

超立方体グラフの幅最適な線形配置

中野 浩嗣⁺ 陳 暉⁺ 増澤 利光⁺⁺

萩原 兼一⁺ 都倉 信樹⁺

⁺大阪大学基礎工学部

⁺⁺大阪大学情報処理教育センター

あらまし グラフの線形配置とは、頂点を直線上にならべ、辺をその上に層状に配置したものである。本稿では、 d 次元超立方体グラフの層数（幅という）に関して最適な線形配置を示す。そのために、まず、 $\lfloor 2n/3 \rfloor$ (n は頂点数)の幅をもつ線形配置を示す。そして、 $\lfloor 2n/3 \rfloor$ より小さい幅の線形配置が存在しないことを証明する。

A Width Optimal Linear Layout for Hypercube Graph

Koji NAKANO⁺ Wei CHEN⁺ Toshimitsu MASUZAWA⁺⁺

Ken'ichi HAGIHARA⁺ Nobuki TOKURA⁺

⁺Faculty of Engineering Science, Osaka University

⁺⁺Education Center for Information Processing, Osaka University

⁺⁺⁺Toyonaka, Osaka 560, Japan

Abstract In a linear layout all the vertices are placed along a baseline, and the edges are routed along horizontal layers on one side of the baseline. This paper shows a width (i.e. the number of layers) optimal linear layout for the d -dimensional Hypercube graph. First, the linear layout of width $\lfloor 2n/3 \rfloor$ (n is the number of vertices) is presented. After that it is proved that there exists no linear layout of width less than $\lfloor 2n/3 \rfloor$.

1. まえがき

d次元超立方体グラフ (d-dimensional Hypercube graph ($d \geq 1$)) は、 2^d 個の頂点 $\{0, 1, \dots, 2^d - 1\}$ からなり、頂点を2進数で表したときに、そのハミング距離が1の頂点間を辺で接続したグラフである (図1)。超立方体グラフの形状をもつマルチプロセッサ型の並列計算機 (超立方体ネットワーク) は数多くつくられており⁽³⁾、高い性能を得ている。基礎理論の分野においても、種々の問題に対して、それを超立方体ネットワーク上で高速に解く並列アルゴリズムが知られており^{(1)・(4)}、ハードウェア技術が進歩した将来においても、有望なネットワークと考えられる。本稿では、超立方体グラフの線形配置について、議論する。

グラフ $G = (V, E)$ (V : 頂点集合, E : 辺集合) の線形配置 (linear layout) とは、 G の頂点を直線上に並べ、辺をその上に層状に配置したものである。(図2)。このときに、必要とする層数 (幅という) は、ネットワークを VLSI 上に実現するときの面積を与える重要な値である。本稿では、d次元超立方体グラフの幅最適な線形配置を示す。そのために、次の(1)と(2)を示す。但し、実数 r に対して、 r より大きくない最大の整数を $\lfloor r \rfloor$ 、 r より小さくない最小の整数を $\lceil r \rceil$ と表す。

- (1) (上界) d次元超立方体グラフの幅が $\lfloor 2n/3 \rfloor$ の線形配置を示す。
- (2) (下界) d次元超立方体グラフの線形配置で、幅が $\lfloor 2n/3 \rfloor$ より小さいものが存在しないことを証明する。

2. 諸定義

グラフ G は、空でない頂点の有限集合 V と、辺 $(V$

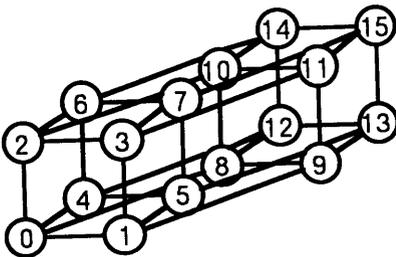


図1 4次元超立方体グラフ

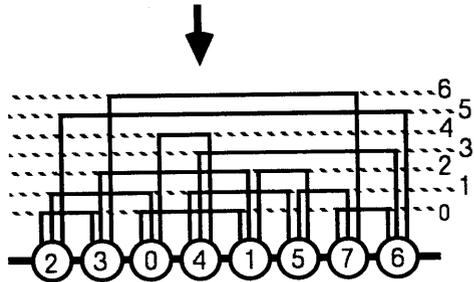
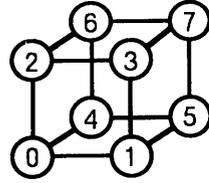


図2. グラフの線形配置の例

に属する頂点の非順序対) の集合 E により、 $G = (V, E)$ と表される。以下、特に断わらない限り、頂点数を n ($= |V|$) と表す。2つのグラフ $G = (V, E)$ と $G' = (V', E')$ に関して $V' \subseteq V$ 、 $E' \subseteq E$ が成り立つとき、 G' は G の部分グラフという。

グラフ $G = (V, E)$ の線形配置 (linear layout) を次に述べる頂点配置 π と辺配置 δ を用いて $L = (\pi, \delta)$ と表す。頂点配置 π は全単射であり、

$$\pi: \{0, \dots, n-1\} \rightarrow V$$

である。つまり、各 i ($0 \leq i \leq n-1$) について、 G の頂点 $\pi(i)$ が直線上の座標 i に位置することを意味する。

辺集合の族を 2^E としたとき、辺配置 δ は、

$$\delta: \{0, \dots, w-1\} \rightarrow 2^E$$

である。つまり、各 j ($0 \leq j \leq w-1$) について、 $\delta(j)$ は、第 j 層に配置される辺の集合を表す。 w をこの辺配置の幅と呼び $|\delta|$ と表す。これを線形配置 $L = (\pi, \delta)$ の幅ともいう。1つの辺を配置するのに複数の層を用いることも考えるが、本稿では扱わない。

[定義2.1] 次の2つの条件①と②を満たすとき、線形配置 (π, δ) は $G = (V, E)$ を実現するという。

- ① E の辺は δ のいずれかの層に配置される。つまり、

$$\bigcup_i \delta(i) = E$$

が成り立つ。

② δ の各層において辺が交差しない。つまり、各 i ($0 \leq i \leq w-1$) に対して、任意の2つの辺 $(u, v), (u', v') \in \delta(i)$ について $\pi(u)^{-1} < \pi^{-1}(v)$ かつ $\pi^{-1}(u') < \pi^{-1}(v')$ かつ $\pi^{-1}(u) < \pi^{-1}(u')$ ならば $\pi^{-1}(v) \leq \pi^{-1}(v')$ が成り立つ。□

2つの辺配置 δ' と δ'' に対して、辺配置 δ を次のように定める。

$$\begin{aligned} \delta(i) &= \delta'(i) \quad (0 \leq i \leq |\delta'| - 1) \\ &= \delta''(i) \quad (|\delta'| \leq i \leq |\delta'| + |\delta''| - 1) \end{aligned}$$

とする。つまり、 δ は δ' の上に δ'' を積んだものである。これを、 $\delta = \delta' + \delta''$ と表す。また、 Σ の記法を加算と同様に用いる。例えば、

$$\sum_{i=1}^4 \delta_i = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$$

である。

次に、グラフの切斷幅 (cut width)⁽²⁾ を定義する。グラフの切斷幅は、そのグラフを実現する線形配置の下界を与えるものである。グラフ $G = (V, E)$ の頂点配置 π において、座標が i 未満である頂点の集合を $V'(G, \pi, i)$ 、 i 以上である頂点の集合を $V''(G, \pi, i)$ と表す。つまり、

$$V'(G, \pi, i) = \{\pi(k) \mid 0 \leq k \leq i-1\}$$

$$V''(G, \pi, i) = \{\pi(k) \mid i \leq k \leq n-1\}$$

とする。そして、 $V'(G, \pi, i)$ の頂点と $V''(G, \pi, i)$ の頂点を接続する E の辺の集合を $C(G, \pi, i)$ と表す。つまり、

$$C(G, \pi, i) = \{(u, v) \in E \mid u \in V'(G, \pi, i), v \in V''(G, \pi, i)\}$$

である。これを用いて、グラフ G の切斷幅 $CWIDTH(G)$ を次のように定義する。

[定義 2. 2] グラフ G の切斷幅 $CWIDTH(G)$ は、

$$CWIDTH(G) = \min_{\pi} \max_{0 \leq i \leq n} |C(G, \pi, i)|$$

である。□

線形配置 $L = (\pi, \delta)$ がグラフ G を実現するとき、明らかに、 $|\delta| \geq CWIDTH(G)$ が成り立つ。

次に、 d 次元超立方体グラフを厳密に定義しておく。

[定義 2. 3] 各 d ($d \geq 1$) に対して、 d 次元超立方体

グラフ $HC_d = (V_d, E_d)$ は、次のように定義される。

$$V_d = \{0, 1, \dots, n-1\} \quad (n=2^d)$$

$$E_d = \{(i, j) \mid \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1\}$$

但し、 $i_0 \dots i_{d-1}$ は i の2進表現である。つまり、

$$i = i_d \times 2^{d-1} + i_{d-1} \times 2^{d-2} + \dots + i_1 \times 2^0$$

$$(0 \leq i_d, i_{d-1}, \dots, i_1 \leq 1)$$

である。□

d 次元超立方体の頂点数は $n=2^d$ 、辺数は $d2^{d-1}$ である。

4次元超立方体を図1に示す。

d 次元超立方体の頂点配置 L を次のように定める。

$$\text{各 } j \quad (0 \leq j \leq n-1) \text{ について、} L(j) = j$$

この頂点配置を自然配置と呼ぶ。

3. 超立方体グラフの線形配置の幅の上界

ここでは、超立方体グラフの幅が $\lfloor 2n/3 \rfloor$ の線形配置を具体的に示す。そのために、まず、幅が $n-1$ の線形配置を示す。そして、それを改善することにより、幅が $\lfloor 2n/3 \rfloor$ の線形配置を実現できることを示す。

HC_d の辺集合 E_d を、次のように互いに素な d 個の部分集合 $E_{d,1}, \dots, E_{d,d}$ に分割する (図3)。

$$E_{d,k} = \{(i, j) \in E_d \mid |i_k - j_k| = 1\}$$

HC_d の辺配置 $\delta_{d,1}, \dots, \delta_{d,d}$ および δ_d を次のように定める。

$$\delta_{d,i}(k) = \{(u, v) \in E_{d,i} \mid u_{i-1} \dots u_1 = k\}$$

($0 \leq k \leq 2^{i-1} - 1$)

$$\delta_d = \sum_{i=1}^d \delta_{d,i}$$

辺配置 δ_d の幅は、

$$|\delta_d| = \sum_{i=1}^d |\delta_{d,i}| = \sum_{i=1}^d 2^{i-1} = n-1$$

である。線形配置 $L = (I, \delta_d)$ は図4のようなになる。

[補題 3. 1] 幅 $n-1$ の線形配置 $L = (I, \delta_d)$ は HC_d を実現する。□

(証明) 線形配置 $(I, \delta_{d,i})$ が $HC_{d,i} = (V_d, E_{d,i})$ を実現することを示せばよい。各 $\delta_{d,i}$ が定義 2. 1 の条件①を満たすのは明らかである。そこで、条件②を満たすことを証明する。

同じ層に配置される任意の2つの $(u, v), (u', v') \in$

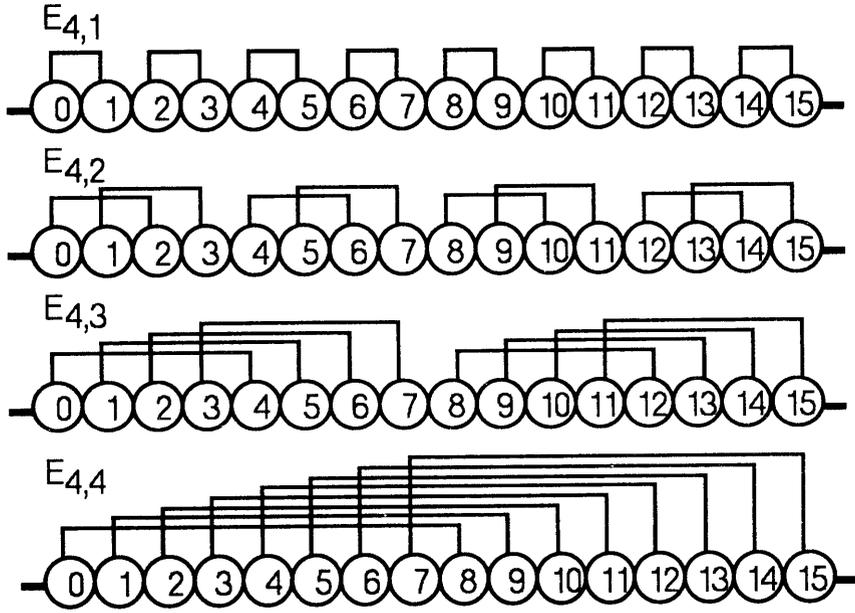


図3 辺集合 $E_{4,k}$

$\delta_{d+1}(k)$ について、一般性を失うことなく $u < v$, $u' < v'$, $u < u'$ が成り立つと仮定する。このとき、 $v \leq u'$ であることを証明すればよい。仮定より、 $u_i = u'_i = 0$, $v_i = v'_i = 1$, $u_{d+1} \cdots u_{i+1} < u'_{d+1} \cdots u'_{i+1}$ が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} v &= u_d \cdots u_{i+1} 1 u_{i-1} \cdots u_1 \\ &= u_d \cdots u_{i+1} 1 k_{i-1} \cdots k_1 \\ &= u_d \cdots u_{i+1} 1 u'_{i-1} \cdots u'_1 \\ &< u'_d \cdots u'_{i+1} 0 u'_{i-1} \cdots u'_1 = u' \end{aligned}$$

である。□

図4からわかるように $L = (I, \delta_d)$ には、辺を配置する領域にかなり余裕がある。そこで、次元が隣接する辺配置 $\delta_{d+1} + \delta_d$ の幅は $2^d + 2^{d-1}$ であるが、これを幅 2^d の辺配置に圧縮することを考える。各辺配置 δ'_{d+1} と δ'_d を次のように定める。但し、 $d' = \lfloor d/2 \rfloor$ とする。また、 $\bar{x} = 1-x$ とする。

$$\delta'_{d+1}(k) = \delta_{d+1}(k)$$

$$U \{ (u, v) \in E_{d+1} \mid u < v, \bar{u}_{i+1} = k_{i+1}, u_{i-1} \cdots u_1 = k_{i-1} \cdots k_1 \}$$

$$(0 \leq k \leq 2^d - 1)$$

$$\begin{aligned} \delta'_{d'} &= \sum_{i=1}^{d'} \delta'_{d+2^{i-1}+1} + \delta_{d+1} \quad (d \text{が奇数の時}) \\ &= \sum_{i=1}^{d'} \delta'_{d+2^i} \quad (d \text{が偶数の時}) \end{aligned}$$

このとき、 $\delta'_{d'}$ の幅は次のようになる。

$$|\delta'_{d'}| = \sum_{i=1}^{d'} |\delta'_{d+2^{i-1}+1}| + |\delta_{d+1}| \quad (d \text{が奇数の時})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d'} 2^{2^i-1} + 1 = \lfloor 2n/3 \rfloor$$

$$|\delta'_{d'}| = \sum_{i=1}^{d'} \delta'_{d+2^i} \quad (d \text{が偶数の時})$$

$$\leq \sum_{i=1}^{d'} 2^{2^i-1} = \lfloor 2n/3 \rfloor$$

線形配置 $L' = (I, \delta'_{d'})$ (図5)に関して、次の補題3. 2が成り立つ。

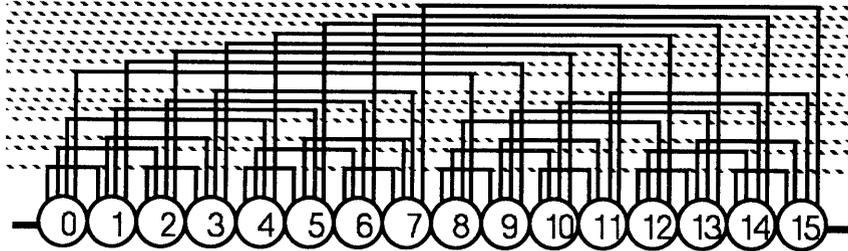


図4 線形配置 $L=(I, \delta_4)$

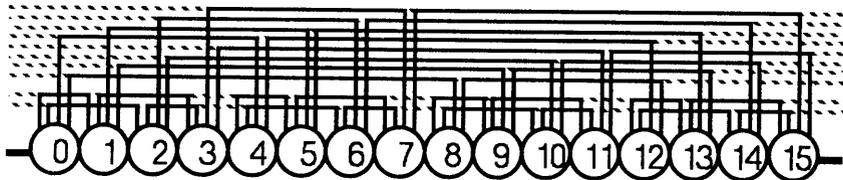


図5 線形配置 $L=(I, \delta'_4)$

[補題3. 2] 幅 $\lfloor 2n/3 \rfloor$ の線形配置 $L'=(I, \delta'_d)$ は $H C_d$ を実現する。 □
 (証明) 線形配置 (I, δ'_d) が $H C'_d = (V_d, E_{d,1} \cup E_{d,2})$ を実現することを示せばよい。定義2. 1の条件①を満たすのは明らかである。条件②を満たすことを証明する。同じ層に配置される任意の2つの辺 $(u, v), (u', v') \in \delta'_d(k)$ について、次の3つの場合をわけて考える。

- (1) $(u, v), (u', v') \in E_{d,1}$ の場合
 - (2) $(u, v), (u', v') \in E_{d,2}$ の場合
 - (3) $(u, v) \in E_{d,1}, (u', v') \in E_{d,2}$ の場合
- (1)と(2)の場合には補題3. 1の証明より条件②が成り立つのは明らかである。よって、(3)の場合のみ証明する。一般性を失うことなく $u < v, u' < v'$ と仮定する。さらに、次の2つの場合(3-1)と(3-2)にわける。
 (3-1) $u < u'$ のとき、 $v \leq u'$ であることを証明すればよい。
 $u = u_d \cdots u_{i+2} 0 u_{i+1} \cdots u_1$
 $u' = u'_d \cdots u'_{i+1} 0 u'_{i+1} \cdots u'_1$
- である。さらに、 $u < u'$ であるので、次の[1]と[2]の2つの場合が考えられる。

- [1] $u_d \cdots u_{i+2} < u'_d \cdots u'_{i+2}$
 - [2] $u_d \cdots u_{i+2} = u'_d \cdots u'_{i+2}$ かつ $u'_{i+1} = 1$
- [1]のとき、明らかに $v \leq u'$ が成り立つ。
 [2]のとき、

$$\begin{aligned}
 v &= u_d \cdots u_{i+2} 1 u_{i+1} \cdots u_1 \\
 &= u'_d \cdots u'_{i+2} 1 u_{i+1} \cdots u_1 \\
 &= u'_d \cdots u'_{i+2} 1 u_{i+1} u'_{i+1} \cdots u'_1 \\
 &= u'_d \cdots u'_{i+1} u_{i+1} u'_{i+1} \cdots u'_1 \\
 &\quad (\because u'_{i+1} = 1) \\
 &= u'_d \cdots u'_{i+1} 0 u'_{i+1} \cdots u'_1 \\
 &\quad (\because u'_{i+1} = k_i = u_{i+1}) \\
 &= u'
 \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $v \leq u'$ が成り立つ。
 (3-2) $u' < u$ のとき、 $v' \leq u$ であることを証明すればよい。(3-1)と同様に、次の2つの場合が考えられる。

- [1] $u'_d \cdots u'_{i+2} < u_d \cdots u_{i+2}$
 - [2] $u'_d \cdots u'_{i+2} = u_d \cdots u_{i+2}$ かつ $u'_{i+1} = 0$ かつ $u_i = 1$
- [1]のとき、明らかに $v' \leq u$ が成り立つ。
 [2]のとき、

$$\begin{aligned}
 v' &= u'_d \cdots u'_{i+1} 1 u'_{i+1} \cdots u'_1 \\
 &= u_d \cdots u_{i+2} u'_{i+1} 1 u_{i+1} \cdots u_1
 \end{aligned}$$

が成り立つ。実際、 $i = \lceil n/3 \rceil$ のとき、つまり、 i の 2 進表現が

$$\begin{aligned} i &= 10101 \cdots 010110 \quad (d \text{ が偶数}) \\ &= 10101 \cdots 01011 \quad (d \text{ が奇数}) \end{aligned}$$

のとき、

$$|C_d(I, i)| = \lfloor 2n/3 \rfloor$$

である。よって、

$$\max_{0 \leq i \leq n} |C_d(I, i)| = C_d(I, \lceil n/3 \rceil) = \lfloor 2n/3 \rfloor$$

が成り立つ。 \square

E_d の部分集合 $E_d'(\pi, i)$ 、 $E_d''(\pi, i)$ を次のように決める。

$$\begin{aligned} E_d'(\pi, i) &= \{(u, v) \in E_d \mid u, v \in V_d'(\pi, i)\} \\ E_d''(\pi, i) &= \{(u, v) \in E_d \mid u, v \in V_d''(\pi, i)\} \end{aligned}$$

このとき、

$$E_d = E_d'(\pi, i) + E_d''(\pi, i) + C_d(\pi, i)$$

が成り立つ。よって、切断幅の定義より、

$$\begin{aligned} \text{CWIDTH}(HC_d) &= \min_{\pi} \max_{0 \leq i \leq n} (|E_d| - |E_d'(\pi, i) + E_d''(\pi, i)|) \\ &= |E_d| - \max_{\pi} \min_{0 \leq i \leq n} (|E_d'(\pi, i) + E_d''(\pi, i)|) \\ &\geq |E_d| - \min_{0 \leq i \leq n} \max_{\pi} |E_d'(\pi, i) + E_d''(\pi, i)| \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$S_d(i) = \max_{\pi} |E_d'(\pi, i)| \quad (= \max_{\pi} |E_d''(\pi, n-i)|)$$

とすると、

$$\begin{aligned} \text{CWIDTH}(HC_d) &\geq |E_d| - \min_{0 \leq i \leq n} (S_d(i) + S_d(n-i)) \end{aligned}$$

となる。よって、 $S_d(i)$ を求めれば、 d 次元超立方体グラフの切断幅の下界が求まる。そこで、次の補題 4.3 が成り立つことを証明する。

[補題 4.3] 任意の i ($0 \leq i \leq n$) について、

$S_d(i) = |E_d'(I, i)|$ および $S_d(n-i) = |E_d''(I, i)|$ が成り立つ。 \square

$S_d(i) \geq |E_d'(I, i)|$ および $S_d(n-i) \geq |E_d''(I, i)|$ は、定義より明らかである。よって、 $S_d(i) \leq |E_d'(I, i)|$ および $S_d(n-i) \leq |E_d''(I, i)|$ が成り立つことを示せばよい。これを次のように補題 4.4 ~ 4.6 を用いて証明する。補題 4.4 では、ある漸化式で定義される関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ (\mathbb{N} は自然数集合、 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup$

$\{0\}$) について、 $|E_d'(I, i)| = f(i)$ および $|E_d''(I, i)| = f(n-i)$ が成り立つことを示す。補題 4.5 では、別の漸化式で定義される関数 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ について、 $S_d(i) \leq g(i)$ が成り立つことを示す。そして、補題 4.6 では、任意の i ($i \geq 1$) について $f(i) = g(i)$ であることを示す。

[補題 4.4] 関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 \\ f(j) &= f(\lceil j/2 \rceil) + f(\lfloor j/2 \rfloor) + \lfloor j/2 \rfloor \end{aligned}$$

このとき、各 j ($0 \leq j \leq n$) について、 $|E_d'(I, j)| = f(j)$ および $|E_d''(I, j)| = f(n-j)$ が成り立つ。

(証明) まず、 $|E_d'(I, j)| = f(j)$ を j に関する帰納法で証明する。

基底段階 $j=1$ のとき、明らかに成り立つ。

帰納段階 $j \leq k-1$ (但し、 $k \geq 2$) のとき成り立つと仮定する。 $j=k$ のときにも成り立つことを証明する。

$E_d'(I, k)$ を次の 3 つの集合に分割する (図 6)。

$$E_d^-(k) = \{(u, v) \in E_d \mid 0 \leq u < v \leq k-1, u_1 = v_1 = 0\}$$

$$E_d^+(k) = \{(u, v) \in E_d \mid 0 \leq u < v \leq k-1, u_1 = v_1 = 1\}$$

$$E_d^0(k) = \{(u, v) \in E_d \mid 0 \leq u < v \leq k-1, u_1 = 0, v_1 = 1\}$$

任意のグラフ $G = (V, E)$ について、 V を定義域とする任意の写像 ψ に対して、

$$\psi(E) = \{(\psi(u), \psi(v)) \mid (u, v) \in E\}$$

と表すことにする。 $\psi(k) = k_0 \cdots k_2 = \lfloor k/2 \rfloor$ とすると、

$$\begin{aligned} \psi(E_d^-(k)) &= \{(u_0 \cdots u_2, v_0 \cdots v_2) \mid 0 \leq u < v \leq k-1, \\ &\quad u_1 = v_1 = 0, (u, v) \in E_d\} \\ &= \{(u, v) \in E_d \mid 0 \leq u < v \leq \lfloor k/2 \rfloor - 1\} \\ &= E_d(I, \lfloor k/2 \rfloor) \end{aligned}$$

である。同様に、 $\psi(E_d^+(k)) = E_d(I, \lfloor k/2 \rfloor)$ が成り立つ。したがって、

$$|E_d^-(k)| = |\psi(E_d^-(k))| = |E_d(I, \lfloor k/2 \rfloor)| = f(\lfloor k/2 \rfloor)$$

$$|E_d^+(k)| = |\psi(E_d^+(k))| = |E_d(I, \lfloor k/2 \rfloor)| = f(\lfloor k/2 \rfloor)$$

が成り立つ。また、 $|E_d^0(k)| = \lfloor k/2 \rfloor$ である。以上より、

$$\begin{aligned} |E_d(I, k)| &= |E_d^-(k)| + |E_d^+(k)| + |E_d^0(k)| \\ &= f(\lfloor k/2 \rfloor) + f(\lfloor k/2 \rfloor) + \lfloor k/2 \rfloor \end{aligned}$$

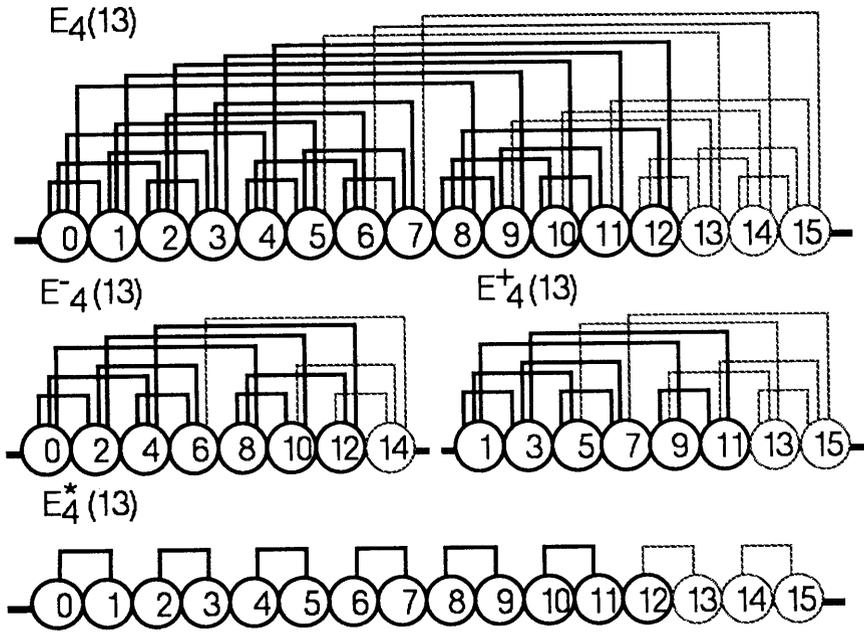


図6 $E_4(k)$ の分割

$= f(k)$
 が成り立つ。
 次に、 $|E_n''(I, j)| = f(n-j)$ であることを証明する。
 写像 ϕ を $\phi(j) = n-1-j$ とすると、
 $\phi(E_n''(I, j)) = E_n'(I, n-j)$
 が成り立つ。よって、
 $|E_n''(I, j)| = |E_n'(I, n-j)| = f(n-j)$
 である。 □
 [補題 4. 5] 関数 $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0$ を次のように定義する。
 $g(1) = 0$
 $g(j) = \max_{1 \leq i \leq j/2} (g(i) + g(j-i) + 1)$
 このとき、 $S_n(i) \leq g(i)$ が成り立つ。
 (証明) 補題 4. 5 を証明するには、任意の頂点配置 π に対して、 $|E_n'(\pi, i)| \leq g(i)$ が成り立つことを証明すればよい。グラフ $G_n'(\pi, i) = (V_n'(\pi, i), E_n'(\pi, i))$ は、 $H C_n = (V_n, E_n)$ の部分グラフである。よって、 $H C_n$ の任意の部分グラフ $G = (V, E)$

について、 $|E| \leq g(|V|)$ が成り立つことを証明すれば十分である。これを G の頂点数 $|V|$ に関する帰納法で証明する。
 基底段階 $|V| = 1$ のとき明らかに成り立つ。
 帰納段階 $|V| \leq k-1$ (但し、 $k \geq 2$) のとき成り立つと仮定する。 $|V| = k$ のときにも成り立つことを証明する。
 d 次元超立方体の次元 s ($1 \leq s \leq d$) を任意に選び、 V を次の2つの集合に分割する。
 $V = \{u \in V \mid u_s = 0\}$
 $V' = \{u \in V \mid u_s = 1\}$
 但し、 s は $V \neq \emptyset$ かつ $V' \neq \emptyset$ を満たすように選ぶものとする。 V と V' を用い、 E を次の3つの集合に分割する。
 $E = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V\}$
 $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$
 $E'' = \{(u, v) \in E \mid u \in V, v \in V'\}$
 $|V| = i$ とすると $|V'| = k-i$ が成り立つ。一般性を失うことなく $|V| \leq |V'|$ 、つまり $i \leq k/2$ と仮定する。

このとき、 $|V'| \leq |V| \leq k-1$ なので、帰納段階の仮定より、 $|E'| \leq g(i)$ 、 $|E''| \leq g(k-i)$ が成り立つ。また、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} E' &= \{(u,v) \in E \mid u \in V', v \in V'\} \\ &\subseteq \{(u,v) \in E \mid u \in V', \text{かつ次の①②を満たす}\} \\ \text{① } u_t &= v_t \ (t \neq s), \quad \text{② } u_s = 0, v_s = 1 \\ \text{したがって、} &|E'| \leq |V'| = i \text{ が成り立つので、} \\ |E| &= |E'| + |E''| + |E'''| \\ &\leq g(i) + g(k-i) + i \leq g(k) \end{aligned}$$

である。□
【補題 4. 6】各 j ($j \geq 1$) について、 $f(j) = g(j)$ が成り立つ。

(証明) 関数 f と g の定義より、明らかに各 j ($j \geq 1$) について $f(j) \leq g(j)$ が成り立つ。よって、 $f(j) \geq g(j)$ であることを証明する。このためには、任意の i ($1 \leq i \leq j/2$) について、 $f(j) \geq g(i) + g(j-i) + i$ が成り立つことを証明すれば十分である。これを j に関する帰納法で証明する。

基底段階 $j=1$ のとき、明らかに成り立つ。

帰納段階 $j \leq k-1$ のとき成り立つと仮定する。 $j=k$ のときにも成り立つことを証明する。つまり、 $f(k) \geq g(i) + g(k-i) + i$ が任意の i ($1 \leq i \leq k/2$) に対して成り立つことを証明する。次の4つの場合にわける。

- ① k が偶数、 i が偶数、② k が偶数、 i が奇数、
- ③ k が奇数、 i が偶数、④ k が奇数、 i が奇数

ここでは、④の場合についてのみ証明する。他の場合も同様に証明できる。

$$\begin{aligned} g(i) + g(k-i) + i &\leq f(i) + f(k-i) + i \quad (\because \text{帰納段階の仮定より}) \\ &= f((i+1)/2) + f((i-1)/2) + (i-1)/2 \\ &\quad + f((k-i)/2) + f((k-i)/2) + (k-i)/2 + i \\ &\quad (\because \text{関数 } f \text{ の定義より}) \\ &= f((i+1)/2) + f((k-i)/2) + (i+1)/2 \\ &\quad + f((k-i)/2) + f((i-1)/2) + (i-1)/2 + (k-1)/2 \\ &\leq g((i+1)/2) + g((k-i)/2) + (i+1)/2 \\ &\quad + g((k-i)/2) + g((i-1)/2) + (i-1)/2 + (k-1)/2 \\ &\quad (\because i \leq g(i) \geq f(i)) \\ &\leq f((k+1)/2) + f((k-1)/2) + (k-1)/2 \\ &\quad (\because \text{帰納段階の仮定より}) \\ &= f(k) \quad (\because \text{関数 } f \text{ の定義より}) \end{aligned}$$

よって、 $f(k) \geq g(i) + g(k-i) + i$ が成り立つ。□

以上で、補題 4. 3 の証明が完了した。次に補題 4. 2 と補題 4. 3 を用い補題 4. 1 を証明する。

(補題 4. 1 の証明)

$$\begin{aligned} \text{CWIDTH}(HC_\sigma) &\geq |E_\sigma| - \min_{0 \leq i \leq n} (S_\sigma(i) + S_\sigma(n-i)) \\ &= |E_\sigma| - \min_{0 \leq i \leq n} (|E_{\sigma'}(I, i)| + |E_{\sigma''}(I, i)|) \\ &\quad (\because \text{補題 4. 3}) \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} (|E_\sigma| - |E_{\sigma'}(I, i)| - |E_{\sigma''}(I, i)|) \\ &= \max_{0 \leq i \leq n} |C_\sigma(I, i)| \\ &= C_\sigma(I) = \lfloor 2n/3 \rfloor \quad (\because \text{補題 4. 2}) \quad \square \end{aligned}$$

以上で、補題 4. 1 の証明が完了した。

5. おわりに

本稿では、 d 次元超立方体の幅最適な線形配置を示した。今後の課題として、超立方体環グラフやシャフル・エクスチェンジンググラフ等に対する幅最適な線形配置を考えることがある。

謝辞 本研究の一部は、昭和63年度文部省科研費補助金奨励研究(A)、昭和63年度マツダ財団研究助成金、平成元年度稲盛財団研究助成金、平成元年度科研費補助金一般研究(B)および平成元年度科研費補助金一般研究(C)の補助のもとで行った。

文献

- (1) T.F.Chan and Y.Saad: "Multigrid algorithms on the Hypercube multiprocessor": IEEE trans. on comput., C-35, 11, pp. 969-977 (1986).
- (2) F.S.Makedon and I.H.Sudborough: "Minimizing width in linear layout", Lecture Notes in Computer Science 154 (ICALP83), pp. 478-490 (1983).
- (3) 富田真治: "並列計算機構成論", 昭晃堂(昭61).
- (4) F.P.Preparata and J.Vuillemin: "The cube-connected cycles: A versatile network for parallel computation", CACM, 24, 5, pp. 300-309 (1981).

盛光印刷所