propagation”, Advances in Neural Information Processing Systems, Vol.13, pp.689-695 (MIT Press, 2000).
- [14] K. Tanaka: “Probabilistic inference by means of cluster variation method and linear response theory”, IEICE Transactions on Information and Systems, vol.E86-D, no.7, pp.1228-1242, July 2003.
- [15] S. Ikeda, T. Tanaka and S. Amari: “Stochastic reasoning, free energy, and information geometry”, Neural Computation, Vol.16, No.9, pp.1779-1810, Sept. 2004.
- [16] Y. Kabashima and D. Saad: “Statistical mechanics of low-density parity-check codes (Topical Review)”, J. Phys. A: Math. & Gen., Vol. 37, No.6, pp.R1-R43, Feb. 2004.
- [17] S. Ikeda, T. Tanaka and S. Amari: “Information geometry of turbo and low-density parity-check codes”, IEEE Trans. on Information Theory, Vol.50, No.6, pp.1097-1114, June 2004.
- [18] T. Tanaka: “A statistical-mechanics approach to large-system analysis of CDMA multiuser detectors”, IEEE Trans. Inform. Theory, Vol.48, No.11, pp.2888-2910, Nov. 2002.
- [19] Y. Kabashima: “A CDMA multiuser detection algorithm on the basis of belief propagation”, J. Phys. A: Math. & Gen., Vol. 36, No.43, pp.11111-11121, Oct. 2003.
- [20] O. C. Martin, R. Monasson, R. Zecchina: “Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems”, Theoretical Computer Science, Vol.265, pp.3-67, Aug. 2001.
- [21] M. Mezard, G. Parisi, R. Zecchina: “Analytic and algorithmic solution of random satisfiability problems”, Science, Vol.297, No.1/2, pp.812-815, 2002.
- [22] 田中和之, 田中利幸, 岡田真人, 池田思朗, 福島孝治, 渡辺治, 喜多一, 堀口剛, 西森秀稔: リレー連載/確率的情報処理と統計力学 —様々なアプローチとそのチュートリアル—, 数理科学 2004 年 11 月号からの 10 回シリーズで開始.