社団法人 情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2006－AL－104　(1)
2006／1／20

# 平面上の2種点集合の平衡分割

宇野美由紀†　加納幹雄†

† 茨城大学工学部
〒316–8511 茨城県日立市中成沢町 4–12–1

E-mail: †umyu@mug.biglobe.ne.jp, ††kano@mx.ibaraki.ac.jp

**あらまし**　平面上の一般の位置に置かれた赤点の集合 $R$ と青点の集合 $B$ に対して，もし $ag \leqq |R| < (a+1)g$ かつ $bg \leqq |B| < (b+1)g$ なら，平面を $g$ 個の凸集合 $X_1 \cup \cdots \cup X_g$ に分割し，各 $X_i$ には $a$ または $a+1$ 個の赤点と，$b$ または $b+1$ 個の青点があるようにできる．また，この分割の存在証明から $O(n^4)$ 時間でこのような分割を求めるアルゴリズムが得られる．ただし $n$ は点の総数である．

**キーワード**　赤点と青点，平衡分割，平面上の2種点集合

# General Balanced Subdivision of Two Sets of Points in the Plane

Miyuki UNO† and Mikio KANO†

† Faculty of Engineering, Ibaraki University
Nakanarusawa 4–12–1, Hitachi, 316–8511 Japan

E-mail: †umyu@mug.biglobe.ne.jp, ††kano@mx.ibaraki.ac.jp

**Abstract**　Let $R$ and $B$ be two disjoint sets of red points and blue points in the plane, respectively, such that no three points of $R \cup B$ are co-linear. if $ag \leqq |R| < (a+1)g$ and $bg \leqq |B| < (b+1)g$, then the plane can be subdivide into $g$ disjoint convex polygons $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_g$ so that every $X_i$ contains $a$ or $a+1$ red points and $b$ or $b+1$ blue points. By the proof of this result, we can obtain an $O(n^4)$-time algorithm for finding such a subdivision of the plane, where $n$ is the total number of points.

**Key words**　Red and blue points, Balanced subdivision, Balanced partition, Two sets of points in the plane

## 1. はじめに

本稿では平面上の一般の位置にある赤点の集合 $R$ と青点の集合 $B$ の分割について述べる．ここでいう一般の位置とは $R \cup B$ のどの3点も一直線上に並ばない配置である．本研究の目標は，平面を互いに素な凸多角形に分割して，どの多角形にもあらかじめ決められた数の赤点と青点があるようにすることである．ただし，凸多角形としては図1のような無限領域も許す．このような分割を平衡分割とよぶ．はじめに，この問題について既知の定理をいくつか紹介する．

定理1は，[5]で予想され，$a = 1, 2$ の場合については[5]と[6]で証明された．一般の場合の証明は，Bespamyatnikh, Kirkpatrick and Snoeyink [2], Ito, Uehara and Yokoyama [3], Sakai [9], がそれぞれ独立に示した．証明の手法もかなり異なっている．なお，$g = 2$ のとき，この定理は平面におけるハムサンドイッチ定理[4]と同等である．

**[定理 1]**（平衡分割定理; [2], [3], [9]）$a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $g \geqq 2$ を整数とする．もし $|R| = ag$ かつ $|B| = bg$ ならば，平面を $g$ 個の互いに素な凸多角形 $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_g$ に分割して，各 $X_i$ には赤点 $a$ 個と青点 $b$ 個があるようにできる．

次の定理は上で述べた定理1の $a = 1$ の場合だが，さらに一般化してある．

**[定理 2]**（Kaneko and Kano [6]）$b \geq 1$ を整数とし，$R$ は互いに素な点集合 $R_1$ と $R_2$ の和集合となっている．もし $|R_1| = g_1$, $|R_2| = g_2$ かつ $|B| = (b-1)g_1 + bg_2$ ならば，平面を $g_1 + g_2$ 個の互いに素な凸多角形 $X_1 \cup \cdots \cup X_{g_1} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_{g_2}$ に分割して，各 $X_i$ には $R_1$ の赤点1個と青点 $b-1$ 個が，各 $Y_j$ には $R_2$ の赤点1個と青点 $b$ 個があるようにできる．

次は別の平衡分割定理である．

**[定理 3]**（Kaneko, Kano and Suzuki [8]）$a \geqq 1$, $g \geqq 0$, $h \geqq 0$ は $g + h \geqq 1$ を満たす整数とする．もし $|R| = ag + (a+1)h$ かつ $|B| = (a+1)g + ah$ ならば，平面を $g + h$ 個の互いに素な凸多角形 $X_1 \cup \cdots \cup X_g \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_h$ に分割して，各 $X_i$ には赤点 $a$ 個と青点 $a+1$ 個が，各 $Y_j$ には赤点 $a+1$ 個と青点 $a$ 個があるようにできる．

本研究では $ag \leqq |R| \leqq a(g+1)$, $bg \leqq |B| \leqq b(g+1)$ の場合の平衡分割問題を扱う．補題5で示すように，このとき一般性を失うなくことなく赤点と青点の個数は次のように表示できる：

$$|R| = a(g_1 + g_2) + (a+1)g_3 \quad \text{かつ} \quad |B| = bg_1 + (b+1)(g_2 + g_3) \tag{1}$$

ここで「一般性を失わない」とは，必要なら赤点と青点の色を逆にするという意味である．次の定理が本論文の主結果である．ここでは $|R| = (a+1)g$ とか $|B| = (b+1)g$ の場合も含めているが，これは帰納法で証明をする際に必要なためで，本質的にはこの場合は $|R| = ag$ とか $|B| = bg$ の場合に含まれている．

**[定理 4]** $a \geqq 1$, $b \geqq 1$, $g_1 \geqq 0$, $g_2 \geqq 0$, $g_3 \geqq 0$ を $g_1 + g_2 + g_3 \geqq 1$ を満たす整数とする．もし $|R| = a(g_1 + g_2) + (a+1)g_3$ かつ $|B| = bg_1 + (b+1)(g_2 + g_3)$ ならば，平面を $g_1 + g_2 + g_3$ 個の凸多角形 $X_1 \cup \cdots \cup X_{g_1} \cup Y_1 \cup \cdots \cup Y_{g_2} \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_{g_3}$ に分割し，各凸多角形は次の条件を満たすようにできる．(i) 各 $X_i$ には赤点 $a$ 個と青点 $b$ 個がある．(ii) 各 $Y_i$ には赤点 $a$ 個と青点 $b+1$ 個がある．(iii) 各 $Z_i$ には赤点 $a+1$ 個と青点 $b+1$ 個がある．なお，$g_i = 0$ の場合には対応する凸多角形は存在しない (図1参照)．

上の定理のような平面の分割を平衡分割とよぶ．さらにこの定理4の証明は平衡分割を見つけ出す $O(n^4)$ 時間アルゴリズムを与えている．ここで $n$ は赤点と青点の総数である．

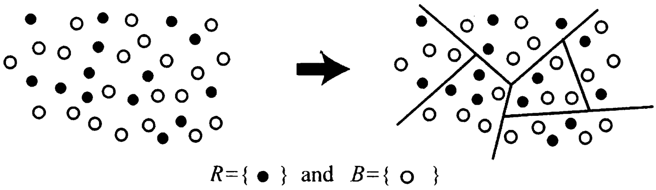


図 1　$g_1 = 3$, $g_2 = 1$, $g_3 = 2$, $|R| = 2(g_1+g_2)+3g_3$, $|B| = 3g_1+4(g_2+g_3)$ のときの平面の平衡分割.

## 2.　定理 4の証明

まず，証明で用いる定義や記法をまとめておく．扱うすべての直線 $l$ は，$l$ の右半平面 $right(l)$ と左半平面 $left(l)$ を定義するため，向き付けされた直線とする (図 2)．$l^*$ は $l$ と同じ直線で向きが逆のものを表す (図 2)．さらに，$R \cup B$ の点を通らない直線だけを扱う．

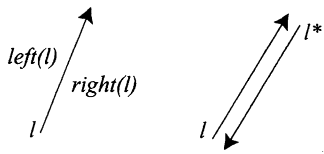


図 2　$right(l)$, $left(l)$ と直線 $l^*$.

［**補題** 5］　$a$, $b$, $g$ を正整数とする．もし $ag \leqq |R| \leqq (a+1)g$ かつ $bg \leqq |B| \leqq (b+1)g$ ならば，赤点と青点の個数は一意に，$|R| = a(g_1+g_2)+(a+1)g_3$，$|B| = bg_1+(b+1)(g_2+g_3)$，または $|R| = ag_1+(a+1)(g_2+g_3)$，$|B| = b(g_1+g_2)+(b+1)g_3$ と表わせる．ただし $g_1$，$g_2$，$g_3$ は非負整数で $g = g_1+g_2+g_3$ となっている．

**証明**　赤点の個数と青点の個数は一意的に次のように表せる：$|R| = ax+(a+1)(g-x)$ かつ $|B| = by+(b+1)(g-y)$ $(0 \leqq x \leqq g,\ 0 \leqq y \leqq g)$．もし $x \geqq y$ なら $g_1 = y$, $g_2 = x-y$, $g_3 = g-x$ とおけば，$|R| = a(g_1+g_2)+(a+1)g_3$ かつ $|B| = bg_1+(b+1)(g_2+g_3)$ とかける．もし $x < y$ なら $g_1 = x$, $g_2 = y-x$, $g_3 = g-y$ とおけば $|R| = ag_1+(a+1)(g_2+g_3)$ かつ $|B| = b(g_1+g_2)+(b+1)g_3$ とかける．表示の一意性は容易に示せる．□

次の Bespamyatnikh, Kirkpatrick, Snoeyink [2] が示した 3-cutting 定理は重要な役割をはたす．彼らは $m_1/n_1 = m_2/n_2 = m_3/n_3$ の条件のもとでこの定理を証明したが，この条件は取り除くことができる [8]．また本質的に同値な定理が [3], [9] でも証明されている．

［**定理** 6］(The 3-cutting Theorem [2])　$m_i, n_i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ を $|R| = m_1+m_2+m_3$，$|B| = n_1+n_2+n_3$ を満たす正整数とする．以下の (i) または (ii) が成り立つならば，ある一点から伸びる 3 つの半直線が存在して，平面を 3 つの凸くさび型 $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ に分割し，各 $W_i$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ にはちょうど $m_i$ 個の赤点と $h_i$ 個の青点があるようにできる (図 3 (b))．また，3 本の半直線のうち一本は真下の向きにとることができる:

(i) すべての $i \in \{1,2,3\}$ と $|right(l) \cap R| = m_i$ を満たすすべての直線 $l$ に対して，$|right(l) \cap B| <$

$n_i$ である (図 3 (a)).

(ii) すべての $i \in \{1,2,3\}$ と $|right(l) \cap R| = m_i$ を満たすすべての直線 $l$ に対して, $|right(l) \cap B| > n_i$ である.

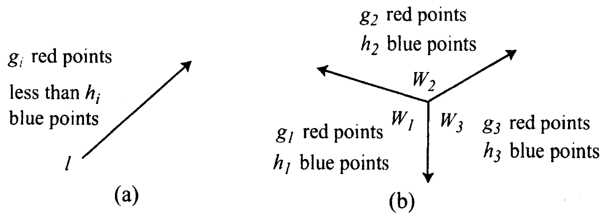


図 3　3-cutting 定理の分割 $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ .

次の補題の異なる証明が [5] と [2] で与えられている.

**[補題 7]**　二つの直線 $l_1$ と $l_2$ が存在して, $|right(l_1) \cap R| = |right(l_2) \cap R|$ かつ $|right(l_1) \cap B| < |right(l_2) \cap B|$ であるとき, $|right(l_1) \cap B| \leqq n \leqq |right(l_2) \cap B|$ となる任意の整数 $n$ に対して, $|right(l_3) \cap R| = |right(l_1) \cap R|$ かつ $|right(l_3) \cap B| = n$ となる直線 $l_3$ が存在する.

**定理 4 の証明**.　$g = g_1 + g_2 + g_3$ とおき, $g$ に関する帰納法で証明する. $g = 1$ のときは明らかに成り立つ. よって $g \geqq 2$ と仮定する. さらに定理 1 より, $g_1 = g_2 = 0$, $g_2 = g_3 = 0$, $g_1 = g_3 = 0$ のいずれかの場合も成り立つ. したがって $g_1, g_2, g_3$ はこれらの条件を満たさないと仮定してよい. すなわち次のことが成り立つと仮定してよい.

$$g_1, g_2, g_3 \text{ のうち少なくとも二つは } 1 \text{ 以上である.} \tag{2}$$

3 つの整数 $0 \leqq r \leqq g_1$, $0 \leqq s \leqq g_2$, $0 \leqq t \leqq g_3$ と 2 本の直線 $l_1$ と $l_2$ が存在して以下を満たしているとする. $1 \leqq r + s + t \leqq g - 1$, $|right(l_1) \cap R| = |right(l_2) \cap R| = a(r+s) + (a+1)t$, $|right(l_1) \cap B| \leqq br + (b+1)(s+t)$ かつ $|right(l_2) \cap B| \geqq br + (b+1)(s+t)$. すると補題 7 から, ある直線 $l_3$ が存在して

$$|right(l_3) \cap R| = a(r+s) + (a+1)t \quad \text{かつ} \quad |right(l_3) \cap B| = br + (b+1)(s+t). \tag{3}$$

となる. $right(l_3)$ と $left(l_3)$ のそれぞれに帰納法の仮定を適用すると所望の平衡分割が得られる. よって次の命題が成り立つと仮定してよい.

**命題 1.** $(r, s, t)$ は以下の条件を満す整数の 3 つ組みとする. $0 \leqq r \leqq g_1$, $0 \leqq s \leqq g_2$, $0 \leqq t \leqq g_3$ かつ $1 \leqq r + s + t \leqq g - 1$. このとき, $|right(l) \cap R| = a(r+s) + (a+1)t$ なるすべての直線 $l$ に対して,

$$|right(l) \cap B| < br + (b+1)(s+t) \quad \text{または} \quad |right(l) \cap B| > br + (b+1)(s+t)$$

の一方だけが成り立つ. 特に $|right(l) \cap B| \neq br + (b+1)(s+t)$ である.

命題 1 から, $0 \leqq i \leqq g_1$, $0 \leqq j \leqq g_2$, $0 \leqq k \leqq g_3$, $1 \leqq i + j + k \leqq g - 1$ となるすべての 3 つ組み $(i, j, k)$ に対しての符号 $sign$ が定義できる : $|right(l) \cap R| = a(i+j) + (a+1)k$ なるすべての

直線 $l$ について,

もし $|right(l) \cap B| > bi + (b+1)(j+k)$ ならば $sign(i,j,k) = +$

もし $|right(l) \cap B| < bi + (b+1)(j+k)$ ならば $sign(i,j,k) = -$

とする．次の命題は $sign(i,j,k)$ の基本的な性質で，後で用いる．

**命題 2.** $i$, $j$, $k$ は $0 \leqq i \leqq g_1$, $0 \leqq j \leqq g_2$, $0 \leqq k \leqq g_3$ かつ $1 \leqq i+j+k \leqq g-1$ を満たす整数とする．このとき

$$sign(g_1 - i, g_2 - j, g_3 - k) = -sign(i,j,k). \tag{4}$$

$sign(i,j,k)$ が $+,-$ どちらの場合も同様に証明できるので，$sign(i,j,k) = +$ と仮定する．

$|right(l) \cap R| = a(i+j) + (a+1)k$ なる直線 $l$ について，$sign(i,j,k) = +$ から $|right(l) \cap B| > bi + (b+1)(j+k)$ となる．これらより

$$|right(l^*) \cap R| = a(g_1 - i + g_2 - j) + (a+1)(g_3 - k),\ \text{かつ}$$

$$\begin{aligned}|right(l^*) \cap B| &= |left(l) \cap B| = |B| - |right(l) \cap B| \\ &< b(g_1 - i) + (b+1)(g_2 - j + g_3 - k).\end{aligned}$$

すなわち $sign(g_1 - i, g_2 - j, g_3 - k) = - = -sign(i,j,k)$ となっている．

**命題 3.** 次の 4 つのことが成り立つ．(i) $g_1 \geqq 1$, $g_2 \geqq 1$, $g_3 \geqq 1$ のとき, $sign(1,0,0) = sign(0,1,0) = sign(0,0,1)$. (ii) $g_1 = 0$ なら $g_2 \geqq 1$, $g_3 \geqq 1$ であり $sign(0,1,0) = sign(0,0,1)$. (iii) $g_2 = 0$ なら $g_1 \geqq 1$, $g_3 \geqq 1$ であり $sign(1,0,0) = sign(0,0,1)$. (iv) $g_3 = 0$ なら $g_1 \geqq 1$, $g_2 \geqq 1$ であり $sign(1,0,0) = sign(0,1,0)$.

平面を少し回転させ，任意の垂直線分は $R \cup B$ の点を高々1点しか通らないようにしておく．(i) を証明する．$g_1 \geqq 1, g_2 \geqq 1, g_3 \geqq 1$ とし，$sign(1,0,0) = -$ と仮定する．$l_1$ と $l_2$ は $|right(l_1) \cap R| = a$ と $|right(l_2) \cap R| = a+1$ を満たす 2 本の垂直な直線で，それぞれ右から数えて $a$ 番目と $a+1$ 番目の赤点のすぐ近くを通る (図 4)．このとき $sign(1,0,0) = -$ から $|right(l_1) \cap B| < b$ である．

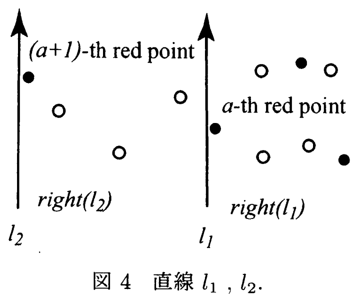


図 4 直線 $l_1$ , $l_2$.

命題 1 と $l_1$ の存在から $sign(0,1,0) = -$ となっている．$sign(0,0,1) = +$ と仮定すると，$right(l_2) > b+1$ であるから，$l_1$ と $l_2$ の間にある直線 $l_3$ が存在して，$right(l_3)$ には $a$ 個の赤点と $b+1$ 個の青点がある．これは命題 1 の $(0,1,0)$ の場合に反する．したがって $sign(0,0,1) = -$

である．

次に，$sign(1,0,0)=+$ であると仮定する．$l_1, l_2$ は上で定義した直線とする．命題 1 の $(0,1,0)$ の場合から $|right(l_1)\cap B| \neq b+1$ であり，$sign(1,0,0)=+$ から $|right(l_1)\cap B|>b$ となっているので $|right(l_1)\cap B| \geqq b+2$．ゆえに $sign(0,1,0)=+$．さらに $|right(l_2)\cap B| \geqq |right(l_1)\cap B| \geqq b+2$ であるから，$sign(0,0,1)=+$ もいえる．

上の二つの事実から，どの $\alpha \in \{+,-\}$ に対しても，$sign(0,1,0)=\alpha$ から $sign(1,0,0)=\alpha$ と $sign(0,0,1)=\alpha$ が導き出され，$sign(0,0,1)=\alpha$ からは $sign(1,0,0)=\alpha$ と $sign(0,1,0)=\alpha$ が得られた．これから (i) は証明された．

$g_1=0$ と仮定すると，式 (2) から $g_2 \geqq 1$ かつ $g_3 \geqq 1$ である．$l_1$ と $l_2$ は上で定義した直線とする．$sign(0,1,0)=-$ のとき，$|right(l_1)\cap B|<b+1$．$sign(0,0,1)=+$ とすると，$|right(l_2)\cap B|>b+1$ であるから $l_1$ と $l_2$ の間に直線 $l_4$ が存在して，$|right(l_4)\cap R|=a$ かつ $|right(l_4)\cap B|=b+1$．これは 3 つ組み $(0,1,0)$ についての命題 1 に反する．したがって，$sign(0,0,1)=-$ である．$sign(0,1,0)=+$ のときは $|right(l_1)\cap B|>b+1$．$sign(0,0,1)=-$ とすると，$|right(l_2)\cap B|<b+1$ であるが，これは $|right(l_1)\cap B|>b+1$ に矛盾する．よって $sign(0,0,1)=+$．以上のことから (ii) は証明された．

$g_2=0$ と仮定する．(2) より $g_1 \geqq 1$ かつ $g_3 \geqq 1$ である．$l_1$ と $l_2$ は上で定義した直線とする．$sign(1,0,0)=-$ のとき，$|right(l_1)\cap B|<b$ である．もし $sign(0,0,1)=+$ ならば，$|right(l_2)\cap B|>b+1$ であるから，$l_1$ と $l_2$ の間にある直線 $l_5$ が存在して $|right(l_5)\cap R|=a$ かつ $|right(l_5)\cap B|=b$．これは命題 1 の $(1,0,0)$ の場合に反する．したがって $sign(0,0,1)=-$．次に $sign(1,0,0)=+$ とすると $|right(l_1)\cap B|>b$．もし $sign(0,0,1)=-$ なら $|right(l_2)\cap B|<b+1$ であるが，これは $|right(l_1)\cap B|>b$ に反する．よって $sign(0,0,1)=+$．以上のことから (iii) は証明された．

$g_3=0$ と仮定する．(2) より $g_1 \geqq 1$ かつ $g_2 \geqq 1$ である．$l_1$ は $l_2$ 上で定義したの同様の直線とする．$sign(1,0,0)=-$ のとき，$|right(l_1)\cap B|<b$ から $sign(0,1,0)=-$．$sign(1,0,0)=+$ のとき，$|right(l_1)\cap B|>b$．ここで，命題 1 の $(0,1,0)$ の場合より $|right(l_1)\cap B| \neq b+1$ であるから，$|right(l_1)\cap B|>b+1$ すなわち $sign(0,1,0)=+$．以上からこの場合も成り立ち，命題 3 は証明された．

$g_1 \geqq 1,\ g_2 \geqq 1,\ g_3 \geqq 1$ のとき，対称性より次式が成り立つと仮定してよい．

$$sign(1,0,0)=sign(0,1,0)=sign(0,0,1)=-. \tag{5}$$

次の条件式が成り立つとき「3 個の 3 つ組み $(r_1,s_1,t_1)$, $(r_2,s_2,t_2)$, $(r_3,s_3,t_3)$ は 3-cutting 定理の条件を満す」と言うことにする．

$g_1=r_1+r_2+r_3,\quad g_2=s_1+s_2+s_3,\quad g_3=t_1+t_2+t_3$

$sign(r_1,s_1,t_1)=sign(r_2,s_2,t_2)=sign(r_3,s_3,t_3)$，かつ

すべての $i\in\{1,2,3\}$ に対して $0 \leqq r_i,s_i,t_i$ かつ $1 \leqq r_i+s_i+t_i$.

実際，もし 3 つの 3 つ組み $\{(r_i,s_i,t_i) \mid 1 \leqq i \leqq 3\}$ が上の条件を満せば，

$$m_i=a(r_i+s_i)+(a+1)t_i \quad と \quad n_i=br_i+(b+1)(s_i+t_i) \quad (1 \leqq i \leqq 3)$$

は3-cutting定理の条件を満たす．よってこのとき平面を3つの凸くさび形に分割して，それぞれの凸くさび形が赤点 $m_i$ 個と青点 $n_i$ 個を持つようにできる．これら3つの凸くさび形それぞれに帰納法の仮定を適用すると所望の平面の分割が得られる．

**命題 4.** $g_1 = 0$ なら3-cutting定理の条件を満たすような3つの3つ組み $(r_i, s_i, t_i)$ $(1 \leqq i \leqq 3)$ が存在する．よって定理が成り立つ．

$g_1 = 0$ のとき，式(2)から $g_2 \geqq 1$ かつ $g_3 \geqq 1$ である．命題2より $sign(0, g_2 - 1, g_3) = -sign(0,1,0)$．よって辞書式順序に並べたとき最初に $sign(0,s,t) \neq sign(0,1,0)$ となる3つ組 $(0,s,t)$ がある．$(0,s,t)$ より小さい3つ組 $(0,s',t')$ $(s' < s$ or $s' = s$ and $t' < t)$ では $sign(0,s',t') = sign(0,1,0)$ となっている．もし $s = 0$ なら式(5)より $t \geqq 2$．したがって以下の3つの3つ組は3-cutting定理の条件を満足する．

$$(0, g_2, g_3 - t),\quad (0,0,t-1),\quad (0,0,1),$$

ここで $sign(0,g_2,g_3-t) = -sign(0,0,t) = sign(0,1,0) = sign(0,0,1) = -$．命題2と3から $(0,s,t)$ において $s = 0$ の場合には，$sign(0,0,t-1) = sign(0,1,0) = -$．もし $s \geqq 1$ ならば，$sign(0,g_2-1,g_3) = -sign(0,1,0)$ から $s \leqq g_2 - 1$ であり，$1 \leqq g_2 - s$．さらに，$s = 1$ のとき $sign(0,s,t) \neq sign(0,1,0)$ と 式(5)から $1 \leqq t$．したがって命題2より，所望の条件を満たす以下の3つの3つ組を得る:

$$(0, g_2 - s, g_3 - t),\quad (0, s-1, t),\quad (0,1,0),$$

ここで $sign(0, g_2 - s, g_3 - t) = -sign(0,s,t) = sign(0,s-1,t) = sign(0,1,0) = -$．以上から命題4は証明された．

**命題 5.** $g_1 \geqq 1$ のとき，すべての $(0,j,k)$，$0 \leqq j \leqq g_2$，$0 \leqq k \leqq g_3$，$1 \leqq j + k$，に対して $sign(0,j,k) = sign(1,0,0)$ となる仮定してよい．

$0 \leqq j \leqq g_2$，$0 \leqq k \leqq g_3$，$1 \leqq j + k$ となるのいくつかの組 $(0,j,k)$ において $sign(0,j,k) \neq sign(1,0,0)$ が成り立つと仮定する．辞書式順序で $sign(0,s,t) \neq sign(1,0,0)$ となる最初の3つ組 $(0,s,t)$ を選ぶ．式(5)から $2 \leqq s + t$．命題2より，$sign(g_1, g_2 - s, g_3 - t) = -sign(0,s,t) = sign(1,0,0) = sign(0,1,0)$．$s \geqq 2$ なら式(5)から次の3つの3つ組は3-cutting定理の条件を満す．

$$(g_1, g_2 - s, g_3 - t),\quad (0, s-1, t),\quad (0,1,0).$$

$s = 1$ なら(5)より $t \geqq 1$ となり，次の3つ組が3-cutting定理の条件を満たす．

$$(g_1, g_2 - 1, g_3 - t),\quad (0, 1, t-1),\quad (0,0,1).$$

$s = 0$ なら(5)より $t \geqq 2$ となり，次の3つ組が3-cutting定理の条件を満たす．

$$(g_1, g_2, g_3 - t),\quad (0,0,t-1),\quad (0,0,1).$$

上のいずれの場合も帰納法で定理が証明できるので，命題5が成り立つ．

**命題 6.** $g_1 \geqq 1$ なら定理が成り立つ．

式 (2) から $g_2 \geqq 1$ または $g_3 \geqq 1$ である．$g_2 \geqq 1$ と仮定する（ $g_3 \geqq 1$ の場合も同じように証明できる)．$sign(g_1, g_2-1, g_3) = -sign(0,1,0) = -sign(1,0,0)$ から，ある 3 つ組 $(i,j,k)$ が存在して $sign(i,j,k) \neq sign(1,0,0)$ となる．ただし，$0 \leqq i \leqq g_1$, $0 \leqq j \leqq g_2$, $0 \leqq k \leqq g_3$, $1 \leqq i+j+k \leqq g-1$．辞書式順序で $sign(r,s,t) \neq sign(1,0,0)$ となる最初のものを $(r,s,t)$ とする．もし $r' < r$ なら $sign(r',s',t') = sign(1,0,0)$ である．命題 5 から $r \geqq 1$ である．もし $r=1$ なら $sign(1,s,t) \neq sign(1,0,0)$ から $s+t \geqq 1$ である．したがって，3-cutting の条件を満たす次の 3 つの 3 つ組みが得られる．

$$(g_1-r, g_2-s, g_3-t),\quad (r-1,s,t),\quad (1,0,0),$$

ここで $sign(g_1-r, g_2-s, g_3-t) = -sign(r,s,t) = sign(r-1,s,t) = sign(1,0,0)$ である．

命題 4 と 6 から定理は証明されている．　□

最後に，上の証明から得られる平衡分割を求めるアルゴリズムの計算時間について述べる．最初に (3) を満足するような直線 $l_3$ を探す．$R \cup B$ の 2 点ペアを通る直線は $O(n^2)$ 本あるので，もしそのような $l_3$ が存在するならば $O(n^3)$ 時間で見つけられる．なお，$R \cup B$ の 2 点 $x$,$y$ を通る直線 $l$ について，次の 4 つのケースが考えられる; (i) $x, y \in right(l)$, (ii) $x \in right(l)$ かつ $y \notin right(l)$, (iii) $x \notin right(l)$ かつ $y \in right(l)$; (iv) $x, y \notin right(l)$．このような直線 $l_3$ が存在しない場合には $sign(i,j,k)$ を定義できて，3-cutting 定理で与えられる 3 本の半直線が存在する．これらの半直線は $O(n^{\frac{4}{3}}(\log n)^2)$ で見つけられることが [2] で示さている．したがって，$n = |R| + |B|$ 個の点が存在する平面の平衡分割を求めるの必要な計算時間を $f(n)$ とすると，

$$f(n) \leqq O(n^3) + f(n_1) + f(n_2) + f(n_3).$$

ただし，$n_1+n_2+n_3 = n$, $n_1 \geqq a+b$, $n_2 \geqq a+b$, $n_3 \geqq 0$，また $l_3$ が存在するときにのみ $n_3 = 0$ となる．以上のことから $f(n) \leqq O(n^4)$ となり，所望の計算時間がアルゴリズムが得られた．

## 文　献


[1] I. Bárány and J. Matoušek, Simultaneous partitions of measures by $k$-fans, *Discrete Comput. Geom.* **25** (2001)317–334.

[2] S. Bespamyatnikh, D. Kirkpatrick and J. Snoeyink, Generalizing ham sandwich cuts to equitable subdivisions, *Discrete Comput. Geom.* **24** (2000) 605–622.

[3] H. Ito, H. Uehara, and M. Yokoyama, 2-dimensional ham-sandwich theorem for partitioning into three convex pieces, *Discrete Comput. Geom.* LNCS **1763** (2000) 129-157.

[4] *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, edited by J. Goodman and J. O'Rourke, CRC Press, (2004) Chapert 14, 305–329.

[5] A. Kaneko, and M. Kano, Balanced partitions of two sets of points in the plane, *Computational Geometry: Theory and Applications*, **13** (1999), 253-261.

[6] A. Kaneko and M. Kano, Semi-balanced partitions of two sets of points in the plane and embeddings of rooted forests, *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* in print.

[7] A. Kaneko and M. Kano, Discrete Geometry on Red and Blue Points in the Plane – A Survey –, *Discrete and Computational Geometry, Algorithms Combin.*, **25**, Springer (2003) 551-570.

[8] A. Kaneko, M. Kano and H. Suzuki, Path Coverings of Two Sets of Points in the Plane *Towards a theory of geometric graphs*, ed by J. Pach *Contemporary Mathematics series of AMS*, **342** (2004) 99-111.

[9] T. Sakai, Balanced Convex Partitions of Measures in $R^2$, *Graphs and Combinatorics*, **18** (2002), 169–192.