なかよしグループ問題と属性文法への応用

山下　義行　　佐々　政孝　　中田　育男

日立マイクロコンピュータエンジニアリング（株）　　筑波大学 電子情報工学系

1　はじめに

今回紹介する「なかよしグループ問題」は、ｅｃＬＲ属性文法［１］［２］における時間・空間最適な相続属性の属性スタック割り当て問題を、ある条件下の集合の彩色問題として一般化し、より親しみやすい表現に直したものである。この問題は、なかよしグループの子供達に最適な色のキャンディを配るというものであるが、なかよしグループ間の喧嘩関係や配るキャンディの色に関する子供達や先生の希望が絡みあい、必ずしも簡単には解けない。そこで本報告では、なかよしグループの中からキーとなる子供達を見つけ出し、その子らについて彩色問題を解くだけで全ての子供達への配色が決まる、という一般的な解法を提案する。この解法を用いると、子供達の希望と先生の希望の競合も簡単に調べることができる。

２章ではこの問題の紹介を行ない、３章から５章で一般的な解法を導出する。そして６章では、その応用のひとつとして相続属性を属性スタックに最適に割り当てるという問題を検討する。また最後にＲｉｅで記述されたＰＬ/Ｏ，Ｐａｓｃａｌコンパイラの実際の割り当てについても報告する。

2　なかよしグループ問題

なかよしグループ問題とは以下のような問題である。

【なかよしグループ問題】

ある小学校には子供達のなかよしグループがたくさんあります。全ての子供がいずれかのグループに属しており、複数のグループに属している子供をいます。グループ間には互いに喧嘩中のところもありますが、ひとりの子供が互いに喧嘩中のグループ両方に属していることはありません。

さて今度の遠足で子供達に一人に一個のキャンディを配ることになりましたが、

【配色の制約条件】互に喧嘩中のグループの子供達に同じ色のキャンディを配ってはいけません。（喧嘩中なので同じ色のキャンデイは食べたくない。）

【子供達の希望】それぞれのグループの子供達はそのグループのキャンディの色を少なくしたいと希望しています。（みんななかよしなので同じ色のキャンディを食べたい。）

【先生の希望】先生は子供達全体で必要なキャンディの色を少なくしたいと希望しています。

そこで、子供達と先生の希望ができるかぎりかなうような最適なキャンディの配色を与えなさい。もし子供達と先生の希望が競合する場合には、それについても言及しなさい。□

これだけではわかりにくいので、次に簡単ななかよしグループの例とその解を示す。

【例１】全校生徒８人の小学校に次のようななかよしグループがあるとする。

ａグループ）一郎、二郎、三郎
ｂグループ）四郎、五郎、六郎
ｃグループ）一郎、四郎、七郎、八郎

ただしａグループとｂグループは互に喧嘩中であるとする。図１にグループ間の包含関係を示す。

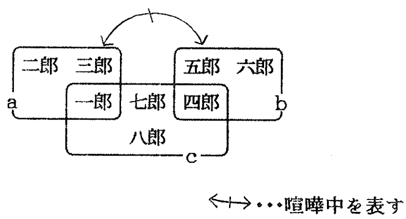


図１　なかよしグループの包含関係

このときのキャンディの配色は、ａグループとｂグループが喧嘩中なので２色が必要で、たとえば赤と青のキャンディを用いると、次の４通りである。

赤）一郎、二郎、三郎、七郎、八郎、
青）四郎、五郎、六郎

赤）一郎、二郎、三郎、七郎、
青）四郎、五郎、六郎、八郎

赤）一郎、二郎、三郎、八郎、
青）四郎、五郎、六郎、七郎

赤）一郎、二郎、三郎、
青）四郎、五郎、六郎、七郎、八郎

上のいずれの場合も配色の制約条件を満たしている。また全体で必要な色は２色であり、各グループで必要な色はａ、ｂグループで各１色、ｃグループで２色である。これ以上少ない色の数での配色はできない。ｃグループに２色が必要な理由は、互に喧嘩中である一郎と四郎が共にｃグループに属しているからである。また七郎と八郎は赤、青いずれの色のキャンディでもよいこと

がわかる。□

次にもう少し複雑な例を示しておく。この例の解法は次章以下で逐次説明していく。

【例2】全校生徒１０人の小学校に次のようなグループがあるとする。

1グループ）一郎、二郎
2グループ）二郎、三郎、四郎、五郎
3グループ）四郎、五郎
4グループ）四郎、六郎
5グループ）七郎、八郎
6グループ）八郎、九郎
7グループ）十郎

そして、1グループと5グループが喧嘩中、4グループと7グループが喧嘩中、6グループと7グループが喧嘩中である。図2にグループの包含関係を示す。

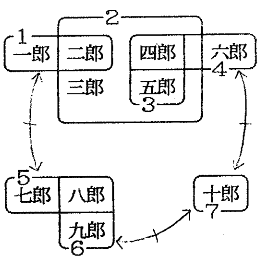


図2　なかよしグループの包含関係

□

3　なかよしグループの形式化

ここでは、なかよしグループ問題の一般的な解法を求める準備として、なかよしグループを以下のように形式化する。

まず、各なかよしグループを、$g_1, g_2, \cdots, g_n$とする。各g_iは子供達の集合を表す。

また、ふたつの集合：g_iとg_jが互いに喧嘩中ならば、それを

$$g_i \not- g_j$$

と表すとする。

【例3】例2は上の記法に従って次のように表すことができる。

g_1＝{一郎、二郎}，
g_2＝{二郎、三郎、四郎、五郎}，
g_3＝{四郎、五郎}，
g_4＝{四郎、六郎}，
g_5＝{七郎、八郎}，
g_6＝{八郎、九郎}，
g_7＝{十郎}

$$g_1 \not- g_5,\ g_4 \not- g_7,\ g_6 \not- g_7$$

□

4　解法の方針

なかよしグループ問題に対する一般的な解法（5章に述べる）は、それだけでは内容のわかりにくいものであるから、それを与える前に簡単な例を通して解法の見通しを立てる。まず4.1節において、配色に本質的でない部分を調べる。そして4.2節では、そのような本質的でない部分を捨象したなかよしグループ問題の解法を調べる。

4.1　配色に本質的でない部分

最初の例として、図3に示すように、ふたつのグループ：aおよびbが空でない交り：a∩bを持つ場合を考える。このとき、a∩bの要素（子供）に色：C-1が既に何らかの方法で割り当てられているならば、a∩$\overline{b}$の要素にも同じ色：C-1を割り当てることができる。（ここに$\overline{b}$はbの補集合を表す。）何故ならば、a∩bはaと喧嘩中のグループおよびbと喧嘩中のグループの両方のグループと喧嘩中である。これに対しa∩$\overline{b}$はaと喧嘩中のグループとのみ喧嘩中である。よって配色の制約条件よりa∩bよりも喧嘩相手の少ないa∩$\overline{b}$には明らかにC-1を割り当てることはできる。

同様の例を図4に示す。この例でも、a∩b∩cの要素が色：C-1に既に割り当てられているならば、その他の要素もC-1に割り当てることができる。

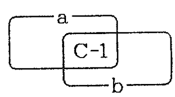


図3　本質的でない配色(1)

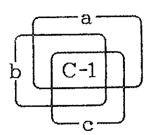


図4　本質的でない配色(2)

さて、図3のa∩b、図4のa∩b∩cのような積集合を「極大積集合」と呼び、それは次のように一般的に定義

される。

【定義1】全てのグループ：$g_1, g_2, \cdots, g_n$において

$$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi} \neq \phi \quad 1 \leqq f1, f2, \cdots fi \leqq n$$

が成り立ち、かつ

$$fi{+}1 \neq f1, f2, \cdots, fi \quad 1 \leqq fi{+}1 \leqq n$$

であるような $\forall fi{+}1$に対し

$$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi} \cap g_{fi+1} = \phi$$

であるような$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi}$を「極大積集合」という。□

【例4】図3、図4ではそれぞれ$a \cap b$、$a \cap b \cap c$が極大積集合であり、例3では

$g_1 \cap g_2$={二郎}，
$g_2 \cap g_3 \cap g_4$={四郎}，
$g_5 \cap g_6$={八郎}，
g_7={十郎}

が極大積集合である。□

そして、ひとつのなかよしグループにおける極大積集合がひとつの場合には、一般に次のことが成り立つ。

【補題1】ひとつのなかよしグループにおいて、他のグループとの極大積集合がひとつ存在し、それがある色に既に割り当てられているならば、そのグループのそれ以外の部分を同じ色に割り当てればよい。□

次に、ひとつのなかよしグループにおける極大積集合が複数個の例として、図5に示すように、グループ：a，b，cが空でない極大積集合：$a \cap b$，$a \cap c$を持つとする。このとき$a \cap b$，$a \cap c$の要素に色：C-1、C-2がそれぞれ何らかの方法で既に割り当てられているならば、$a \cap \overline{b} \cap \overline{c}$の要素をC-1、C-2のどちらの色に割り当てても子供達の希望、先生の希望に抵触しない。何故ならば、グループ：aはC-1＝C-2ならばひとつ、C-1≠C-2ならばふたつの色を既に使用しているから、$a \cap \overline{b} \cap \overline{c}$の要素にC-1、C-2のどちらの色を割り当てても、グループ：aに必要な色の数に変化はない。もちろん全体で必要な色の数にも増減はない。よって、子供達の希望、先生の希望に抵触しない。

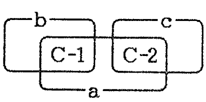
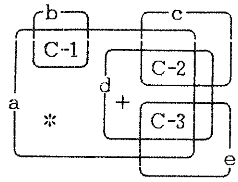


図5　本質的でない配色(3)

同様の例を図6に示す。この例でも色：C-1、C-2、C-3が既に割り当てられているならば、$a \cap \overline{b} \cap \overline{c} \cap \overline{d} \cap \overline{e}$の要素にはこの中のどの色を割り当てても構わないし、同様に$a \cap \overline{b} \cap \overline{c} \cap d \cap \overline{e}$の要素にはC-2、C-3のどの色を割り当てても構わない



※…$a \cap \overline{b} \cap \overline{c} \cap \overline{d} \cap \overline{e}$
＋…$a \cap \overline{b} \cap \overline{c} \cap d \cap \overline{e}$

図6　本質的でない配色(4)

このようにして一般に次のことが成り立つ。

【補題2】ひとつのなかよしグループにおいて、他のグループとの極大積集合が複数個存在し、かつそれぞれにある色が既に割り当てられているならば、それ以外の部分にはその中の適当なひとつの色を割り当てることができ、その割り当ては子供達の希望、先生の希望に抵触しない。□

補題1、2は図3、図5の例と同じ方針で証明可能であり、それは単に繁雑なだけであるからここでは証明を省略する。

また、極大積集合以外の部分の実際の配色は、5.2節でアルゴリズムとして正確に述べる。

さて以上のことより、なかよしグループの極大積集合のみが最適なキャンディの配色に関係し、それ以外の部分の配色は補題1、2に示す割り当てに従うならば子供達の希望、先生の希望に全く影響しないことがわかった。

4.2　極大積集合への配色

前節の結果より子供達の希望、先生の希望に影響のない部分を捨象し、ここでは極大積集合にのみ着目して、その配色の方法を調べる。

まず極大積集合間の喧嘩の有無について調べる。極大積集合はなかよしグループの部分集合であるから、次のことが成り立つ。

【補題3】ふたつの極大積集合：

$$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi},\ g_{g1} \cap g_{g2} \cap \cdots \cap g_{gj}$$

において

$$g_{fk} \not\top g_{gl}$$

となる g_{fk} および g_{gl} が存在するならば、

$$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi} \not\top g_{g1} \cap g_{g2} \cap \cdots \cap g_{gj}$$

である。すなわちこのふたつの極大積集合は喧嘩中であり、同じ色に塗ってはいけない。□

【例5】例3の極大積集合間では

$$g_1 \cap g_2 \not\top g_5 \cap g_6,$$
$$g_5 \cap g_6 \not\top g_7,$$
$$g_2 \cap g_3 \cap g_4 \not\top g_7$$

が成り立つ。□

この関係は、極大積集合を頂点とするグラフ：G0（この例は図7に示す）を与える。そして以下に述べるように、なかよしグループ問題はこのグラフをもとにして解くことになる。

子供達の希望はひとつのなかよしグループに必要な色の数をできるかぎり少なくしたいというものであったが、その色の数はそのグループに含まれる極大積集合の色の数に等しい（補題2参照）。よって、そのグループに含まれる極大積集合が複数個存在するならば、それら極大積集合の色は同じであることが望ましい。このことは、グラフ：G0について述べると、それらの極大積集合に対応する頂点を同一視することであるから、

【子供達の希望】ひとつのなかよしグループに複数の極大積集合が存在し、かつグラフ：G0においてそれらの極大積集合に対応する頂点の間に枝がないならば、それらの頂点をひとつの頂点に縮約したい。□

を意味する。

さて、子供達の希望はあくまでも希望であり、希望通り常に頂点を縮約することを意味するものではない。もし子供達の希望を満たすならば縮約を行ない、もし希望を無視するならばグラフに対して何も施さない。このどちらか操作を全てのなかよしグループについて繰り返すことで、グラフ：G0を変形したグラフ：G（例を図8に示す）を得る。

先生の希望は全体で必要な色の数をできるかぎり少なくしたいというものであったから、これをグラフ：Gについて述べると

【先生の希望】グラフ：Gの彩色問題を解き、最少の色を与える配色を求めたい。□

となる。（注：グラフ：Gの彩色問題とは、Gの中の任意の枝で結ばれた2頂点が同じ色にならないような頂点の彩色の中で、使用する色の数を最少にするような彩色を求める問題である。問題の性質や解法のアルゴリズムについては、たとえば［3］。）

以上のような議論から極大積集合の配色には、まずグラフ：G0を求め、それを変形してGを求め、Gの彩色問題を解けばよいことがわかる。しかし、もし子供達の希望と先生の希望が競合する場合には、G0からGへの変形如何によって異なる解をうる。この例を示す。

【例6】例5からグラフ：G0を求めると図7のようになる。もし子供達の希望を無視し、グラフの変形を行わないで彩色問題を解くと、図のように全体で必要な色の数は2となる。このとき g_2 に必要な色の数は2、g_1、g_3、g_4、g_5、g_6、g_7 で必要な色の数は1である。

一方、複数の極大積集合を含むグループは g_2 のみで、g_2 は $g_1 \cap g_2$ と $g_2 \cap g_3 \cap g_4$ を含む。そこで子供達の希望に従って $g_1 \cap g_2$ と $g_2 \cap g_3 \cap g_4$ を縮約すると、図8のグラフ：Gが得られる。この彩色問題を解くと、全体で必要な色の数は3、各グループに必要な色の数は1である。

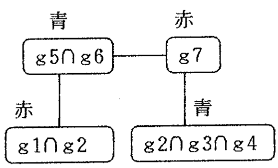


図7　変形前のグラフ：G0

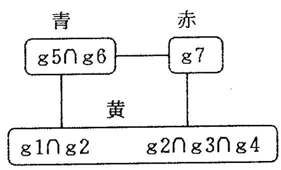


図8　変形後のグラフ：G

□

このように子供達の希望をどこまで満たすか（逆に言えば先生達の希望をどこまで無視するか）あるいは無視するか（満たすか）によって、配色は異なる場合がある。これは子供達の希望と先生の希望の競合である。この競合は例で明らかなように、グラフ：G0からGへの変形が存在する場合に生じる可能性があるが、はたして本当に競合が生じるかどうかを正確に知るには、全ての変形に対応する彩色問題を解いてみなければわからない（この問題はNP完全である）から、これはかなり厄介な作業である。

5 形式的解法

前章に述べたことは、なかよしグループ問題の一般的解法の「内容」であった。この章ではこれをアルゴリズムとして形式化する。まず4.1節において抽象化されたなかよしグループ問題を解くアルゴリズムを述べる。そして4.2節では4.1節で抽象的に求められた解から実際の個々の子供に色を割り当てるアルゴリズムを述べる。

5.1 配色の決定

まず4章の「極大積集合」はアルゴリズムの形式的な展開にとって必ずしも都合のいい表現ではないので、これと1対1に対応する集合：$\bar{g}$を次のように導入する。

【定義2】極大積集合：$g_{f1} \cap g_{f2} \cap \cdots \cap g_{fi}$に対応する$\bar{g}$は

$$\bar{g} = \{g_{f1}, g_{f2}, \cdots, g_{fi}\}$$

である。□

このような$\bar{g}$は、グループ：$g_1, g_2, \cdots, g_n$について極大積集合の数だけ存在するから、これら全てを適当に付番し、$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_m$とする。

そうすると次に、$\bar{g}_p$と$\bar{g}_q$が喧嘩中であることが補題3から次のように定義できる。

【定義3】集合：$\bar{g}_p, \bar{g}_q$ ($1 \leqq p, q \leqq m$) 間の喧嘩関係：

$$\bar{g}_p \mathrel{+} \bar{g}_q$$

は次のように定義される。

$$\bar{g}_p \mathrel{+} \bar{g}_q \;\langle=\rangle\; \exists g_i \in \bar{g}_p,\ \exists g_j \in \bar{g}_q,\ g_i \mathrel{+} g_j$$

□

次に、ひとつのなかよしグループ：g_iに含まれる全ての極大積集合を求めるため、$\bar{g}_p$を要素とする集合：$\bar{\bar{g}}_i$を次のように定義する。

【定義4】集合：$\bar{\bar{g}}_i$ ($1 \leqq i \leqq n$) は次のように定義される。

$$\bar{g}_p \in \bar{\bar{g}}_i \quad \langle=\rangle \quad g_i \in \bar{g}_p \quad (1 \leqq p \leqq m)$$

□

定義4は、もし$\bar{g}_p$に対応する極大積集合がg_iに含まれるならば、$\bar{g}_p$は$\bar{\bar{g}}_i$に含まれることの表明であり、この$\bar{\bar{g}}_i$を用いてなかよしグループ：g_iに関する子供達の希望（前章参照）を調べることができる。

【例7】例3について定義2～4の計算を行うと

$$\bar{g}_1=\{g_1, g_2\},\ \bar{g}_2=\{g_2, g_3, g_4\},$$
$$\bar{g}_3=\{g_5, g_6\},\ \bar{g}_4=\{g_7\}$$

$$\bar{g}_1 \mathrel{+} \bar{g}_3,\ \bar{g}_3 \mathrel{+} \bar{g}_4,\ \bar{g}_4 \mathrel{+} \bar{g}_2$$

$$\bar{\bar{g}}_1=\{\bar{g}_1\},\ \bar{\bar{g}}_2=\{\bar{g}_1, \bar{g}_2\},$$
$$\bar{\bar{g}}_3=\{\bar{g}_2\},\ \bar{\bar{g}}_4=\{\bar{g}_2\},\ \bar{\bar{g}}_5=\{\bar{g}_3\},$$
$$\bar{\bar{g}}_6=\{\bar{g}_3\},\ \bar{\bar{g}}_7=\{\bar{g}_4\}$$

である。□

さて、グラフ：G0と、子供達の希望を満たすためのG0の変形操作：$T_i(\bar{g}_p, \bar{g}_q)$ は、前章に従って次のように定義される。

【定義5】グラフ：G0は、$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots, \bar{g}_m$を頂点とし、頂点間の関係：$\bar{g}_p \mathrel{+} \bar{g}_q$ ($1 \leqq p, q \leqq m$) を枝とするグラフである。□

【定義6】もし$\bar{g}_p, \bar{g}_q \in \bar{\bar{g}}_i$ならばグラフ：G0の変形操作：$T_i(\bar{g}_p, \bar{g}_q)$ が存在し、次のように定義される。

(1) もしG0に枝：$\bar{g}_p \mathrel{+} \bar{g}_q$が存在すれば、何も行わない。

(2) さもなくば、G0の頂点：$\bar{g}_p, \bar{g}_q$をひとつの頂点に縮約する。

□

すでに前章で述べたように、子供達の希望と先生の希望は競合する場合があり、どちらを優先させるかの判断はなかよしグループ問題には指定されていない。そこで、この優先順位をどう決定するかは問題として残されるが、なかよしグループ問題は次のようなアルゴリズムで<u>抽象的に</u>解かれる。

【アルゴリズム】

(1) 定義2～5より全ての$\bar{g}_i$、$\bar{\bar{g}}_j$およびG0を求める。

(2) なかよしグループ：g_iの子供達の希望を満たすならば、G0に$T_i(\bar{g}_p, \bar{g}_q)$ を施す。

(3) (2)の結果得られたグラフについて彩色問題を解き、各$\bar{g}_i$の色を決定する。

□

【例8】例7からG0は図9のようになる。変形操作は$T_2(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ のみ存在する。そこで$T_2(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ を施さないならば、図9の彩色問題をそのまま解き、図のような配色を得る。もし$T_2(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ を施すならば、図10のようなグラフを得るからこれを解いて、図のような配色を得る。

この結果は例6と同じである。

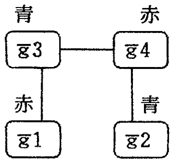


図9　変換前のグラフ：G0

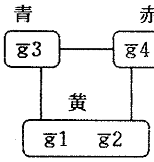


図10　変換後のグラフ：G

□

5.2　子供達への色の割り当て

5.1節の解法に従い、$\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, ･･･, $\bar{g}_m$に配色が完了したとする。そこで残る問題は、$\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, ･･･, $\bar{g}_m$の色から実際に子供達に割り当てる色を求めることである。これは補題1、2で述べた割り当て方法に従う。紙面の関係で詳しい説明は省略するが、全ての子供達に色を割り当てるアルゴリズムは以下の通りである。

【アルゴリズム(続)】

全てのなかよしグループ：g_iについて以下の処理を繰り返す。

(4) なかよしグループ：g_iと交りを持つグループ：h を条件：

$$h \in {}^{\exists}\bar{g}_p,\ \bar{g}_p \in \bar{g}_i\ \ (\Longleftrightarrow\ h \cap g_i \neq \phi)$$

から全て求め、それらをh_1, h_2, ･･･, h_nとする。

(5) 集合：

$$\hat{g}_i(t1,t2,\cdots,tn) = g_i \cap h_1^{t1} \cap h_2^{t2} \cap \cdots \cap h_n^{tn} \qquad t1,t2,\cdots,tn = \pm 1$$

ただし　$h^{+1}=h$,　$h^{-1}=\bar{h}$（補集合）

を全てのt1,t2,･･･,tnについて求め、次の処理を繰り返す。

(5-1) もし$\hat{g}_i(t1,t2,\cdots,tn)$が空ならば、何もしない。

(5-2) もし$\hat{g}_i(t1,t2,\cdots,tn)$が空でないならば、t1,t2,･･･,tnの中で

$$tj=+1\ \ (1 \leqq j \leqq n)$$

となる全てのh_jを要素として持つような$\bar{g}_p$（$\in \bar{g}_i$）をみつけ、$\hat{g}_i(t1,t2,\cdots,tn)$の要素を$\bar{g}_p$と同じ色に割り当てる。

もしそのような$\bar{g}_p$が複数個存在するならば、その中の適当なひとつと同じ色に割り当てる。

もし全てのtjが

$$t1=t2=\cdots=tn=-1$$

ならば、任意の$\bar{g}_p$（$\in \bar{g}_i$）と同じ色に割り当てる。

□

【例9】例3のなかよしグループにおいて例8図9のように配色が与えられたとする。このとき、たとえばg_2の子供達に色を割り当てることを考える。

まず、g_2と交りのあるグループはg_1、g_3、g_4である。そこで、

$$\hat{g}_2(t1,t2,t3) = g_2 \cap g_1^{t1} \cap g_3^{t2} \cap g_4^{t3}$$

を計算すると、空でない場合およびその色は

$\hat{g}_2(+1,-1,-1)$＝{二郎}　･･･赤
$\hat{g}_2(-1,+1,+1)$＝{四郎}　･･･青
$\hat{g}_2(-1,+1,-1)$＝{五郎}　･･･青
$\hat{g}_2(-1,-1,-1)$＝{三郎}　･･･赤または青

である。

同様の計算を全てのなかよしグループについて繰り返し、最終的に次の配色を得る。

赤：一郎、二郎、十郎
青：四郎、五郎、六郎、七郎、八郎、九郎
赤または青：三郎

また例9図10のように配色が与えられたならば、

赤：十郎
青：七郎、八郎、九郎
黄：一郎、二郎、三郎、四郎、五郎、六郎

である。□

6　属性文法への応用

なかよしグループ問題はもともと、ｅｃＬＲ属性文法に基づくコンパイラ生成系：Ｒｉｅ［1］［2］の最適な属性スタック割り当ての研究から出てきた問題である。そこでこの章では、なかよしグループ問題の応用としてＲｉｅのスタック割り当てについて考察する。

6.1　スタック割り当て問題

ＬＲ属性文法に基づくコンパイラの相続属性の計算は属性スタック上で行なわれるが、もし全てのＬＲ状態において互いに等しい値を持つ相続属性の集合：(同値類と呼ぶ）があるならば、それらをひとつの同じスタックに割り当て、計算の省力化を計ることができる。このように相続属性の同値類を考慮した属性文法を「ｅｃＬＲ属性文法」と呼ぶ。Ｒｉｅでは利用者が視察によって同値類を与えることで、ｅｃＬＲ属性文法に基づくコンパイラ生成系を実現している。

そしてこの章の目的は、時間・空間最適なスタック割り当てを、利用者が視察によって与えるのではなく、自動的に求めることである。（注：以下では、最適化のイメージがつかみ易いように、「同値類」の代りに「スタック」という言葉を用いる。）

スタック割り当てでは、各ＬＲ状態において計算すべき相続属性の間の同値性のみが必要な情報である。

ひとつのＬＲ状態：Ｓにおいて評価すべき相続属性が

a_1, a_2, ･･･, a_i,
b_1, b_2, ･･･, b_j,
･･･,
c_1, c_2, ･･･, c_k

であるとき、これら属性間で a_1, a_2, ･･･, a_i が互いに同値，b_1, b_2, ･･･, b_j が互いに同値、･･･、c_1, c_2, ･･･, c_k が互いに同値であるとする。（同値性の判定方法は［２］に詳しい。）このとき、状態：Ｓにおける同値関係を、

$S:\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$,
$\{b_1, b_2, \cdots, b_j\}$,
･･･,
$\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

または

$S: A, B, \cdots, C$

と表すとする。ここに、Ａ，Ｂ，･･･，Ｃは

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_i\}$,
$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_j\}$,
･･･,
$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_k\}$

である。このような集合を以下では「同値集合」と呼ぶ。

上の表現は、状態：Ｓにおける相続属性の同値性、非同値性に関する全ての情報を有しており、さらにこれを全てのＬＲ状態：S_1, S_2, ･･･, S_m について求めたもの：

$S1: A_{1,1}, A_{1,2}, \cdots, A_{1,f1}$
$S2: A_{2,1}, A_{2,2}, \cdots, A_{2,f2}$
･･･
$Sm: A_{m,1}, A_{m,2}, \cdots, A_{m,fm}$

ここに $A_{i,j}$ はＬＲ状態：S_i の同値集合である

は、生成するコンパイラの相続属性の同値性、非同値性に関する全ての情報を有している。

【例10】ＬＲ状態数が３の例を示す。ただし、ａ～ｋは相続属性を表しているとする。

$S_1:\{a, b, c, d, e\}, \{f, g\}$
$S_2:\{b, c, f, h, j, m\}$
$S_3:\{c, d, h, k, m\}, \{e\}$

□

そしてこのときスタック割り当ての時間最適化、空間最適化とは次のような内容である。

【時間最適化】各々のＬＲ状態に必要なスタック数が少ないほど、そのＬＲ状態の属性計算の時間は短かくなる。すなわちコンパイラの時間効率があがる。□

【空間最適化】全体で必要なスタック数が少ないほど、生成されるコンパイラの作業域は小さくなる。すなわちコンパイラの空間効率があがる。□

最適化の内容が明らかになったところで、スタック割り当て問題は次のように考えることができる。

【スタック割り当て問題】与えられた全てのＬＲ状態の同値集合から、時間・空間最適な相続属性の属性スタックへの割り当てを求めなさい。もし時間最適化と空間最適化が競合するならば、それについても言及しなさい。□

６．２　スタック割り当て問題の解法

スタック割り当て問題からなかよしグループ問題へは次のような対応関係がある。

相続属性→子供
属性スタック→キャンディの色
同値集合→なかよしグループ

さて、同じＬＲ状態の異なる同値集合に属する属性はそのＬＲ状態で互いに異なる値をとるから、同じスタックに割り当てることはできない。よってさらに次の対応がつく。

同じＬＲ状態の異なる同値集合
→互いに喧嘩中のなかよしグループ

また最適化に関しては明らかに次の対応がつく。

ひとつの同値集合に必要なスタックの本数は少なくしたい。（時間最適化）
→ ひとつのなかよしグループの子供達の希望

全体で必要なスタックの本数は少なくしたい。
（空間最適化）　→先生の希望

このようにして、スタック割り当て問題をなかよしグループ問題に置き換えることができる。そこで、その例を示す。

【例11】例10を解いてみる。まず例10より次のような形式化されたなかよしグループを作ることができる。グループ間の包含関係は図11である。

$g_{1,1}=\{a, b, c, d, e\}$,
$g_{1,2}=\{f, g\}$,
$g_{2,1}=\{b, c, f, h, j, m\}$,
$g_{3,1}=\{c, d, h, k, m\}$,
$g_{3,2}=\{e\}$

$g_{1,1} \nsim g_{1,2}$, $g_{3,1} \nsim g_{3,2}$

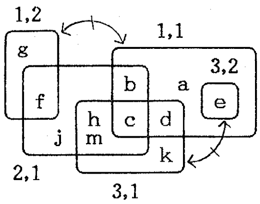


図11　同値集合の包含関係

これより$\overline{g}$、$\overline{\overline{g}}$を求めると

$$\overline{g}_1=\{g_{1,1},\ g_{2,1},\ g_{3,1}\},$$
$$\overline{g}_2=\{g_{1,2},\ g_{2,1}\},$$
$$\overline{g}_3=\{g_{1,1},\ g_{3,2}\}$$

$$\overline{g}_1 \not\sim \overline{g}_2,\ \overline{g}_2 \not\sim \overline{g}_3,\ \overline{g}_3 \not\sim \overline{g}_1$$

$$\overline{\overline{g}}_{1,1}=\{\overline{g}_1,\ \overline{g}_3\},\ \overline{\overline{g}}_{1,2}=\{\overline{g}_2\},$$
$$\overline{\overline{g}}_{2,1}=\{\overline{g}_1,\ \overline{g}_2\},\ \overline{\overline{g}}_{3,1}=\{\overline{g}_1\},$$
$$\overline{\overline{g}}_{3,2}=\{\overline{g}_3\}$$

これから作られるグラフおよび配色は図12だけである。

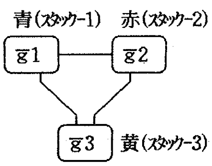


図12　例11のグラフおよび配色

よって実際のスタック割り当てはこの配色から次のように決まる。

スタック-1：b，c，d，h，k，m
スタック-2：f，g
スタック-3：e
スタック-1または2：j
スタック-1または3：a

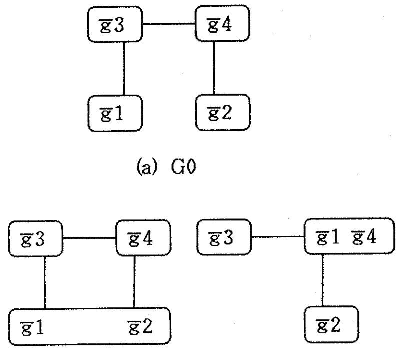
□

6.3　時間最適化と空間最適化の競合について

既になかよしグループ問題でみたように、スタック割り当て問題でも時間最適化と空間最適化が競合する場合がありうる。

たとえば、コンパイラ全体で必要とするスタック数を最少にすると各ＬＲ状態で評価すべきスタック数が増し、逆に各ＬＲ状態のスタック数を最少にすると全体のスタック数が増えてしまうという場合は、既に４章で述べた。

それ以外でも、たとえば図13(a)のようにG0が与えられているとき、$\overline{\overline{g}}_1=\{\overline{g}_1,\ \overline{g}_2\}$，$\overline{\overline{g}}_2=\{\overline{g}_1,\ \overline{g}_4\}$であったとする。



(a) G0

(b) $\overline{\overline{g}}$1を優先した変形　(c) $\overline{\overline{g}}$2を優先した変形

図13　ＬＲ状態間の競合を示す例

このとき、$\overline{\overline{g}}_1$を優先するならば図13(b)のように変形されて、これに対し$\overline{\overline{g}}_2$の希望である$\overline{g}_1$と$\overline{g}_4$の縮約は行えない。同様に、$\overline{\overline{g}}_2$を優先するならば図13(c)のように変形されて、これに対し$\overline{\overline{g}}_1$の希望である$\overline{g}_1$と$\overline{g}_2$の縮約は行えない。これは時間・空間最適化の競合ではなく、複数のＬＲ状態間の時間最適化の競合である。

このようにグラフの変形に関して幾つかの競合が考えられるが、この競合を合理的に解決する情報は相続属性の同値関係には含まれていない。そこで実際のコンパイラ生成時には何らかの別種の情報、たとえば各ＬＲ状態の出現頻度や利用者による優先順序の指定など、を参考にしてスタック割り当てを行うことになると思われる。たとえば図13で、$\overline{\overline{g}}_1$に対応するＬＲ状態：Ｓ1と$\overline{\overline{g}}_2$に対応するＬＲ状態：Ｓ2で、もしコンパイラ実行時にＳ1の出現確率がＳ2の出現確率に比べ十分に大きいならば、$\overline{\overline{g}}_1$を優先させた方がコンパイラ全体の時間効率はあがると予想できる。このような実際のコンパイラに依存した性質は現在さらに詳しく研究中である。

6.4　実際のスタック割り当て例

この節では、以上のような議論を踏まえて、Ｒｉｅで記述されたＰＬ/０とＰａｓｃａｌコンパイラについての実際のスタック割り当てを報告する。

まず、ＰＬ/０コンパイラ［４］ではＬＲ状態総数：116、相続属性の現れるＬＲ状態数：25、相続属性数：18であった。そして、その18個の属性についてグループを調べると次のようになった。ただし簡単のため属性名は１か

ら18の数字を代用する。

$g_1=\{1\}$ ，$g_2=\{2, 3\}$ ，
$g_3=\{4, 5\}$ ，$g_4=\{5\}$ ，
$g_5=\{6\}$ ，
$g_6=\{7, 8\}$ ，$g_7=\{8\}$ ，
$g_8=\{9\}$ ，
$g_9=\{10, 11, 12, 18\}$ ，$g_{10}=\{12, 18\}$ ，
$g_{11}=\{12, 13, 18\}$ ，
$g_{12}=\{14, 15, 16, 18\}$ ，
$g_{13}=\{14, 15, 16, 17, 18\}$ ，
$g_{14}=\{15, 16, 18\}$，$g_{15}=\{16, 18\}$ ，
$g_{16}=\{18\}$

$g_1 \nsim g_2$

これから$\bar{g}$を求めると、

$\bar{g}_1=\{g_1\}$ ，$\bar{g}_2=\{g_2\}$ ，$\bar{g}_3=\{g_3, g_4\}$ ，
$\bar{g}_4=\{g_5\}$ ，$\bar{g}_5=\{g_6, g_7\}$，$\bar{g}_6=\{g_8\}$ ，
$\bar{g}_7=\{g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}\}$

$\bar{g}_1 \nsim \bar{g}_2$

となる。複数の要素を持つ$\bar{g}$はない。よって、ＰＬ/０では時間・空間最適化の競合はなく、これから作られるグラフは図14のようになる。このグラフから２本の属性スタックが必要であることがわかる。

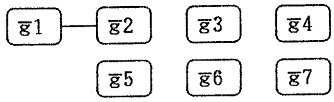


図14　ＰＬ／０コンパイラのグラフ

次にＰａｓｃａｌでは、同様に調べると、ＬＲ状態総数：301、相続属性の現れるＬＲ状態数：88、相続属性数：156であった。そして、それらの相続属性についてスタック割り当てを求めた結果、時間空間最適化の競合はなく、９本の属性スタックが必要であることがわかった。

参考文献

[１] 石塚治志，佐々政孝，属性文法によるコンパイラ生成系，第26回プログラミング・シンポジウム報告集，pp.69-80(1985).

[２] Sassa,M, Ishizuka,H, ecLR-attributed Grammars: Attributed Grammars Suitable for LR Parsing, 情報処理学会ソフトウェア基礎論研究会資料10-1 (1984).

[３] ベルジュ,C.，伊理正夫(訳)「グラフの理論Ⅱ」，サイエンス社(1976)

[４] Wirth,N.，Algorithms+Data Structures=Programs，Chap.5，Prentice-Hall(1976)