REDUCE上での一変数有理式の積分

元吉文男（電子技術総合研究所）

〔Ⅰ〕 はじめに

計算機による数式処理において一変数の有理式の積分は、多変数や超越関数の積分を扱う場合の基本となるものであり、使用されるアルゴリズムについても、数式処理でよく使われるものを含んでいる。特に数式処理で扱う数値は有理数であることが多く、誤差のない計算をしなければならず、浮動小数点を使用する数値計算のアルゴリズムだと非能率的になることが多い。また有理式の積分中では因数分解が行なわれるが、これを人間の手で実行する場合には発見的手法にたよっているところを、modular arithmetic を利用したアルゴリズムを使用している。この方法によると、整数係数一変数多項式を整数上でほぼ完全に、実用になる時間で、既約な式に因数分解することができる。

以上のような理由で一変数有理式の積分プログラムを作成したが，これはHearnによって開発されたREDUCE上に作られており、電総研のTSS LISP上で使用することができる。また、被積分関数を一変数有理式という特別なクラスに限定してあるためか、積分のほうが微分より早いという結果になった。

〔Ⅱ〕 あらすじ

ここでは以下で使用される言葉と記号の意味を説明し、プログラムの概略を述べる。以下の文では多項式は一変数であり、大文字のアルファベットを用い $P(x)$ または P と書き，その係数は対応する小文字に添字をつけたもので表わすことにする。（たとえば $P(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ ）

記号と言葉

deg(P)　：　多項式Pの次数（degree）

lc(P)　：　Pの最大次の係数（leading coefficient）

cont(P)　：　Pのすべての係数の gcd（content）

primitive　：　多項式で cont が１であること

pp(P)　：　Pの primitive な部分（$= P/\mathrm{cont}(P)$, primitive part）

GF(p)　：　pを素数としたとき、pを法とする演算についての体.（Galois field）

gf(P)　：　Pの各係数をGF(p)の要素にしたもの（mod p をとる）

int(P)　：　Pの係数がGF(p)の要素のとき、それぞれを $(-p/2, p/2)$ の範囲にしたもの

gcd　：　最大公約数．引数が整数の時は普通の gcd．多項式の時の値は多項式となるが，係数を整数で考えているときは primitive になるように、GF(p)で考えているときは lc が１になるようにする.

積分プログラムの概略

$P(x)$ と $Q(x)$ を与えたときに

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \qquad (1)$$

を求める。ここで P と Q は互いに素で係数が整数であり、primitive な多項式とする。また、積分に失敗したときは、成功した部分＋積分記号のついた形の答を返す。

1° 結果のうち有理式で表わされる部分と他の部分を分離する。

(1) 式は次のように変形することができる。

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = d_1\frac{G(x)}{A(x)} + d_2\int\frac{H(x)}{B(x)}\,dx \qquad (2)$$

但し

$$\left[\begin{array}{l} A(x) = \gcd(Q(x), Q'(x)) \\ B(x) = \dfrac{Q(x)}{A(x)} \\ A, B, G, H \text{ の係数は整数} \\ d_1, d_2 \text{ は有理数} \end{array}\right. \qquad (3)$$

このように変形することによって積分記号の中の分母 $B(x)$ は重根を持たない形になる。$G(x)$, $H(x)$ を求めるにはそれぞれの係数を未知数として、連立方程式を解けばよいが，このとき modular arithmetic を利用する。

2° $B(x)$ を因数分解する。

まず，十分大きな素数 p について、$\tilde{B}(x) = gf(B(x))$ を $GF(p)$ で因数分解する。

$$\tilde{B}(x) = \tilde{D}_1(x)\cdot\tilde{D}_2(x)\cdots\cdots\tilde{D}_{r'}(x) \qquad (4)$$

次に $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \cdots, \tilde{D}_{r'}$ から適当な組合せをとり、$B(x)$ の真の因子を求める。

$$B(x) = B_1(x)\cdot B_2(x)\cdots B_r(x) \qquad (5)$$

3° 部分分数に分解し、それぞれの積分形を求める。

$$\frac{H(x)}{B(x)} = C_1\frac{H_1(x)}{B_1(x)} + C_2\frac{H_2(x)}{B_2(x)} + \cdots + C_r\frac{H_r(x)}{B_r(x)} \qquad (6)$$

但し

$$\left[\begin{array}{lll} \deg(H_i) < \deg(B_i) & & i = 1, 2, \cdots r \\ C_i & i = 1, 2, \cdots r & \text{は有理数} \\ H_i & i = 1, 2, \cdots r & \text{の係数は整数} \end{array}\right. \qquad (7)$$

このとき、$H_1, H_2, \cdots H_r$ を求めるのに 1° と同様に連立方程式をつくりそれを解く。この各項について積分形を求めるのに現在は B_i の次数が 3 次をこえるものについては行なっていないので、積分記号をつけた形を値とする。2 次以下のものについては公式を使用して積分形を求める。

〔III〕 有理式部分の分離

与えられた積分は (2) 式のように変形することができる。ここで $A(x) = \gcd(Q, Q')$ を求めるときには誤差のない計算を行なわなければならない。係数を有理数として計算したり、整数のままで計算すると、扱う数の大きさが次数の指数関数的に増大する。そこで modular arithmetic を利用した次のような手続き PGCD を使用する。

PGCD　：　二つの多項式の gcd を求める。
入力　：　$P(x)$, $Q(x)$ ---- 整数係数の多項式
出力　：　$R(x) = \gcd(P(x), Q(x))$

1°　$R(x)$ の係数の大きさの範囲をきめる。
$P(x)$ または $Q(x)$ の約数の係数の大きさをおさえればよいが、

$$P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i x^i \tag{8}$$

の約数の係数は $P(x)$ の根の絶対値最大のものを α とすると

$$d = \frac{(2|\alpha|)^m}{\sqrt{\frac{3m}{2}}} \tag{9}$$

でおさえられる。

2°　素数 p を決める。

$$p > 2d\,|lc(P(x))| \tag{10}$$

を満たす素数 p を求める。現在はこの数が、36 bit で表現できないときは、gcd が 1 であるとみなしてしまう。

3°　$GF(p)$ で gcd の計算を行う。
$\tilde{P}(x) = gf(P(x))$, $\tilde{Q}(x) = gf(Q(x))$ として $\tilde{R}(x) = \gcd(\tilde{P}, \tilde{Q})$ の計算を mod p で行なう。このとき $lc(\tilde{R}) = 1$ になるようにしておく。

4°　整数化をする。
$int(lc(P)\tilde{R}(x))$ を求めその primitive な部分を R とする。

5°　検査をする
4°で求めた R が P を割り切れれば、R が $\gcd(P, Q)$ となる。もし割り切れないときは、2°に戻って新しい素数 p について同じことを繰り返す。

注）5°が正しいことは、$p > 2|lc(P)|\max(|r_i|)$ であることから、$\tilde{R}$ が正しい $\gcd(P, Q)$ の gf をとった式の lc を 1 にしたものに等しいならば、$int(lc(P)\tilde{R})$ は正しい gcd を整数倍したものになっていることによりわかる。

$A(x)$ を手続き PGCD を使用して求め、$B(x) = Q(x)/A(x)$ とする。ここで (2) の両辺を x について微分すると、

$$\frac{P}{Q} = \frac{G'}{A} - \frac{GA'}{A^2} + \frac{H}{B} \tag{11}$$

となるが、この両辺に $Q = AB$ を掛けると、

$$P = BG' - \frac{A'B}{A}G + AH \tag{12}$$

となる。このとき $A'B$ は A で割り切れるので $R(x)$ とおく。ここで A, B の次数をそれぞれ m, n とおくと、G, H の次数はそれぞれ $m-1$, $n-1$ となり (12) 式は

次のようになる。

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
0 & & & \\
(m-1)b_n - r_{n-1} & 0 & & \\
(m-1)b_{n-1} - r_{n-2} & (m-2)b_n - r_{n-1} & \ddots & \\
\vdots & \vdots & & -r_{n-1} \\
(m-1)b_1 - r_0 & & & \vdots \\
(m-1)b_0 & (m-2)b_1 - r_0 & & \vdots \\
 & (m-2)b_0 & \ddots & \\
O & & \ddots & -r_0
\end{bmatrix}}_{m\text{コ}}
\underbrace{\begin{bmatrix}
a_m & & O \\
a_{m-1} & \ddots & \\
\vdots & & a_m \\
a_0 & & \vdots \\
 & \ddots & \vdots \\
O & & a_0
\end{bmatrix}}_{n\text{コ}}
\begin{bmatrix}
g_{m-1} \\ \vdots \\ g_0 \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ h_0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
p_{m+n-1} \\ p_{m+n-2} \\ \vdots \\ p_1 \\ p_0
\end{bmatrix}
\qquad (13)
$$

この連立方程式を $g_{m-1},\cdots,g_0,\ h_{n-1},\cdots,h_0$ について解けばよいが，各係数が整数であり正確な計算を行なわねばならない。そのため，それを解く次のような手続きLSOLVE を利用する。

LSOLVE ： 連立方程式を解く．
入力 ： 要素が整数である $n\times n$ と $1\times n$ の行列 A と Y.
出力 ： $a = \det A$ および要素が整数の $1\times n$ の行列 X で次の式を満たすもの

$$AX = aY \qquad (14)$$

1° 解の最大絶対値をおさえる値 d を求める。

$$d = \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2}\ ,\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ \text{のうち最小のものを除いた}\ n\ \text{個の積} \right) \qquad (15)$$

2° 次の条件を満たすまで新しい素数 p_i を使用して3°を繰り返す。

$$p_0 \cdot p_1 \cdot \cdots \cdot p_r > 2d \qquad (p_0 > p_1 > \cdots > p_r) \qquad (16)$$

3° $GF(p_i)$ で方程式を解く．

$$A_i \equiv A\ ,\ Y_i \equiv Y \pmod{p_i} \qquad (17)$$

として

$$a_i = \det A_i\ ,\ \bar{X}_i = A_i^{-1} Y_i \qquad (18)$$

の計算を $GF(p_i)$ で行なう。このときは体で行う計算法が使用できるので，ガウス法を用いて行なう。さらに解を整数で求めるために次のように変形しておく。

$$X_i = a_i \bar{X}_i \qquad (19)$$

4° 3°で求めた a_i と X_i から a と X を求める。
X の要素と a は整数であることがわかっているので，次の方法を用いる。

$x_i \equiv x \pmod{p_i}$ $i=1,2,\cdots r$ から $|x| < p_1 \cdot p_2 \cdots \cdot p_r / 2$ を求める方法。

i) $Q \leftarrow 1$, $i \leftarrow 1$, $x \leftarrow 0$

ii) $b \leftarrow x \bmod p_i$, $g \leftarrow Q \bmod p_i$.

iii) $d \leftarrow (x_i - b)/g$ [arithmetic in $GF(p_i)$]

iv) if $2d > p_i$ then $d \leftarrow d - p_i$

v) $x \leftarrow dQ + x$, $Q \leftarrow Qp_i$, $i \leftarrow i+1$

vi) if $i > r$ then terminate else goto ii)

以上の操作により、与えられた積分を次式のように変形したとき、A, B, G, H の各多項式および d_1, d_2 の有理数を求めることができる。

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = d_1 \frac{G(x)}{A(x)} + d_2 \int \frac{H(x)}{B(x)} dx \qquad (2)'$$

[IV] 因数分解

因数分解すべき多項式を $B(x)$ とする。このとき B は III で行なった操作により重根を持たなくできるが，さらに primitive であるようにしておく。

1° 素数 p を決める。

gcd を求めるときと同様に、B の約数の係数の大きさをおさえる値 d を(9)式によって求め、次の条件を満たす奇数の素数 p を決める。

$$\begin{cases} p > 2\, lc(B)\, d \\ \tilde{B}(x) = gf(B(x)) \text{ が } GF(p) \text{ で重根を持たない.} \end{cases} \qquad (20)$$

現在はこのような p が 36 bit で表現できないときは B を既約とみなしてしまう。

2° $\tilde{B}(x)$ を $GF(p)$ で因数分解する．

ここでは次のような定理を利用して因数分解を行なう。

「
$$U(t, x) = \prod_{\alpha \in GF(p^t)} (x - \alpha) = x^{p^t} - x \qquad (21)$$

としたとき、$GF(p)$ で既約な m 次の多項式は $U(m, x)$ の約数ではあるが、$t < m$ なる t については $U(t, x)$ の約数ではない。」

$GF(p)$ での因数分解

i) $V(x) \leftarrow \tilde{B}(x) / lc(\tilde{B})$, $i \leftarrow 1$

ii) $D_i(x) \leftarrow \gcd(V(x), U(i, x))$, $T(x) \leftarrow T(x)/D_i(x)$, $i \leftarrow i+1$

iii) if $\deg(T) \geq 2i$ then goto ii) else terminate.

このようにすると、$D_i(x)$ は $\tilde{B}(x)$ の i 次の既約な因子のすべての積となっている。このときに、$\deg(D_i) > i$ のときは、さらに D_i を分解する必要がある。ここで

$$U(i,x) = x^{p^i} - x = x^{2f+1} - x = x(x^f+1)(x^f-1) \qquad (22)$$
$$\left(f = \frac{p^i-1}{2} \right)$$

という関係に注目すると、x^f-1 は $U(i,x)$ のほぼ半分の因子を含んでいる。そこで、$\gcd(x^f-1, D_i)$ をとると D_i の因子のうち x^f-1 に含まれているものが分離できる。さらに

$$U(i,x) = U(i, x-s) \qquad s \in GF(p) \qquad (23)$$

を利用して、異なる s について $(x-s)^f-1$ を考えることによって D_i の因子を全部分離できるはずである。この操作は確率的なものであるが、一回の操作で二等分されると考えると r 回行えば 2^r に分けられることになり、それほど多くの操作を行なう必要はない。

計算を行なうときには、最後は $\tilde{B}(x)$ またはその約数との gcd をとる操作であるので、実際に x のべきの大きなものを作る必要はなく、mod $(\tilde{B}(x))$ で計算を行なえば十分である。（このとき x^f を求めるのに多項式の mod $(\tilde{B})$ での掛け算の数は $\log f$ の order である。）

以上の結果、$\tilde{B}(x)$ は次のように因数分解される。

$$\tilde{B}(x) = lc(\tilde{B})\, D_{11} \cdots D_{1j_1} \cdot D_{21} \cdot \cdots \cdots D_{rj_r} \cdot T \qquad (24)$$

3° 整数における因数分解

(24) 式を書きなおして

$$\tilde{B}(x) = a\, \tilde{D}_1(x) \cdot \tilde{D}_2(x) \cdot \cdots \cdot \tilde{D}_{r'} \qquad (25)$$

として、これより真の因数分解

$$B(x) = B_1(x) \cdot B_2(x) \cdot \cdots \cdot B_r(x) \qquad (26)$$

を求める。このとき一般に $r' > r$ であり、$\tilde{D}_1, \tilde{D}_2, \cdots, \tilde{D}_{r'}$ のいくつかと a の約数のどれかを掛けたものが B_i と mod p で等しくなっているはずである。この B_i を求めるには、$\tilde{D}_j$ の組合せを数の少ないものから試せばよい。

i) $U \leftarrow B$, $a \leftarrow lc(U)$, $i \leftarrow 1$, $S \leftarrow \{\tilde{D}_1, \cdots, \tilde{D}_{r'}\}$, $T \leftarrow \{\}$

ii) if S is empty then terminate,
chose new combination of i $\tilde{D}_j$'s from S and set their product to V
if no new combination exists then [$i \leftarrow i+1$, goto ii)]

iii) $V \leftarrow$ int (aV)
if pp(V) divides U
then [$U \leftarrow U/$pp(V), $a \leftarrow a/$cont(V), add pp(V) to T
delete the $\tilde{D}_j$'s from S]
goto ii)

この手続きを終えると T に (26) 式の各 B_i が入っている。

[V] 部分分数に展開し、積分形を求める。

IV までの結果、あと次のような積分を求めればよい。

$$\int \frac{H(x)}{B_1(x)\cdot B_2(x)\cdots B_r(x)}\,dx \qquad (27)$$

このとき、$H, B_1, \cdots, B_r$ は整数係数の多項式であり、$B_1, \cdots, B_r$ は整数上で既約である。まず、被積分関係を次のように部分分数に展開する。

$$\frac{H}{B_1\cdot B_2\cdots\cdot B_r} = \frac{H_1}{B_1} + \frac{H_2}{B_2} + \cdots + \frac{H_r}{B_r} \qquad (28)$$

この式の両辺に $B = B_1\cdot B_2\cdots B_r$ を掛けて、H_i の各係数を未知数とする連立方程式を立てる。

$$H = \frac{B}{B_1}\cdot H_1 + \frac{B}{B_2}\cdot H_2 + \cdots + \frac{B}{B_r}\cdot H_r \qquad (29)$$

この式で B は B_i $(1 \le i \le r)$ で割り切れるからそれを、

$$\bar{B}_i(x) = \frac{B}{B_i} = \sum_{j=0}^{n-n_i} \bar{b}_{ij}\, x^j \qquad \text{但し} \quad n = \sum_{i=1}^{r} n_i \qquad (30)$$

とおくと (29) 式は、

$$n\text{個}\left\{\begin{bmatrix}
\bar{b}_{1n-n_1} & & 0 & \bar{b}_{2n-n_2} & & 0 & \cdots & 0 & \\
\bar{b}_{1n-n_1-1} & \ddots & & \vdots & \ddots & & & \ddots & \\
\vdots & & \bar{b}_{1n-n_1} & & & & & & \bar{b}_{rn-n_r} \\
\bar{b}_{10} & & \vdots & \bar{b}_{20} & & \vdots & \cdots & & \vdots \\
 & \ddots & & & \ddots & & & & \\
0 & & \bar{b}_{10} & 0 & & \bar{b}_{20} & & 0 & \bar{b}_{r0}
\end{bmatrix}\right.
\begin{bmatrix} h_{1n_1-1} \\ \vdots \\ h_{10} \\ h_{2n_2-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{r0} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} h_n \\ h_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ h_0 \end{bmatrix} \qquad (31)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{n_1\text{個}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n_2\text{個}} \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{n_r\text{個}}$$

のようになる。この式は III で述べた手続き LSOLVE によって解くことができ、(28) 式の各項は次のように表わされる。

$$\frac{H_i}{B_i} = \alpha_i \frac{\bar{H}_i}{B_i} \qquad (32)$$

この式で $\bar{H}_i$ は整数係数の primitive な多項式、α_i は有理数である。
この積分形を求めるには次のような公式を利用する。

1° $\deg(B_i) = 1$ のとき

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log(ax+b) \qquad (33)$$

2° $\deg(B_i) = 2$ のとき
このとき

$$B_i(x) = ax^2 + bx + c \qquad (34)$$

とし、 $D = b^2 - 4ac$ とおくと、

$D > 0$ のとき.

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx \tag{35}$$

$$= \frac{p}{2a\sqrt{D}}\left[(2aq-bp+\sqrt{D}\,p)\log(2ax+b-\sqrt{D}) - (2aq-bp-\sqrt{D}\,p)\log(2ax+b+\sqrt{D})\right]$$

$D < 0$ のとき

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{p}{2a}\log(ax^2+bx+c) + \frac{2aq-bp}{a\sqrt{-D}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{D}} \tag{36}$$

3° $\deg(B_i)=3$ のとき.
現在は行っていないので積分記号のついた形で残す。

以上のⅢ～Ⅴの操作を行なうことによって、与えられた積分(1)を求めることができる。Ⅵでは、例題を使用してそれらの過程を示し、さらにREDUCE上での実際の使用例を示す。

[Ⅵ] 例題と使用例

$$I = \int \frac{10x^2+11x-8}{2x^5-13x^4+33x^3-46x^2+44x-24}\,dx \tag{37}$$

を求める。

$$\begin{cases} P(x) = 10x^2+11x-8 \\ Q(x) = 2x^5-13x^4+33x^3-46x^2+44x-24 \end{cases} \tag{38}$$

として、$A(x)=\gcd(Q(x), Q'(x))$ を求める。まず $Q(x)$ を x について微分すると、

$$Q'(x) = 10x^4-52x^3+99x^2-92x+44 \tag{39}$$

となり、ここで手続き PGCD を用いると $A(x)$ は次のようになる。

$$A(x) = x^2-4x+4 \tag{40}$$

これより、

$$B(x) = \frac{Q(x)}{A(x)} = 2x^3-5x^2+5x-6 \tag{41}$$

$$\frac{A'B}{A} = 4x^2-2x+6 \tag{42}$$

となって、(13)の行列は $m=2, n=3$ であることより次のようになる。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2-4 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ -5+2 & -4 & 4 & -4 & 1 \\ 5-6 & 2 & 0 & 4 & -4 \\ -6 & 6 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_0 \\ h_2 \\ h_1 \\ h_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 11 \\ -8 \end{bmatrix} \tag{43}$$

これを手続き LSOLVE を利用して解くと、

$$
\begin{cases} G(x) = -x-1 \\ H(x) = -2x-5 \end{cases} \tag{35}
$$

となるから、求める積分は

$$
I = -\frac{x+1}{x^2-4x+4} - \int \frac{2x+5}{2x^3-5x^2+5x-6}\,dx \tag{36}
$$

となる。この第二項の被積分項の分母 $B(x)$ を因数分解すると、

$$
B(x) = 2x^3-5x^2+5x-6 = (x-2)(2x^2-x+3) \tag{37}
$$

この結果を利用して第二項を部分分数に分解すると次のようになる。

$$
\frac{2x+5}{2x^3-5x^2+5x-6} = \frac{2x+1}{2x^2-x+3} - \frac{1}{x-2} \tag{38}
$$

以上の結果を総合すると

$$
I = -\frac{x+1}{x^2-4x+4} - \log(x-2) + \frac{1}{2}\log(2x^2-x+3) + \frac{3}{\sqrt{23}}\tan^{-1}\frac{4x-1}{\sqrt{23}} \tag{39}
$$

となり求める積分が得られる。

REDUCE上で実際に因数分解を行なった例を右に示す。最初は x^6-64 の因数分解であり、次はまず多項式を掛けてそれを因数分解したものである。

次頁に示す例は有理式の積分を実行した結果である。

```
FACTX(X**6-64);

                                2                  2
(X + 2)*(X - 2)*(X  - 2*X + 4)*(X  + 2*X + 4)

3609  MS
*

(X+3)**3*(2*X**3-1)*(3*X**2-2);

    8        7         6         5         4         3
6*X  + 54*X  + 158*X  + 123*X  - 135*X  - 187*X  - 63*X

2
  + 54*X + 54

490  MS
*

FACTX(*ANS);

     3         2          3
(2*X  - 1)*(3*X  - 2)*(X + 3)

5551  MS
```

Fig 1. REDUCE上での因数分解

```
INTX(2/(X**4-2*X**2+1));

           2
( - X)/(X   - 1) + 1/2*LOG(X + 1) - 1/2*LOG(X - 1)

826  MS
=


INTX(1/(X**4-16));

1/32*LOG(X - 2) - 1/32*LOG(X + 2) - 1/16*ATAN(X/2)

1304  MS
=


INTX((10*X**2+11*X-8)/(2*X**5-13*X**4+33*X**3-46*X**2+44*X-24));

               2                      2
( - X - 1)/(X   - 4*X + 4) + 1/2*LOG(2*X   - X + 3) + 3/

23*SQRT(23)*ATAN((4*X - 1)/SQRT(23)) - LOG(X - 2)

2027  MS
```

Fig 2.　REDUCE による積分

[VII] おわりに

以上で述べたようにして積分を行なっているが、中でも触れてあるように実際には積分ができるものを、できないとしてしまうところがある。今後はそれらの点を改良するとともに、多変数の場合や、拡張された体で積分を表現すること、さらには初等超越関係の積分を行ないたいと考えている。

人工知能等の研究において、数式処理のような基本的な操作を用意することは必要であり、また数値処理などの分野においても数式処理を利用することによって新しい応用が開けるのではないかと思う。

謝辞　本研究の機会を与えていただいた、渕一博　推論機構研究室長に感謝致します。また筆者のわがままな要求にこたえてLISPを改造していただいた、東芝総研の黒川利明氏、茨城大の玉木久夫氏にも感謝致します。

[VIII] 参考文献

E.R. Berlekamp, "Factoring Polynomials over Large Finite Fields", Math. of Comp., July, 1970.

G.E. Collins, "The Calculation of Multivariate Polynomial Resultants", J. ACM, vol 18, No. 4, Oct, 1971.

D.E. Knuth, "Seminumerical Algorithms", Addison Wesley, 1969.

H. Takahashi & Y. Ishibashi, "Exact な計算法", 情報処理, vol. 1, 1961.

P.S. Wang & L.P. Rothschild, "Factoring Multivariate Polynomials over the Integer", SIGSAM, No. 28, Dec, 1973.