

六角格子，三角格子上での スリザーリンクのASP完全性について

温井 康介[†] 上嶋 章宏[‡]

[†] 大阪電気通信大学 総合情報学部 情報工学科, [‡] 大阪電気通信大学 情報通信工学部 情報工学科
p03147@mail.osakac.ac.jp, uejima@isc.osakac.ac.jp

概要

パズルやゲームの面白さの源は，それらの持つ根源的な難しさにあり，これまで数多くのパズルやゲームの計算複雑さが解析されている．本稿では，ペンシルパズルの一種であるスリザーリンクの盤面を正 k 角格子状に一般化した， k -スリザーリンクを提案し， k -スリザーリンクの解の存在判定を問う問題の NP 完全性を，制限付きハミルトン閉路問題からの多項式時間還元を用いて証明する．また，別解問題（ASP, Another Solution Problem, 問題例とその 1 つの解が与えられたとき，他の解の有無を判定する問題）についても考察し， k -スリザーリンクの別解問題について，その NP 完全性を示す．

ASP-Completeness of the Slither Link Puzzle on Several Grids

Kosuke NUKUI[†] Akihiro UEJIMA[‡]

^{†‡} Department of Engineering Informatics, Osaka Electro-Communication University
p03147@mail.osakac.ac.jp, uejima@isc.osakac.ac.jp

Abstract

A fundamental difficulty to solve games and puzzles seems to become the basis for interest factors of them, and the computational complexity of puzzle games have been investigated. This paper proposes the *k-Slither Link Puzzle*, which is a generalization of the traditional Slither Link Puzzle concerning the grids. The puzzle is one of many popular pencil-and-paper puzzles on rectangular grids ($k = 4$), we deal with the puzzles on all the rest of regular tessellations of the plane, i.e. triangular ($k = 3$) and hexagonal grids ($k = 6$). This paper presents the NP-completeness of the *k-Slither Link Puzzle* for $k = 3, 6$. Moreover, the NP-completeness of ANOTHER SOLUTION PROBLEMS (ASP), which are problems to decide if there is some solution other than a given solution, of the puzzles is proved in this paper.

1 はじめに

パズルやゲームが多くの人々に親しまれ続けている理由として，それらの持つ本質的な面白さや難しさが挙げられる．それらの計算複雑さを解析することで，計算機を用いて解法を得る場合の，パズルやゲームの難しさを分類することが可能である．実際，多くの愛好家を抱える囲碁 [12] や将棋 [1]，チェス [6] などは，EXPTIME 完全であることが示されている．紙とペンを用いて問題を解いていく形態のペンシルパズルについても，その計算量に関する研究が盛んで，それら

の一例として，カックロ（Cross Sum）[11]，ぬりかべ（Nurikabe）[9]，ましゅ（Pearl Puzzle）[7]，覆面算（Cryptarithms）[5] などは，NP 完全であることが示されている．（それぞれのルールについてはニコリ [10] を参照のこと．）

本研究では，ペンシルパズルの一種であり，ニコリなどでも有名なスリザーリンクを取り扱う．スリザーリンクは，碁盤目状に配置された点の集合と数字から成る盤面上に所定のルール（盤面上にある数字の周囲にその数と同数の線を引く）に従い 1 つの単純閉路を描くパズルゲームである．既存のスリザーリンクについては，そ

の計算複雑さが解析済みで、NP 完全であることが知られている [14].

合同な正多角形による平面の敷き詰めは、正方形以外では正六角形、正三角形のみで可能である。この3種類の正多角形による格子盤面上でのパズルゲームとして、MINESWEEPER の NP 完全性（および ASP 完全性（後述））が証明されている [3]. 本研究においてもこれらの正多角形による平面の敷き詰め方法に着目し、既存のスリザーリンクの盤面を、正六角格子（および正三角格子）から構成される点の集合に変更した k -スリザーリンク ($k=6,3$) を提案し、その解の存在判定問題の NP 完全性を証明する。

本稿ではさらに、 k -スリザーリンクの別解問題 (ASP, Another Solution Problem) [13] の NP 完全性も示す。ASP とは、問題例とそれに対する1つの解が与えられたときに、その解を基に他の解の存在を問う問題である。多くのパズルは解の一意性を必要としており、問題を作成する上でそれを調べる必要がある。ASP の計算複雑さは解の一意性を確認する作業の計算量そのものを表しており、ASP を考えることはパズルの問題を作成する上で大変重要である。ASP 完全性（問題 II の ASP が NP 完全）を証明するためには、ASP 完全問題 Π_1 から問題 Π_2 の変換が多項式時間 1 対 1 還元（多項式時間還元において、 Π_1 と Π_2 の解の間に 1 対 1 対応が存在）であることを示せば良い。先述したカックロ [11], 覆面算 [4], (既存の) スリザーリンク [15] は ASP 完全であることが示されている。

本稿の構成は次の通りである。2 節では、 k -スリザーリンクのルールについて記述し、取り扱う問題を定式化する。3 節では、6 - スリザーリンクの NP 完全性および ASP 完全性を証明する。4 節では 3 - スリザーリンクの NP 完全性および ASP 完全性を略証する。そして、最後に 5 節で全体のまとめを行う。

2 問題のルールと定式化

本研究では、既存のスリザーリンクの盤面を一般化し、六角格子（および三角格子）上に構成されるスリザーリンクを提案する。提案したスリザーリンクを k -スリザーリンクとし、正確なルールを以下に記す（図 1 参照）。

- 入力として、正 k 角格子をなす点の集合から構成される盤面が与えられる。
- 最小の正 k 角形を構成する k 点に囲まれた領域を面と呼ぶ。面には $0 \sim k-1$ のいずれかの数字が入るか、もしくは空白である。
- 縦方向の面の数 (m)、横方向の面の数 (n) から構成される盤面を $m \times n$ サイズの盤面と呼ぶ。
- 正 k 角形を構成する際に隣接する点の間の、線が引かれ得る領域を辺と呼ぶ。
- 目的は、辺上に線を引き、次の条件を満たす1つの単純閉路を作ることである。
 - 面上に書かれている数字は、その境界をなす k 辺のうち実際に引かれる線分の数に等しい。また、空白の面の周囲に引かれる線分数は制限されない。

解は、単純閉路を構成する格子点の座標の列（順列）として与えられるものとする。

この定義で表すと、従来のスリザーリンクは $k=4$ となり、4 - スリザーリンクと表現できる。 $k=6$ の場合の問題例を図 1 に示す。辺の位置をわかりやすくするため、図中では辺を点線で示す。

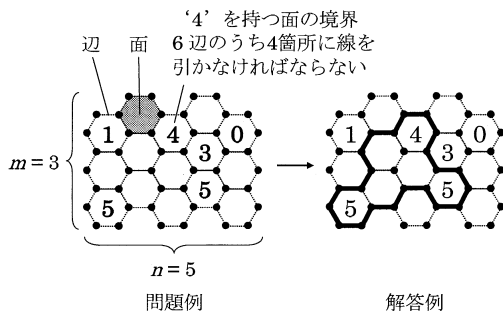


図 1: 6 - スリザーリンクの問題例と解答例

これに対し、 k -スリザーリンクの解の存在判定問題を次のように定義する。

- 入力: k -スリザーリンクの盤面 ($m \times n$ サイズの正 k 角格子をなす点の集合、面上の数字)。
- 質問: 盤面上にルールを満たす1つの単純閉路を描けるか？

盤面のサイズを $m \times n$ とすると、入力サイズは m, n の多項式である。よって、入力サイズに対する多項式時間は m, n に対する多項式時間と同値である。

スリザーリンクの盤面は平面上に表され、1種類の合同な正多角形で平面を敷き詰めることが可能なのは、正三角形、正方形、正六角形の3種類のみである。よって、 $k = 3, 4, 6$ の正 k 角格子のみがスリザーリンクの盤面を構成することが可能である。本研究では、既知である $k = 4$ 以外の、 $k = 6$ 、3の場合について、その計算量を明らかにするため、以下の定理を証明する。

定理 2.1 $k = 6$ 、3 に対し、 k -スリザーリンクの解の存在判定問題は ASP 完全である。□

3、4節で、6、3-スリザーリンクの解の存在判定問題の NP 完全性を、制限をつけたハミルトン閉路問題 [2] からの多項式時間還元を用いて示す。また、その証明が多項式時間 1 対 1 還元となっていることを示すことで、 k -スリザーリンクの ASP 完全性の証明に代える。

3 6-スリザーリンクの解の存在判定問題の NP 完全性

本節では次の命題を証明する。

命題 3.1 6-スリザーリンクの解の存在判定問題は NP 完全である。

証明. この問題が NP に属することは自明である。(解は座標列として与えられ、それが先述の条件を満たしているかどうかは容易に確認可能である。)

本問題の NP 困難性を示すために、制限をつけたハミルトン閉路問題から本問題への多項式時間還元を示す。ハミルトン閉路問題とは以下のように定義される問題である。

入力: グラフ $G = (V, E)$ 。

質問: G の全ての頂点をちょうど 1 度だけ通る閉路が存在するか?

NP 困難性を示すために次の 2 つの補題を用いる。

補題 3.2 [2] ハミルトン閉路問題は、各点の次数が 3 以下の平面グラフに限定しても NP 完全である。□

補題 3.3 [8] 頂点数が n の、各点の次数が 3 以下の平面グラフは、縦横の長さが $O(n) \times O(n)$ の長方形の格子に多項式時間で埋め込むことができる。□

補題 3.3 を使い、補題 3.2 に示す制限をつけたハミルトン閉路問題の入力グラフ G を格子上のグラフ G' に変換する (図 2 参照)。 G' の頂点には図 2 のように●、○の2種類の頂点がある。●は G の頂点と対応し、ハミルトン閉路を構成するために必ず通らなくてはならない頂点であり、次数は 3 以下である。○は G の頂点とは対応せず、ハミルトン閉路を構成する上で通る必要のない頂点であり、次数は 2 以下である。

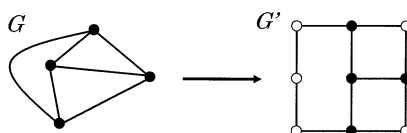


図 2: 格子グラフへの変換

以下では、 G' を 6-スリザーリンクの問題例に変換するため、 G' の○に対応する部品 A_6 、●に対応する部品 B_6 、 G' の頂点に対応する部品同士を横方向に接続する部品 C_6 、 C'_6 、縦方向に接続する部品 D_6 、 D'_6 を用意し、制限付きハミルトン閉路問題からの多項式時間還元を示す。

まず、 G' の○に対応する 6-スリザーリンクの部品として図 3 に示す A_6 を考える。×印は '0' により、線が引かれない辺を表す。ここで、 n, s, w, e の 4 点のいずれかを通る線は、必ず部品内部を通り、4 点のうち別の点を通して部品外部に出るものと仮定する。すると、'0' の配置方法により、部品 A_6 と外部との線 (解となる閉路の一部) の接続は、 n, s, w, e の 4 点に限定される。従って、6-スリザーリンクの解の完成時の部品 A_6 の状態は、 n, s, w, e の中のいずれか 2 点を結ぶ線が引かれているか、線が 1 本も引かれていないかのどちらかである。4 つの頂点のうち、どの 2 頂点間も線で結ぶことができ、また各々についての線の引き方は 1 通りしかないことに注意されたい。原理上、 A_6 -4 のように 2 組の線を引くことが可能だが、実際に部品を配置した場合、○の次数は 2 以下であるため、 n, s, w, e の 4 点すべてを通る線を引くことはできない。よって、 A_6 -4 のような状態になることはない。

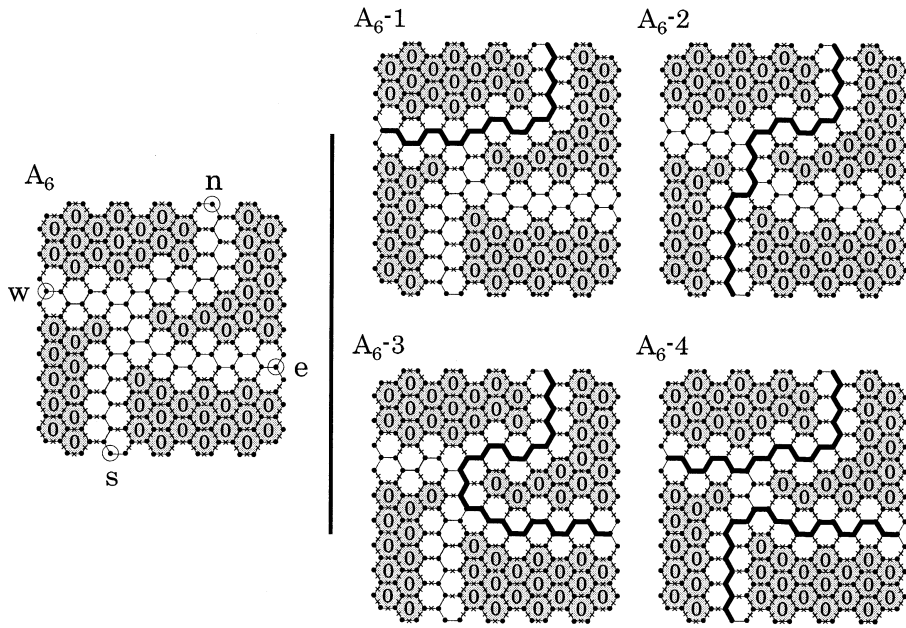


図 3: ○に対応する部品 A_6

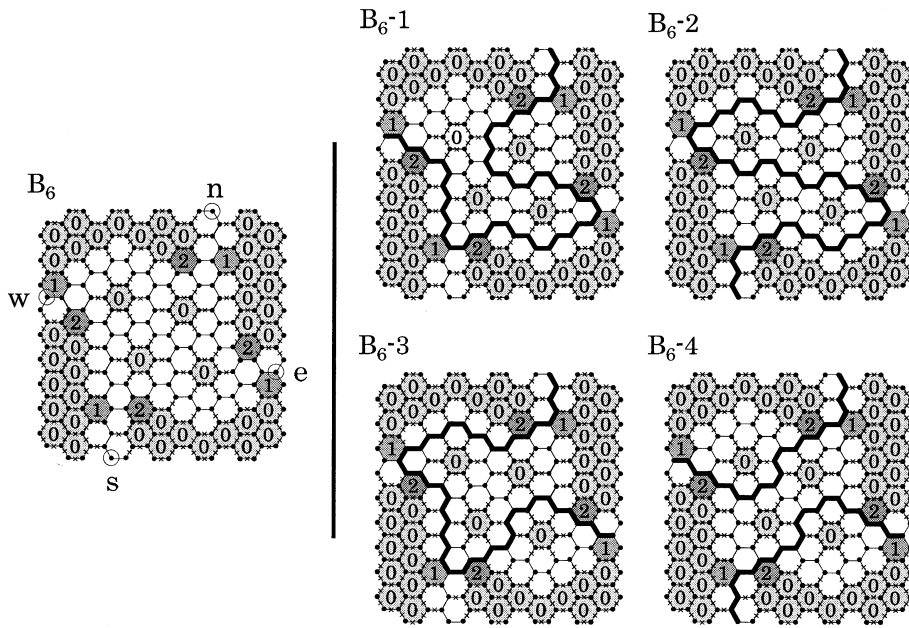


図 4: ●に対応する部品 B_6

次に、●（元のグラフ G の頂点对応する点）に対応する部品として図 4 に示す B_6 を考える。こちら、○と同様の仮定を行う。この部品は、盤面上に‘1’、‘2’があるため、部品内に必ず線を引く。また、部品 B_6 と外部との線の接続は、 n, s, w, e の中のいずれか 2 点を結ぶ線が引いている場合のみである。ここでも、任意の 2 点間についてそれらを結ぶ線の引き方は 1 通りしかない。部品 B_6 も原理上、 B_6-4 のように 2 組の線を引くことが可能だが、●の次数は 3 以下であるため、 n, s, w, e の 4 点すべてを通る線を引くことはない。

以上の頂点对応する 2 種類の部品を、 G' の頂点の位置関係と同様に配置する。その際、 G' で横方向の 2 頂点間に辺がある場合は図 5 に示す部品 C_6 （色が塗られている部分）を、辺がない場合は図 6 に示す部品 C'_6 （色が塗られている部分）を使い、2 部品間を繋ぐ。 C_6 を使って繋いだ（ G' に辺がある）場合に限り、接続した 2 部品間に線を引くことが可能である。

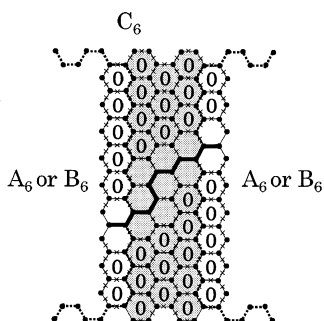


図 5: 横辺がある頂点部品同士の接続方法

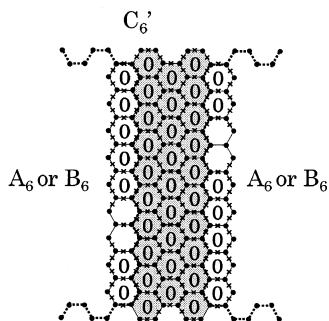


図 6: 横辺がない頂点部品同士の接続方法

同様に、縦の接続部品 D_6, D'_6 を考える（図 7, 8 参照）。

このような接続を行うことで、 A_6, B_6 の部品で仮定した通り、「 n, s, w, e の 4 点のいずれかを通る線は、必ず部品内部を通り、4 点のうち別の点を通して部品外部に出る」ことが達成される。

以上より、 G' を構成する 6 - スリザーリンクの部品 $A_6, B_6, C_6, C'_6, D_6, D'_6$ が得られた。これにより、 G' に対応する 6 - スリザーリンクの問題例が構成できる。多項式時間還元例の全体像を図 9 に示す。

G' に対応する 6 - スリザーリンクの部品の構成方法より、元となるグラフ G がハミルトン閉路を持つとき、またそのときに限り、構成される 6 - スリザーリンクの問題が解を持つことが分かる。また、構成される 6 - スリザーリンクの問題例のサイズは G の頂点数に対して多項式オーダーであるので、この変換は多項式時間で計算可能である。

以上より、6 - スリザーリンクの解の存在判定問題が NP 完全であることが証明された。 □

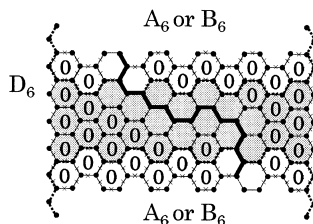


図 7: 縦辺がある頂点部品同士の接続方法

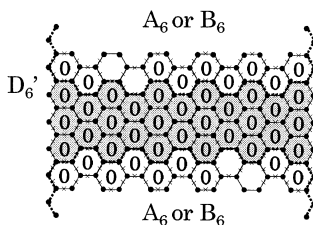


図 8: 縦辺がない頂点部品同士の接続方法

G'

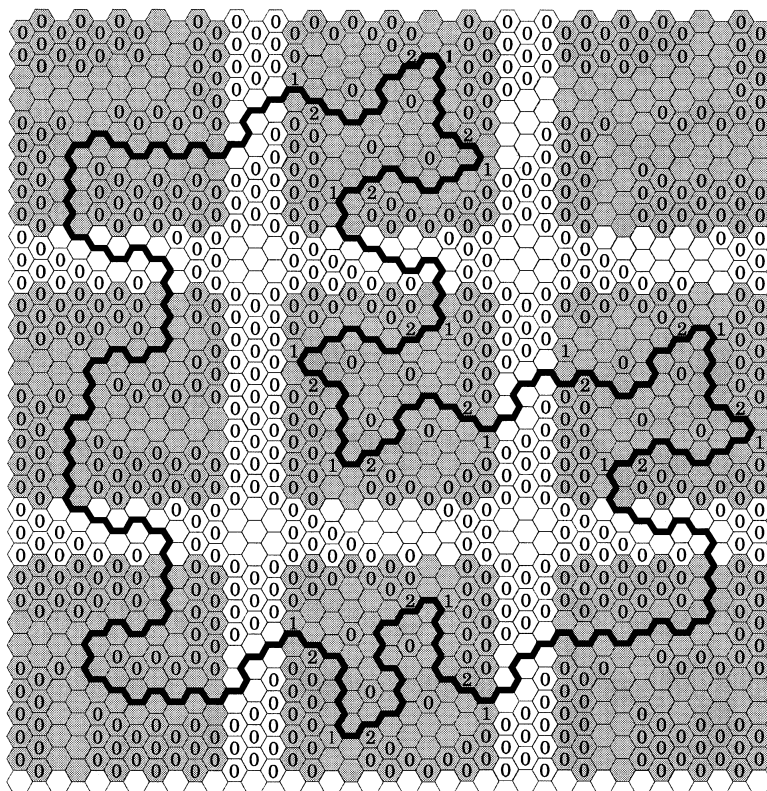
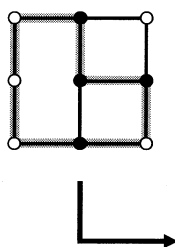


図 9: 多項式時間還元例 (全体像)

また、6 - スリザーリンクの解の存在判定問題について、ASP 完全性を示す。

各点の次数が 3 以下の平面グラフ上のハミルトン閉路問題は ASP 完全問題である [11]。そして、前述の証明で示した通り、部品 A_6 , B_6 は線を引く 2 つの端点が決まったときに、部品内の線の引き方は一意であるため、 G' のハミルトン閉路問題の解として構成される 1 つの閉路が 6 - スリザーリンク問題例の 1 つの解となっており、2 つの問題の解の間に 1 対 1 対応が存在している。よって、この変換が ASP 完全問題からの多項式時間 1 対 1 還元であることが言える。

以上より、6 - スリザーリンクの解の存在判定問題の ASP 完全性が示された。

4 3 - スリザーリンクの解の存在判定問題の NP 完全性

本節では、次の命題を証明する。

命題 4.1 3 - スリザーリンクの解の存在判定問題は NP 完全である。

略証. この問題が NP に属することは、解の与えられ方より明らかである。

本問題の NP 困難性については、命題 3.1 の証明方法と同様に、各点の次数が 3 以下の平面グラフという制限をつけたハミルトン閉路問題からの多項式時間還元を用いて証明できる。

紙面の都合上、6 - スリザーリンクの場合と同様の役割を持つ部品図を示すことで証明に代える。各部品 A_3 , B_3 などの「 $_3$ 」は、6 - スリザーリンクの各部品 A_6 , B_6 などの「 $_6$ 」に対応する 3 - スリザーリンクの部品であることを表す。図中の太線は、部品内に解の一部となる線が引かれたと仮定した場合に、実際に線が引くことが可能な辺を示している。

3 - スリザーリンクの解の存在判定問題について、ASP 完全性を示す。

6 - スリザーリンクの部品と同様、3 - スリザーリンクの部品 A_3 , B_3 も、線を引く 2 つの端点

が決まったときに、部品内の線の引き方が一意であるので、変換が ASP 完全問題からの多項式時間 1 対 1 還元である。

よって、3-スリザーリンクの解の存在判定問題の ASP 完全性が示された。

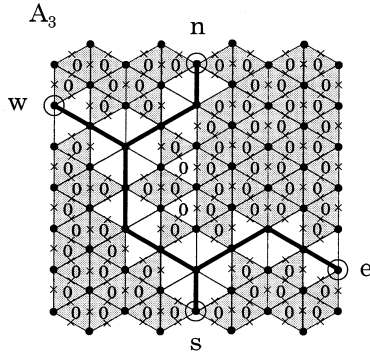


図 10: ○に対応する部品 A_3

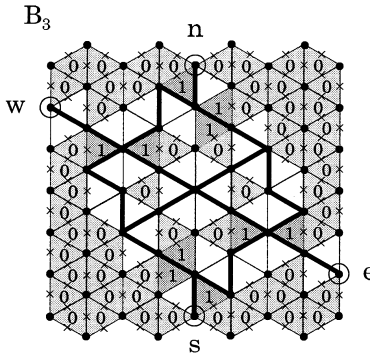


図 11: ●に対応する部品 B_3

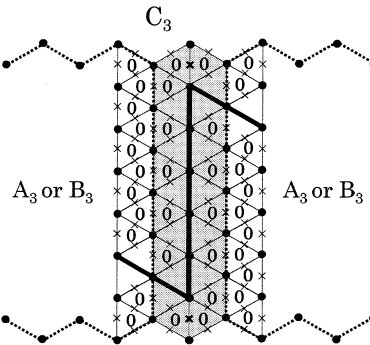


図 12: 横辺がある頂点部品同士の接続方法

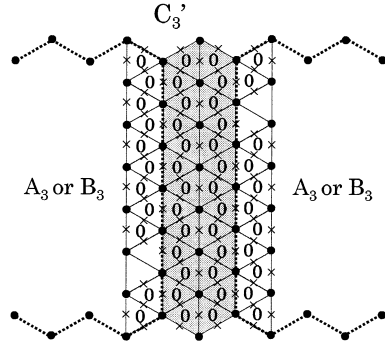


図 13: 横辺がない頂点部品同士の接続方法

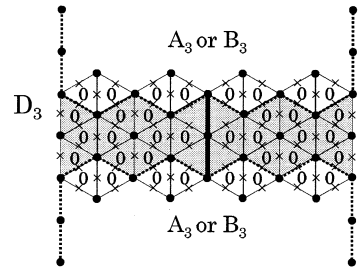


図 14: 縦辺がある頂点部品同士の接続方法

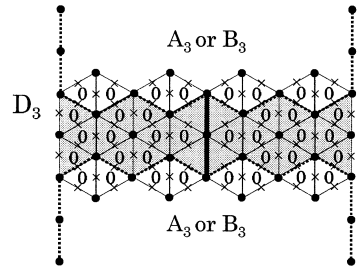


図 15: 縦辺がない頂点部品同士の接続方法

5 まとめ

本研究では、正六角形、正三角形による平面の敷き詰めが可能であることに着目し、六角格子、三角格子上に構成される k -スリザーリンク ($k = 6, 3$) を提案し、それらの解の存在判定問題の NP 完全性を、制限されたハミルトン閉路問題からの多項式時間還元を用いて証明した。さらに、その証明が多項式時間 1 対 1 還元であることを示し、6, 3-スリザーリンクの解の存在判定問題の ASP 完全性を証明した。

今後の課題として、スリザーリンクにどのような制限をかければ多項式時間可解であるかを調べるのが考えられる。

参考文献

- [1] 安達博行, 亀川裕之, 岩田茂樹, “ $n \times n$ 盤面上の将棋の指数時間完全性について,” 電子情報通信学会論文誌, Vol. J70-D, pp. 1843-1852, (1987).
- [2] G. Di Battista, P. Eades, R. Tamassia, and I. G. Tollis, *Graph Drawing*, Prentice Hall, (1999).
- [3] M. de Bondt, “NP-completeness of MASTER MIND and MINESWEEPER,” Technical Report No. 0418, Dept. of Mathematics, Radboud University Nijmegen, (2004). URL: http://www.math.ru.nl/onderzoek/reports/rep2004/rep04_18.ps.gz
- [4] M. de Bondt, “On the ASP-completeness of Cryptarithms,” Technical Report No. 0419, Dept. of Mathematics, Radboud University Nijmegen, (2004).
- [5] D. Eppstein, “On the NP-completeness of cryptarithms,” *SIGACT News* 18(3), pp. 38-40, (1987). URL: <http://www.ics.uci.edu/eppstein/pubs/Epp-SN-87.pdf>
- [6] A. S. Fraenkel and D. Lichtenstein, “Computing a perfect strategy for $n \times n$ chess requires time exponential in n ,” Proc. 8th Int. Coll. Automata, Languages, and Programming, Springer LNCS 115, pp. 278-293, (1981).
- [7] E. Friedman, “Pearl puzzles are NP-complete,” manuscript, (2002). URL: <http://www.stetson.edu/~efriedma/papers/pearl.pdf>
- [8] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP - Completeness*, W. H. Freeman and Co., (1979).
- [9] B. P. McPhail, “The complexity of puzzles: NP-completeness results for Nurikabe and Minesweeper,” Senior thesis, Reed College, (2003).
- [10] 「ニコリ」ホームページ, WWW contents, URL: <http://www.nikoli.co.jp/>
- [11] T. Seta, “The complexities of puzzles, CROSS SUM and their another solution problem (ASP),” Senior Thesis, Dept. of Information Science, the Faculty of Science, the University of Tokyo, (2002).
- [12] J. M. Robson, “The complexity of Go,” Proc. IFIP, pp. 413-417, (1983).
- [13] N. Ueda and T. Nagao, “NP-completeness Results for NONOGRAM via Parsimonious Reductions,” Technical report TR96-0008, Dept. of Computer Science, TOKYO Institute of Technology, (1996).
- [14] T. Yato, “スリザーリンクの NP 完全性について,” 情報処理学会研究報告, 2000-AL-74, pp.25-32, (2000).
- [15] T. Yato and T. Seta, “Complexity and Completeness of Finding Another Solution and Its Application to Puzzles,” IPSJ SIG Notes 2002-AL-87-2, IPSJ, (2002).