ソフトウェア基礎論 29−1
(1989. 5. 18)

閉集合を真理値とする論理を用いた情報の部分性の取扱い

A treatment of the partiality of information using closed set logic

織田 充

Mitsuru ODA

富士通(株)国際情報社会科学研究所

International Institute for Advanced Study of Social Information Science,
FIJITSU LIMITED

E-mail : oda@iias.fujitsu.junet

あらまし：我々の有限な観察能力により,我々の現実世界に関する知識は部分的なものである．しかし,このような部分的な知識を用い,我々は観察により裏付けることができる事実だけでなく,裏付けることができない事実も推論している．このことは我々の推論は観察可能な世界に閉じてはいないことを意味している．このような推論を形式化するために,本論文では閉集合の論理を提案する．閉集合の論理の各formulaに対し閉集合を真理値とし,結果として$\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$が成立しない．

Abstract : Our knowledge of real world is partial by our finite ability of the observation. But, from such a partial knowledge, we not only infer the fact which we can make sure by our observation but the fact which we cannot. It means that our inference is not closed in the world which we can observe. To formalize such inference, closed set logic is proposed in this paper. Each formula of closed set logic takes a closed set as truth value,accordingly, $\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$ is not provable.

1. はじめに

1.1 経験世界

現在計算機利用は単なるデータ処理の段階から知識処理の段階へ変化している．知識処理は記号処理と見なされ計算機上に実現される．これは知識処理を記号処理と見なすことにより,記号過程における記号とその指示対象の関係を捨象できるからである．しかし記号と指示対象が切り離されることにより,記号とその指示対象間の関係(記号の解釈)は逆に解釈者に依存することになる．このため記号の解釈者が人間になれば,人間の有限性が大きく反映する．

知識とは,現実世界を観察し得られる経験世界での事態の記述である．このように考えれば,ある知識が正しいとは,その知識が表す事態が現実世界で成立する必要がある．しかし我々が現実世界のうち観察可能な範囲は,我々の有限性により,現実世界の有限な部分である．したがってある知識が表す事態が現実世界全体で成立するか否かの判定ができない．我々が得ることの可能な知識は観察可能な範囲で正しい知識であることは保証できるが,現実世界全体において正しい知識であることは保証されてはいない(Fig. 1参照).

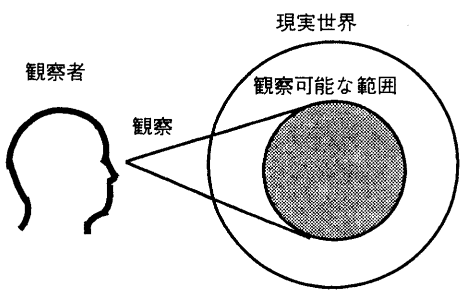

Fig. 1

例えば“鳥は飛ぶ”という知識が現実世界に対し正しいことが保証されるのは,実際飛ぶことが観察された鳥についてであり,まだ見ぬ鳥を含む現実世界に存在する全て鳥に対し成立する知識ではない.我々が現実世界から得られる知識とは,現実世界の観察可能である有限な部分世界において成立する事態に関する知識の記述である.以下“現実世界の観察可能な範囲”を“経験世界”と呼ぶ.知識が正しいことの保証を問題にした場合,我々人間の有限性から,我々の知識は現実世界に対し蓋然的な知識である.

1.2 認識世界

では我々の持つ知識は単に経験世界に閉じてしまっているのであろうか.例えば知識“鳥は飛ぶ”を考えた場合,我々はこの知識を観察された鳥だけでなく観察されていない鳥についても適用している.我々は知識“鳥は飛ぶ”を条件“観察した鳥全てのおいて”を付け,観察可能な範囲内で成立する知識と制限してはいず,経験世界に閉じていない.むしろ知識“鳥は飛ぶ”を,(その知識が成立することが観察されている)経験世界を含むより広範な世界において成立可能な知識として扱っている(Fig.2参照).これら知識の扱いは,

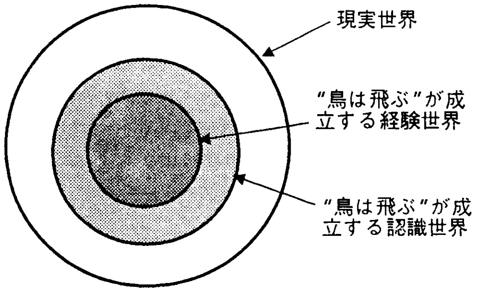

Fig. 2

我々にとって現実世界に関する知識が,現実世界で実際に観察された範囲で成立した事態の記述に留まらず,未だ観察されていない範囲での可能性を含んでいることを表している.以下この経験世界を含むより広範な世界のことを“認識世界”と呼ぶ.

しかし我々はこのような蓋然的,また曖昧な知識を現実世界全体で成立する知識としてはない.先の“鳥は飛ぶ”という知識に関しても,例外(飛ばない鳥)があることを知っている.このことは我々の持つ全ての知識が現実世界全体で成立する知識であると主張しているのでく,現実世界のある領域で成立することを示している.“鳥は飛ぶ”が成立する認識世界は,“鳥は飛ぶ”ことが可能な範囲に対応している.認識世界はこの点で現実世界に必ずしも一致するとは限らない.

1.3 知識の連言

認識世界下での解釈による知識には,観察に裏付けられていず,知識が現実世界に対し正しいか否かという点で,曖昧性(vagueness)が含まれている.したがって認識世界下での解釈による知識を仮定をとして,複数列挙することの危険性を表している.例えば“鳥は飛ぶ”,“チュン助は鳥である”という命題が与えられていたとする.このとき命題“チュン助は飛ぶ”をすぐに結論づけることができない.なぜなら“チュン助は飛ぶ”という知識は観察により保証されていないからである.しかし我々は実際にはチュン助が飛んでいる場面を観察していなくとも“チュン助は飛ぶ”と推論する.このことは我々が推論を行う際,知識は認識世界上で解釈されるためである.たとえ“チュン助は飛ぶ”,“チュン助は鳥である”それぞれに対する経験世界の共通部分となる経験世界が空な世界でも,それぞれ共通な部分となる認識世界が空な世界とはならないことを用い,“チュン助は飛ぶ”ことが可能であることを推論するためと考えられる(Fig.3参照).

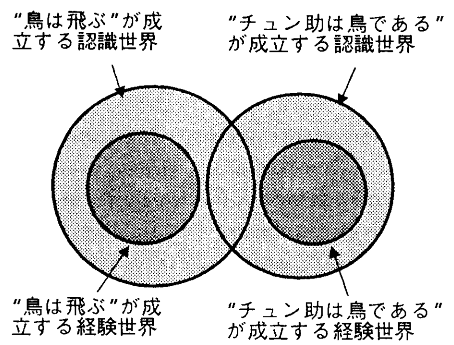

Fig. 3

我々が持つ現実世界に関する知識は,我々の有限な観察能力から蓋然的でありまた曖昧である.しかし我々はその部分的な知識を持ちい,蓋然的な推論を行うことで現実世界を推測すると考えられる.

現実世界の部分世界である認識世界を現実世界と捉え推論を行うことは,先に指摘した認識世界の性質から,我々の世界観に合致しない.したがって我々の現実世界に関する知識の論理として,対象に関する完全な知識が与えられることが前提とされる古典論理を採用することはできない.知識の部分性を認めた上で,全体的な性質を推論する蓋然的な推論を与える論理が必要となる.本研究では,以上のことを考慮した論理として“部分性の論理”を提案する.

2. 部分性の論理

論理を定義するためには，その言語と推論規則を挙げることである．まずformulaを与える形式言語Lとして命題論理言語を採用する．Lでの文を表すformulaを以下のように再帰的に定義する．

定義１：形式言語L

① 原子文(atomic sentence)はformula.

② $\alpha, \alpha_i (i \in I), \beta$がformulaならば$\neg\alpha, \alpha \rightarrow \beta, \bigwedge_{i \in I} \alpha_i, \bigvee_{i \in I} \alpha_i$, はformula,

③ 以上によってformulaとされたものだけがformulaである．

2.1 推論規則

推論規則をGentzen流の手法で形式化する．Gentzen流の形式化の特徴は，公理を一つのみ持ち，複数の推論規則からなる体系により形式化する点である．またformulaに類似な論理的に証明可能なformulaである“式(sequent)”という概念を導入する点である．まず$A_1,\ldots,A_n, B_1,\ldots,B_m$がformulaであるとき，

$$A_1,\ldots,A_n \Rightarrow B_1,\ldots,B_m$$

の形を式(sequent)といい，“仮定$A_1,\ldots,A_n$より$B_1,\ldots,B_m$のいずれかが成立する”と言う．$A_1,\ldots,A_n \Rightarrow B_1,\ldots,B_m$の意味は$A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$である．特に式の右辺が空列である場合，

$$A_1,\ldots,A_n \Rightarrow$$

は，“仮定$A_1,\ldots,A_n$より矛盾が生じる”と言い，また左辺が空列である場合，

$$\Rightarrow B_1,\ldots,B_m$$

は，“仮定なしに$B_1,\ldots,B_m$のいずれかが成立する”と言う．特別な場合，

$$\Rightarrow$$

は“仮定なしに矛盾が生じる”と言う．

ここで“部分性の論理における式”とは，式の左辺がたかだか一つのformulaよりなる式を言う．このように式を制限するのは，次の理由による．式の左辺に含まれるformulaは仮定を表している．もし式の左辺に複数の仮定が登場し，各仮定が表す事態が互いに両立しない場合，左辺全体に対応する経験世界が必然的に空である．しかしその場合でも左辺全体に対応する認識世界が空であるとは限らない．したがって現実世界での事態を推測する推論を形式化する目的から，曖昧性の増大を防ぐために，左辺に登場するformulaをたかだか一つに制限する．したがって部分性の論理での式は$A \Rightarrow B_1,\ldots,B_m$または$\Rightarrow B_1,\ldots,B_m$($A, B_1,\ldots, B_m$はformula)なる形をしている．

推論規則(inference rules)を表現した図式(推論図式)を以下に示す．推論図式は$S, S_1,\ldots,S_n$を式とすれば，

$$\frac{S_1,\ldots,S_n}{S}$$

の形をした図式であり，また$S_1,\ldots,S_n$をこの推論図式の上式(upper sequent)またSを下式(lower sequent)と呼ぶ．ただし図式中に登場するα, βはformula，また$\Gamma, \Delta, \Delta_i (i \in I), \Pi$はformulaの任意のformulaの列で，特にΓに含まれるformulaはたかだか一つとする．図式中上式に登場するα, βをsub-formula，下式に登場するαもしくはβを含むformulaをchief-formulaと呼ぶ．部分性の論理での推論規則は，(一階述語論理をGentzen流の形式で定式化した体系である)LKでの限量に関する推論規則を除き，残りの推論規則の登場する式の左辺に含まれるformulaをたかだか一つに制限した形をしている．また公理として同様に$\alpha \Rightarrow \alpha$のみを持つ．

定義６：推論図式

w⇒	$\dfrac{\Rightarrow\Delta}{\alpha\Rightarrow\Delta.}$	⇒w	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\alpha, \Delta.}$
e⇒	なし	⇒e	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha, \beta, \Pi}{\Gamma\Rightarrow\Delta, \beta, \alpha, \Pi.}$
c⇒	なし	⇒c	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha, \alpha, \Pi}{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha, \Pi.}$

三段論法 $$\frac{\Gamma\Rightarrow\Delta_i, \alpha\ (i \in I) \quad \alpha\Rightarrow\Pi}{\Gamma\Rightarrow\ldots,\Delta_i,\ldots,\Pi.}$$

¬⇒	$\dfrac{\Rightarrow\Delta, \alpha}{\neg\alpha\Rightarrow\Delta.}$	⇒¬	$\dfrac{\alpha\Rightarrow\Delta}{\Rightarrow\Delta, \neg\alpha.}$
∧⇒	$\dfrac{\alpha\Rightarrow\Delta}{\alpha\wedge\beta\Rightarrow\Delta,}$ および $\dfrac{\beta\Rightarrow\Delta}{\beta\wedge\alpha\Rightarrow\Delta.}$	⇒∧	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha_i\ (i \in I)}{\Gamma\Rightarrow\Delta, \bigwedge_{i \in I} \alpha_i.}$
∨⇒	$\dfrac{\alpha_i\Rightarrow\Delta\ (i \in I)}{\bigvee_{i \in I} \alpha_i\Rightarrow\Delta.}$	⇒∨	$\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha}{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha\vee\beta,}$ および $\dfrac{\Gamma\Rightarrow\Delta, \beta}{\Gamma\Rightarrow\Delta, \alpha\vee\beta.}$

$\rightarrow\Rightarrow \quad \dfrac{\Rightarrow\Delta,\alpha \quad \beta\Rightarrow\Lambda}{\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\Delta,\Lambda.} \qquad \Rightarrow\rightarrow \quad \dfrac{\alpha\Rightarrow\Delta,\beta}{\Rightarrow\Delta,\alpha\rightarrow\beta.}$

いま上に示した推論規則を用い, 公理の集合Sから式sが証明されることを$S\vdash$s で表す. 特に公理の集合Sが$\alpha\Rightarrow\alpha$なる形をした公理のみからできている場合, Sを略し$\vdash$s と表し, "sはprovable(証明可能)"と読む.

定理 2 :基本定理

式sがprovableならば, sは三段論法を用いないでもprovableである.

証明)略

部分性の論理での推論図式は, 限量に関する図式を除くLKの推論図式で, 図式に登場する全ての式の左辺に含まれるformulaをたかだか一つのformulaに制限した図式である. したがってLKにおける基本定理における式の左辺をたかだか一つのformulaとおいた場合の証明が, そのまま部分性の論理での基本定理の証明となり成立する.

定理 3 :無矛盾性

証明)

無矛盾であるとは⇒がprovableでないことである. 基本定理より⇒がprovableであるとすれば, ⇒の三段論法を用いない証明図がある. 一方, 下式にchief-formulaが登場しない図式は三段論法のみである. よって⇒の三段論法を用いない証明図がない. したがって⇒がprovableではない.

2.2 例

(1) $\Rightarrow\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$はprovableではない.
(2) $\Rightarrow\neg\alpha\vee\alpha$はprovableである.
(3) $\Rightarrow\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$はprovableである.
(4) $\Rightarrow\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$はprovableではない.
(5) $\alpha\Rightarrow\beta\rightarrow\alpha$はprovableではない.
(6) $\neg\alpha\Rightarrow\alpha\rightarrow\beta$はprovableである.
(7) $\alpha\wedge\beta\Rightarrow\alpha$(また$\beta\wedge\alpha\Rightarrow\alpha$)はprovableである.
(8) $\alpha\Rightarrow\alpha\vee\beta$(また$\alpha\Rightarrow\beta\vee\alpha$)はprovableである.
(9) $\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\neg\alpha\vee\beta$はprovableである.
(10) $\neg\alpha\vee\beta\Rightarrow\alpha\rightarrow\beta$はprovableではない.

以上のうちいくつかの式に関する証明を与える. 式の条件として, 式は必ず論理記号を含むか, または両辺とも空列であることはない. 公理$\alpha\Rightarrow\alpha$は明らかにこの条件を充たし, また三段論法以外の推論図において, 上式がこの条件を充たすならば, 下式がこの条件を充たすことは明らかである. よって, provableな式は全てこの条件を充たす. 以上から$\Rightarrow\alpha$も$\alpha\Rightarrow$もprovableでない.

(1) $\Rightarrow\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$は一般にprovableではない.

証明)いま$\Rightarrow\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$がprovableとし, この式に至る三段論法なしの証明図をPとする. Pの最後に用いられた推論図をI_1とする. I_1の下式は$\Rightarrow\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$であるから, I_1は⇒wまたは⇒¬である.

I_1が⇒wならばI_1の上式が⇒となり, ⇒を下式とする推論図I_2があることになる. しかし⇒がprovableではなく, このようなI_2はない. よってI_1は⇒¬である.

I_1は⇒¬であるならばI_1の上式は$\neg\alpha\wedge\alpha\Rightarrow$となる. いま同様に$\neg\alpha\wedge\alpha\Rightarrow$を下式とする推論図$I_2$がある. I_2はw⇒または∧⇒である.

I_2がw⇒ならばI_2の上式が⇒となり, ⇒を下式とする推論図I_3があることになる. しかし⇒がprovableではなく, このようなI_3はない. よってI_2は∧⇒である.

I_2が∧⇒ならばI_2には次の二つの場合がある.

① $\dfrac{\alpha\Rightarrow}{\neg\alpha\wedge\alpha\Rightarrow}$ ② $\dfrac{\neg\alpha\Rightarrow}{\neg\alpha\wedge\alpha\Rightarrow}$

①の場合, $\alpha\Rightarrow$を下式とする推論図I_3がある. しかし$\alpha\Rightarrow$はprovableでない. したがってI_2は②の場合になる. ②の場合, $\neg\alpha\Rightarrow$を下式とする推論図I_3がある. しかしI_3のの上式は⇒または$\Rightarrow\alpha$しか考えられない. 両式はともにprovableでない.

したがって$\Rightarrow\neg(\neg\alpha\wedge\alpha)$はprovableではない.

(2)$\Rightarrow\neg\alpha\vee\alpha$はprovableである.

証明)

$$\begin{array}{ll}
\alpha\Rightarrow\alpha & \\ \hline
\Rightarrow\alpha,\neg\alpha & \Rightarrow\neg \\ \hline
\Rightarrow\alpha,\neg\alpha\vee\alpha & \Rightarrow\vee \\ \hline
\Rightarrow\neg\alpha\vee\alpha,\alpha & \Rightarrow e \\ \hline
\Rightarrow\neg\alpha\vee\alpha,\neg\alpha\vee\alpha & \Rightarrow\vee \\ \hline
\Rightarrow\neg\alpha\vee\alpha & \Rightarrow c
\end{array}$$

(3)$\Rightarrow\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha$はprovableである.

証明)

$$\begin{array}{ll}
\alpha\Rightarrow\alpha & \\ \hline
\Rightarrow\alpha,\neg\alpha & \Rightarrow\neg \\ \hline
\neg\neg\alpha\Rightarrow\alpha & \neg\Rightarrow \\ \hline
\Rightarrow\neg\neg\alpha\rightarrow\alpha & \Rightarrow\rightarrow
\end{array}$$

(4)$\Rightarrow\alpha\rightarrow\neg\neg\alpha$は一般にprovableではない.

証明)証明を簡略化し, $\alpha\Rightarrow\neg\neg\alpha$がprovableではないことを証明する. いま$\alpha\Rightarrow\neg\neg\alpha$がprovableとし, この式に至る三段論法なしの証明図をPとする. Pの最後に用いられた推論図をI_1とする. I_1は下式の左辺がα, 右辺

が$\neg\neg\alpha$である推論図である．このようなI_1は$w\Rightarrow$, $\Rightarrow w$, $\Rightarrow\neg$である．

I_1が$\Rightarrow w$であるならば，$\alpha\Rightarrow$がprovableになる．$\alpha\Rightarrow$は(1)で示したようにprovableではない．よってI_1は$\Rightarrow w$ではない．

I_1が$\Rightarrow\neg$であるならば，下式の左辺がαおよび$\neg\alpha$を含み，右辺が空な推論図I_2がある．このようなI_2は存在しない．よってI_1は$\Rightarrow\neg$ではない．

I_1が$w\Rightarrow$であるならば，下式の左辺が空，右辺が$\neg\neg\alpha$である推論図I_2がある．このようなI_2は$\Rightarrow\neg$である．I_2が$\Rightarrow\neg$であるならば，下式の左辺が$\neg\alpha$，右辺が空である推論図I_3がある．このようなI_3は$\Rightarrow w$, $\neg\Rightarrow$である．

I_3が$\Rightarrow w$であるならば，$\Rightarrow$を下式とするI_4があることになる．しかし無矛盾性より，このような推論図はない．よってI_3は$\Rightarrow w$ではない．

I_3が$\neg\Rightarrow$であるならば，下式の左辺が空，右辺がαである，つまり$\Rightarrow\alpha$を下式とする推論図I_4があることになる．しかしこのような推論図は(1)の証明にあるように存在しない．

以上より$\Rightarrow\alpha\to\neg\neg\alpha$はprovableではない．

(5)$\alpha\Rightarrow\beta\to\alpha$はprovableではない．

証明)いま$\alpha\Rightarrow\beta\to\alpha$がprovableとし，この式に至る三段論法なしの証明図をPとする．Pの最後に用いられた推論図をI_1とする．I_1は下式の左辺がα，右辺が$\beta\to\alpha$である推論図である．このようなI_1は$w\Rightarrow$, $\Rightarrow w$, $\Rightarrow\to$かである．

I_1が$\Rightarrow\to$であるならば，下式の左辺にβが含まれ，右辺がαである推論図I_2がある．しかし下式の左辺はα, βを含み，部分性の論理での推論図式に対する制限からこのようなI_2はない．よってI_1は$w\Rightarrow$か$\Rightarrow w$である．

I_1が$\Rightarrow w$であるならば，$\alpha\Rightarrow$がprovableとなり，よってI_1は$\Rightarrow w$でない．

I_1が$w\Rightarrow$であるならば，下式の左辺は空，右辺は$\beta\to\alpha$な推論図I_2がある．I_2は$\Rightarrow\to$か$\Rightarrow w$である

I_2が$\Rightarrow w$であるならば，下式の両辺が空な推論図I_3がある．しかしこれは$\Rightarrow$を下式とする推論図となり，無矛盾性から，このような推論図はない．したがってI_2は$\Rightarrow\to$である．

I_2が$\Rightarrow\to$であるならば，下式の左辺がβ，右辺がαな推論図I_3がある．このようなI_3は$w\Rightarrow$か$\Rightarrow w$である．しかしI_3が$w\Rightarrow$の場合，$\beta\Rightarrow$がprovableとなる．またI_3が$\Rightarrow w$の場合，$\Rightarrow\alpha$がprovableとなる．よってこのようなI_3はない．

よって$\alpha\Rightarrow\beta\to\alpha$は一般にprovableではない．

(6)$\neg\alpha\Rightarrow\alpha\to\beta$はprovableである．

証明)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\alpha\Rightarrow\alpha,\beta}\Rightarrow w}{\Rightarrow\alpha,\alpha\to\beta}\Rightarrow\to}{\Rightarrow\alpha\to\beta,\alpha}\Rightarrow e}{\neg\alpha\Rightarrow\alpha\to\beta}\neg\Rightarrow$$

(9)$\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha\vee\beta$はprovableである．

証明)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha\Rightarrow\alpha}{\Rightarrow\alpha,\neg\alpha}\Rightarrow\neg}{\Rightarrow\neg\alpha,\alpha}\Rightarrow e \qquad \beta\Rightarrow\beta}{\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha,\beta}\text{三段論法}}{\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha,\neg\alpha\vee\beta}\Rightarrow\vee}{\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha\vee\beta,\neg\alpha}\Rightarrow e}{\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha\vee\beta,\neg\alpha\vee\beta}\Rightarrow\vee}{\alpha\to\beta\Rightarrow\neg\alpha\vee\beta}\Rightarrow c$$

3. 意味論

3.1 真偽

では次に部分性の論理のモデルについて考える．ある命題Aが真であるのは，Aが現実世界における事態に対応し合致するときである．したがって命題Aの真偽を次のように解釈する．

命題Aが真：命題Aが現実世界における事態に対応し合致するときである．

命題Aが偽：命題Aが現実世界における事態に対応も合致しないときである．

しかしある命題Pと(Pが表す)事態との対応ないし合致が保証されるのは，現実世界ではなく，認識世界においてである．このことから部分性の論理で扱われる命題Pは現実世界に対し蓋然的な命題になる．したがって部分性の論理では，ある命題の真偽を次のように考える．

命題Aが真：命題Aが事態に対応し合致する認識世界が現実世界に一致する．

命題Aが偽：命題Aが事態に対応し合致する認識世界が現実世界のいかなる部分ともならない．

いま現実世界を集合として捉え，さらに命題の真偽を言い直す．ただし現実世界に対応する集合をXで，また命題Aに対する経験世界O_A，認識世界O'_Aで表す．

命題Aが真：$O'_A=X$

命題Aが偽：$O'_A=\phi$

部分性の論理では，各formulaに対する認識世界に対応する集合を，各formulaに対する真理値とする．

さらに経験世界，認識世界間の関係として，"認識世界は経験世界はより広範な世界である"を挙げた．この関係は次の包含関係が成立することである．

$O_A \subseteq O'_A$.

さてここでO'_aをO_aに対応づける写像Fを考えれば，Fは経験世界と認識世界との関係を与える．本研究ではFを閉包演算Clとし，経験世界と認識世界との数学的関係を与える．経験世界O_aに対する認識世界を閉包$Cl(O_a)$と捉える．以下に閉包演算の定義を示す．

① $Cl(\phi)=\phi$,
② $O \subseteq Cl(O)$,
③ $Cl(O \cup O')=Cl(O) \cup Cl(O')$,
④ $Cl(Cl(O))=Cl(O)$,

以上に示した閉包の性質①～④は，以下の①'～④'で示される経験世界，認識世界間の関係を表していると考えられる．

①' 経験世界が空な世界であるならば，対応する認識世界もまた空な世界である，
②' 認識世界は経験世界を含む，
③' 認識世界はその部分を成す認識世界から構成できる，
④' 認識世界はそれ自身で閉じている．

以上，現実世界を集合として，また認識世界を現実世界に対応する集合に導入さる位相としてモデル化した．

3.2 言語モデル

言語モデル(以下単にモデルという)Mとは三つ組$<L, V, C>$である．ここでLは先に導入した命題論理言語，Cは真理値の集合，またVはLに登場する記号表現の解釈を与える付値関数($V: L \to C$)である．以下V, Cを定義する．

定義2：真理値集合C

真理値集合Cとは位相空間$X(\neq\phi)$の閉集合(closed set)全体の族である．Cの各要素である閉集合は，formulaに対する真理値を表す．Cは次の性質を持つ．

① $X \in C, \phi \in C$.
② Cに属する任意個の集合の共通部分が，Cに属す．
$O_a \in W\,(a \in A)$ならば$\cap_{a \in A} O_a \in C$.
③ Cに属する有限個の集合の和が，Cに属す．
$O_i \in C\,(i=1,2,\ldots,n)$ならば$O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_n \in C$.

定義4：付値関数V

Lの論理式に対する付値を与える付値関数Vを以下に示すように再帰的に定義する．

① αが$\neg\beta$ならば，
$V(\alpha)=Cl(X-V(\beta))$,
② αが$\wedge_{i \in I}\beta_i$ならば，
$V(\alpha)=\cap_{i \in I} V(\beta_i)$,
③ αが$\vee_{i \in I}\beta_i$ならば，
$V(\alpha)=Cl(\cup_{i \in I} V(\beta_i))$,
④ αが$\beta \to \gamma$ならば，
$V(\alpha)=Cl((X-V(\beta)) \cup V(\gamma))$,

また式$\Gamma \Rightarrow \Delta$の左辺$\Gamma$(右辺$\Delta$)の指示する真理値を【$\Gamma$】(【$\Delta$】)で表せば，式$\Gamma \Rightarrow \Delta$の意味内容は，

【Γ】$\subseteq$【Δ】

である．このように式$\Gamma \Rightarrow \Delta$は真理値【$\Gamma$】，【$\Delta$】，言い換えれば，$\Gamma, \Delta$に対応する認識世界間の関係を表す．ここで【$\Gamma$】$=\cap_{A \in \Gamma} V(A)$，【$\Delta$】$=Cl(\cup_{B \in \Delta} V(B))$で定義する．特に$\Gamma$が空列である場合，

$V(\Gamma)=X$,

また，Δが空列である場合，

$V(\Delta)=\phi$

と定義する．ある仮定Γを基に推論される結論Δは，その真理値が閉包$Cl(\cup_{B \in \Delta} V(B))$として与えられる．

3.3 妥当性

"αがモデルMで妥当である(妥当でない)"ことを$M \vDash \alpha$($M \dashv \alpha$)で表せば，先に述べた命題の真偽に対する解釈から次式で定義する．ただしV_MはモデルMでの付値関数とする．

$M \vDash \alpha$：モデルMで$V_M(\alpha)=X$,
$M \dashv \alpha$：モデルMで$V_M(\alpha)=\phi$.

また任意のモデルMで$M \vDash \alpha$($M \dashv \alpha$)が成立する場合，Mを略し$\vDash\alpha$($\dashv\alpha$)と表す．$\vDash\alpha$が成立する場合αを恒真式，また$\dashv\alpha$が成立する場合のαを矛盾式と呼ぶ．$\vDash$，$\dashv$に関し次のことが成立する．

任意のformula αに対し，$\vDash\alpha$かつ$\dashv\alpha$であることはない．

$M \vDash \alpha$と$M \dashv \alpha$が共に成立する場合，"αはモデルMで矛盾する"と言う．formula αおよび$\neg\alpha$の真理値として，Cに属す閉集合が与えられる．このことから，

任意のformula αに対し，$\vDash\alpha(\dashv\alpha)$ならば$\dashv\neg\alpha(\vDash\neg\alpha)$

は成立するが，

任意のformula αに対し，$\models\alpha(\dashv\alpha)$ではないならば$\dashv\neg\alpha(\models\neg\alpha)$

が成立しない．なぜなら各formulaは真理値としてXのある閉部分集合を取るため，

任意のformula αに対し，$\models\alpha$または$\dashv\alpha$である．

とはいえず，したがって

任意のformula αに対し，$\models\alpha(\dashv\alpha)$ではないならば$\dashv\alpha(\models\alpha)$

が成立しないためである．このように部分性の論理では真偽は完全に逆な関係ではない．

定理１:健全性

もし$\vdash s$ならば$\models s$である．

証明）

Γ, Δ, Λは任意のformulaの有限列を，またα, βは任意のformulaを表す．ただしΓはたかだか一つのformulaしか含まないものとする．$\alpha\Rightarrow\alpha$は$V(\alpha)\subseteq Cl(V(\alpha))$より明らかに成立する．各推論図式の上式では定理が成立しているものと仮定し，各推論図式での下式が成立していることを証明する．

$$\mathrm{w}\Rightarrow\ \frac{\Rightarrow\Delta}{\alpha\Rightarrow\Delta}$$

いまWをXの部分集合，Uを閉集合とすればU⊆Xより，推論図式w⇒は次の推論に相当し明らかに成立する．

$$\frac{X\subseteq \mathrm{W}}{\mathrm{U}\subseteq \mathrm{W}}$$

$$\Rightarrow\mathrm{w}\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\alpha}$$

WをXの部分集合，U,Vを閉集合とすれば，推論図式⇒wは次の推論に相当し，閉包の性質より明らかに成立する．

$$\frac{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W})}{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W}\cup\mathrm{U})}$$

$$\Rightarrow\mathrm{e}\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\beta,\alpha,\Pi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\alpha,\beta,\Pi}$$

$\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2$を$X$の部分集合，$\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2$,Vを閉集合とすれば，推論図式⇒eは次の推論に相当し，明らかに成立する．

$$\Rightarrow\mathrm{e}\ \frac{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W}_1\cup\mathrm{U}_1\cup\mathrm{U}_2\cup\mathrm{W}_2)}{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W}_1\cup\mathrm{U}_2\cup\mathrm{U}_1\cup\mathrm{W}_2)}$$

$$\Rightarrow\mathrm{c}\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta,\alpha,\alpha,\Pi}{\Gamma\Rightarrow\Delta,\alpha,\Pi}$$

$\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2$を$X$の部分集合，U,Vを閉集合とすれば，推論図式⇒cは次の推論に相当し，明らかに成立する．

$$\frac{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W}_1\cup\mathrm{U}\cup\mathrm{U}\cup\mathrm{W}_2)}{\mathrm{V}\subseteq Cl(\mathrm{W}_1\cup\mathrm{U}\cup\mathrm{W}_2)}$$

$$\mathrm{cut}\ \frac{\Gamma\Rightarrow\Delta_i,\alpha\ (i\in\mathrm{I})\qquad \alpha\Rightarrow\Lambda}{\Gamma\Rightarrow\ldots,\Delta_i,\ldots,\Lambda}$$

V_i (i∈I), V'をXの部分集合，U,Wを閉集合とすれば，推論図式cutは次の推論に相当する．

$$\frac{\mathrm{W}\subseteq Cl(\mathrm{V}_i\cup\mathrm{U})\ (i\in\mathrm{I})\qquad \mathrm{U}\subseteq Cl(\mathrm{V'})}{\mathrm{W}\subseteq Cl((\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i)\cup\mathrm{V'})}$$

仮定より任意のi∈Iについて，

$$\mathrm{W}\subseteq Cl(\mathrm{V}_i\cup\mathrm{U})=Cl(\mathrm{V}_i)\cup Cl(\mathrm{U})=\mathrm{V}_i\cup Cl(\mathrm{U})$$

よって，

$$\mathrm{W}\subseteq\cup_{i\in\mathrm{I}}(\mathrm{V}_i\cup Cl(\mathrm{U}))=\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i\cup Cl(\mathrm{U})$$

また，$\mathrm{U}\subseteq Cl(\mathrm{V'})$より，

$$Cl(\mathrm{U})\subseteq Cl(Cl(\mathrm{V'}))=Cl(\mathrm{V'})$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{W}&\subseteq\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i\cup Cl(\mathrm{U})\\&\subseteq\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i\cup Cl(\mathrm{V'})\\&\subseteq Cl(\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i)\cup Cl(\mathrm{V'})\\&=Cl((\cup_{i\in\mathrm{I}}\mathrm{V}_i)\cup\mathrm{V'})\end{aligned}$$

よって成立する．

$$\neg\Rightarrow\ \frac{\Rightarrow\Delta,\alpha}{\neg\alpha\Rightarrow\Delta}$$

VをXの部分集合，Uを閉集合とすれば，推論図式¬⇒は次の推論に相当する．

仮定より，

$$\frac{X \subseteq Cl(V \cup U)}{Cl(X-U) \subseteq Cl(V)}$$

$X \subseteq Cl(V \cup U) = Cl(V) \cup Cl(U) = Cl(V) \cup U$

よって,

$X - U \subseteq (Cl(V) \cup U) - U$

よって,閉包の性質より,

$Cl(X-U) \subseteq Cl((Cl(V) \cup U) - U)$

一方,

$(Cl(V) \cup U) - U \subseteq Cl(V)$

よって,閉包の性質より,

$Cl((Cl(V) \cup U) - U) \subseteq Cl(Cl(V)) = Cl(V)$

よって

$Cl(X-U) \subseteq Cl(V)$

以上より成立する.

$$\Rightarrow\neg\ \frac{\alpha \Rightarrow \Delta}{\Rightarrow \Delta, \neg\alpha}$$

VをXの部分集合,Uを閉集合とすれば,推論図式$\Rightarrow\neg$は次の推論に相当する.

$$\frac{U \subseteq Cl(V)}{X \subseteq Cl(V \cup Cl(X-U))}$$

仮定$U \subseteq Cl(V)$より,

$U \cup Cl(X-U) \subseteq Cl(V) \cup Cl(X-U)$

また,$X - U \subseteq Cl(X-U)$より,

$U \cup (X-U) \subseteq U \cup Cl(X-U)$

また,$X = U \cup (X-U)$

よって,

$$\begin{aligned} X &\subseteq U \cup Cl(X-U) \\ &\subseteq Cl(V) \cup Cl(X-U) \\ &= Cl(V) \cup Cl(Cl(X-U)) \\ &= Cl(V \cup Cl(X-U)) \end{aligned}$$

よって成立する.

$$\wedge\Rightarrow \frac{\alpha \Rightarrow \Delta}{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \Delta} \quad \text{および} \quad \frac{\beta \Rightarrow \Delta}{\alpha\wedge\beta \Rightarrow \Delta}$$

VをXの部分集合,U_1, U_2を閉集合とすれば,推論図式$\wedge\Rightarrow$は次の推論に相当する.

$$\frac{U_1 \subseteq Cl(V)}{U_1 \cap U_2 \subseteq Cl(V)} \qquad \frac{U_1 \subseteq Cl(V)}{U_2 \cap U_1 \subseteq Cl(V)}$$

これらは明らかに成立する.

$$\Rightarrow\wedge\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha_i \quad (i \in I)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \wedge_{i \in I} \alpha_i}$$

WをXの部分集合,$U_i (i \in I)$,Vを閉集合とすれば,推論図式$\Rightarrow\wedge$は次の推論に相当する.

$$\frac{V \subseteq Cl(W \cup U_i) \quad (i \in I)}{V \subseteq Cl(W \cup \cap_{i \in I} U_i)}$$

仮定より任意の$i (\in I)$に対し$V \subseteq Cl(W \cup U_i)$

よって,

$$\begin{aligned} V &\subseteq \cap_{i \in I} Cl(W \cup U_i) \\ &= \cap i \in I(Cl(W) \cup Cl(U_i)) \\ &= Cl(W) \cup \cap_{i \in I} Cl(U_i) \\ &= Cl(W) \cup \cap_{i \in I} U_i \\ &= Cl(W) \cup Cl(\cap_{i \in I} U_i) \\ &= Cl(W \cup \cap_{i \in I} U_i) \end{aligned}$$

よって成立する.

$$\vee\Rightarrow \frac{\alpha_i \Rightarrow \Delta \quad (i \in I)}{\vee_{i \in I} \alpha_i \Rightarrow \Delta}$$

VをXの部分集合,任意の$i \in I$に対しU_iを閉集合とすれば,推論図式$\vee\Rightarrow$は次の推論に相当する.

$$\frac{U_i \subseteq Cl(V) \quad (i \in I)}{Cl(\cup_{i \in I} U_i) \subseteq Cl(V)}$$

仮定より任意の$i (\in I)$に対し$U_i \subseteq Cl(V)$, よって,

$\cup_{i \in I} U_i \subseteq Cl(V)$

よって,

$Cl(\cup_{i \in I} U_i) \subseteq Cl(Cl(V)) = Cl(V)$

したがって成立する.

$$\Rightarrow\vee \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha\vee\beta} \quad \text{および} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \alpha\vee\beta}$$

VをXの部分集合, U_1,U_2,Wを閉集合とすれば, 推論図式$\Rightarrow\vee$は次の推論に相当する.

$$\frac{W\subseteq Cl(V\cup U_1)}{W\subseteq Cl(V\cup Cl(U_1\cup U_2))}$$

$$\frac{W\subseteq Cl(V\cup U_2)}{W\subseteq Cl(V\cup Cl(U_1\cup U_2))}$$

$$\begin{aligned} Cl(V\cup Cl(U_1\cup U_2)) &= Cl(V)\cup Cl(Cl(U_1\cup U_2)) \\ &= Cl(V)\cup Cl(U_1\cup U_2) \\ &= Cl(V\cup(U_1\cup U_2)) \\ &\supseteq Cl(V\cup U_1) \end{aligned}$$

同様に,

$Cl(V\cup Cl(U_1\cup U_2))\supseteq Cl(V\cup U_2)$

よって仮定より,

$W\cup Cl(V\cup Cl(U_1\cup U_2)))$

が成立する.

$$\rightarrow\Rightarrow\frac{\Rightarrow\Lambda,\alpha \qquad \beta\Rightarrow\Delta}{\alpha\rightarrow\beta\Rightarrow\Delta,\Lambda}$$

いまV_1,V_2をXの部分集合, U_1,U_2を閉集合とすれば, 推論図式$\rightarrow\Rightarrow$は次の推論に相当する.

$$\frac{X\subseteq Cl(V_1\cup U_1) \qquad U_2\subseteq Cl(V_2)}{Cl((X-U_1)\cup U_2)\subseteq Cl(V_2\cup V_1)}$$

仮定$X\subseteq Cl(V_1\cup U_1)$より,

仮定$X\subseteq Cl(V_1\cup U_1)$より

$X\subseteq Cl(V_1\cup U_1)=Cl(V_1)\cup Cl(U_1)$,

よって, $X-Cl(U_1)\subseteq Cl(V_1)$,

閉包の性質より,

$X-Cl(U_1)=X-U_1$,

よって以上から,

$Cl(X-U_1)\subseteq Cl(Cl(V_1))=Cl(V_1)$,

一方, 仮定$U_2\subseteq Cl(V_2)$および閉包の性質より,

$Cl(U_2)\subseteq Cl(Cl(V_2))=Cl((V_2)$,

以上から,

$Cl((X-U_1))\cup Cl(U_2)\subseteq Cl(V_1)\cup Cl(V_2)$

よって閉包の性質より,

$Cl((X-U_1)\cup U_2)\subseteq Cl(V_1\cup V_2)$

よって下式が成立する.

$$\Rightarrow\rightarrow\frac{\alpha\Rightarrow\Lambda,\beta}{\Rightarrow\Delta,\alpha\rightarrow\beta}$$

VをXの部分集合, U_1,U_2を閉集合とすれば, 推論図式$\rightarrow\Rightarrow$は次の推論に相当する.

$$\frac{U_1\subseteq Cl(V\cup U_2)}{X\subseteq Cl(V\cup Cl((X-U_1)\cup U_2))}$$

仮定$U_1\subseteq Cl(V\cup U_2)$

および$U_1\cup(X-U_1)=X$より,

$X=U_1\cup(X-U_1)\subseteq Cl(V\cup U_2)\cup(X-U_1)$

よって,

$X\subseteq Cl(V\cup U_2)\cup(X-U_1)$

閉包の性質から,

$$\begin{aligned} X &= Cl(X) \\ &\subseteq Cl(Cl(V\cup U_2)\cup(X-U_1)) \\ &= Cl(Cl(V\cup U_2))\cup Cl(X-U_1)) \\ &= Cl(V\cup U_2))\cup Cl(X-U_1)) \\ &= (Cl(V)\cup Cl(U_2))\cup Cl(X-U_1) \end{aligned}$$

分配律から,

$=Cl(V)\cup(Cl(U_2)\cup Cl(X-U_1))$

閉包の性質から,

$$\begin{aligned} &= Cl(V)\cup Cl(U_2\cup(X-U_1)) \\ &= Cl(V)\cup Cl(Cl(U_2\cup(X-U_1))) \\ &= Cl(V\cup Cl(U_2\cup(X-U_1))) \end{aligned}$$

よって,

$X\subseteq Cl(V)\cup Cl(U_2\cup(X-U_1))$

以上より健全性が証明された.

4. 考察

部分性の論理の顕著な特徴を表す例として, $\neg A\wedge A$が恒偽ではない点がある. このことは命題Aの表す認識世界$O'_A\neg A$に対する認識世界$O'_{\neg A}$とが明確に分離されていず, 認識世界$O'_{\neg A}$とO'_Aが互いに重なる範囲を持つ($O'_A\cap O'_{\neg A}$が空でない)ことを表す. これは命題が対応する事態が成立する可能性も, また成立しない可能性もあるという両面(bilateral)可能性(偶然性)が否定できないことを表すと解釈できる.

以上述べてきたことは, 現実世界に関する知識とは, 現実世界において成立する事態に対応し, かつ合致する必要があるとするならば, 人間が現実世界に関する持つ知識は次の二つの特徴を持つと考えられる. 第

一に,人間が現実世界に関して記述した知識は,現実世界の部分である範囲でしか保証されない.第二に現実世界の部分である範囲でしか保証されないにも関わらず,人間はその知識を観察により保証された範囲を含むより広範な部分で成立する知識と解釈する.第一の特徴が生じた原因は,人間の(現実世界に対する)観察能力の有限性である.このために第二の特徴である蓋然的な推論を行う必要があった.さらに本研究で挙げた推論では,現実世界の部分から得た知識を用い,現実世界全体において成立する知識を推論する.つまり帰納的な推論を提案している.これは我々は現実世界に関する知識を単に現実世界での事実の記述と見ているのではなく,未だ観察されていない部分に対する仮説また説明として用いていると考えられるからである.

同様に不完全な情報下での推論を行う論理として直観主義論理がある.直観主義論理では排中律を

我々人間の有限性は,知識について考えた場合,現実世界に対する観察能力だけに現れるのではない.さらに記述能力にも現れる.我々が現実世界の知識の記述に用いる言語に登場する原子記号は明らかに有限個ではない.したがって例えば命題論理言語であれば,その原子文全てに対する真理値を与える必要がある.つまり付値関数Vは言語に対し,全関数であることが要求される.しかし人間には,その有限性から困難である.

いま本研究で問題にした観察能力の有限性を原因とする知識の部分性を"質的部分性"と呼び,また記述能力の有限性を原因とする部分性を"量的部分性"と呼ぶ.例えば鳥に関する知識この量的部分性に関しては,**Landman** (3),(4) および**Veltman** (5) らが問題にしている.今後はこの点での部分性も問題にする必要がある.

謝辞

国際情報社会科学研究所小口所長の日頃の御指導に深謝します.

[参考文献]

(1)Hughes, G,E.& Cresswell, M.J.(1968):An Introduction to Modal Logic, Methuen.

(2)Hintikka, J.(1969):Models for Modalities, D. Reidel.

Kleene, S.C.(1952):Introduction to Metamathematics, North-Holland.

(3)Landman, Fred(1985):"The realist theory of meaning," Linguistics and Philosophy 8, 35-51.

(4)Landman, Fred(1986):Towards a theory of information :the status of partial objects in semantics, Foris, Dordrecht.

(5)Veltman, Frank(1981):"Data semantics," in J.A.G. Groenendijk, T.M.V. Janssen, and M.B.J. Stokhof(eds.), Formal methods in the study of language, Mathematical Center Tracts 136, Mathematisch Centrum, Amsterdam, pp. 541-565.