Higher Order Categorical LogicのSubformula Propertyを持つDeductive System

榮　肅之
NTTコミュニケーション科学研究所
619-02　京都府相楽郡精華町光台2-2
araragi@cslab.kecl.ntt.jp

あらまし

トポスをセマンティクスとするMitchell-Bénabou流の高階直観主義論理、即ちhigher order categorical logicに対して、LJ流のdeductive systemを与え、そのセマンティクスに対して、このdeductive systemが完全であることを示す。このdeductive systemはW. Phoaが導入したNJ流のdeductive systemに基づくもので、typeの構成部分、termの構成部分、term間の等号部分、そしてLJ流の論理の部分の4つの部分からなる。論理の部分では、トポスについてのメタな論理的条件が処理され、termの構成部分と等号部分では、arrowの構成と可換図式が扱われる。従って、このdeductive systemはセマンティクスに密着したものになっている。また、LJと同様、このdeductive systemの論理部分でもcut規則が消去でき、高階直観主義論理のsemi-decidableな証明探索の部分をarrowの構成とその等号のチェックの問題に還元できる。

A Deductive System with Subformula Property for a Higher Order Categorical Logic

Tadashi Araragi
NTT Communication Science Laboratories
2-2 Hikaridai, Seika-cho, Soraku-gun,
Kyoto 619-02 Japan
araragi@cslab.kecl.ntt.jp

Abstract

In this paper, we propose a LJ-like deductive system for a higher order categorical logic and prove its completeness for the topos semantics. A higher order categorical logic was introduced by Mitchell and Bénabou as a higher order intuitionistic logic whose semantics is given in terms of topos theory. Our deductive system, based on W. Phoa's NJ-like deductive system, consists of four parts: construction of types, construction of terms, equations between terms and logic. In the logic part, we deal with conditions on the underlying topos, in the first-order LJ style. In the construction of terms and equations between them, we deal with arrows and commutative diagrams in the topos syntactically. Therefore, this deductive system is very coherent to the topos semantics. As in LJ systems, we can eliminate the cut rule from this deductive system. As a result, we can reduce the problem of semi-decidable proof search in higher order logics to that of construction of terms and equality check between them systematically.

1. はじめに

この論文では、高階直観主義論理の自動定理証明手続きを実現する第一歩として、古典的な集合概念を一般化したカテゴリー（即ちトポス）をセマンティクスとする高階直観主義論理に対して、subformula property を持つ deductive system 与える。

トポスをセマンティクスとする高階直観主義論理、即ちhigher order categorical logicは、Lawvere、Mitchell、Bénabou等によって導入された（[Mac]）。その後、[Fou]、[Boi]をはじめ、[Lam]、[Bel]などで、このセマンティクスにもとづいた集合概念をベースとした言語とその deductive system が与えられた。これらの言語はごくわずかの primitive から命題が構成されるという利点を持つものの、記述された命題とそのセマンティクスとの正確な対応を読み取ることが難しく、自分の意図した命題を記述することが困難である。またその deductive system は、cut 規則を含むため、効率のよい組織的な証明手続きを与えることが困難である。これに対し[Pho]では、これら従来のlanguage に変更を加え、セマンティクス、つまりトポスに、より密着した language と、自然演繹をベースとした deductive system が与えられている。

本論文では、Phoa 流の language を採用し、deductive systemに関してはsequent calculus をベースにした system を与える。この deductive system の特色は、まず、higher order categorical logic の証明を一階述語の論理の部分と arrow（term）の構成部分（即ち、term の構成規則とterm 間の等号規則）とに明確に区別して、論理の部分では、cut を除去した sequent calculus を、つまり subformula property を持つ deductive rule を与えていることである。これによって、自動定理証明における semi-decidable な探索の部分を arrow の構成という問題に帰着できた。これによってこの探索部分に対し、より組織的な考察が可能になると考えられる。

2. higher order categorical logic の言語と deductive system

2.1 higher order categorical logic の言語 $\mathcal{L}$

まず、本論文で扱う言語 $\mathcal{L}$ のアルファベット、つまり symbol の集合を以下のように与える。これをもとに type や term が定義される。

<type symbol>

・primitive type symbol: 1、Ω

・ground type symbol: A、 B、 C...

<function symbol>

f、g、h...

各 function symbol f に domain type、codomain type と呼ばれる $\mathcal{L}$ の type が与えられている。この type を各々 dom(f)、cod(f) と書く。

2.2 judgement

本論文で導入する higher order categorical logic では、type のwell definedness、term のwell definedness、term 間の等号、及び論理に対する 4 種類の judgement がある。導出可能なjudgementとは、以下に示される推論規則によって導かれるものを言う。これら 4 種類のjudgementは、推論規則を通じて互いに依存しあっている。

type の well definedness の judgement

type の well definedness の judgement とは

$(\Delta)\ \ X\ \ \mathrm{set}$

という形のstatementである。これは「前提Δのもとで、Xはtypeである」ことを意味する。ここでΔは formula（後で定義される）の有限列、Xは記号列である。この時、導出可能な judgement は以下の推論規則によって与えられる。

$$\frac{}{()\ \ 1\ \ \mathrm{set}} \qquad \frac{}{()\ \ \Omega\ \ \mathrm{set}} \qquad \frac{}{()\ \ A\ \ \mathrm{set}}$$

（ここで A は ground type）

$$\frac{(\Delta)\ \ X\ \ \mathrm{set} \qquad (\Delta)\ \ Y\ \ \mathrm{set}}{(\Delta)\ \ X \times Y\ \ \mathrm{set}}$$

$$\frac{(\Delta)\ \ X\ \ \mathrm{set} \qquad (\Delta)\ \ Y\ \ \mathrm{set}}{(\Delta)\ \ Y^{X}\ \ \mathrm{set}}$$

$$\frac{[x:X](\Delta)\ \ \phi(x):\Omega}{(\Delta)\ \ \{x:X \mid \phi(x)\}\ \ \mathrm{set}}$$

term の well definedness の judgement

term の well definedness の judgement とは

$$[\Gamma](\Delta)\quad t:X$$

という形のstatementである。これは「文脈Γ、前提Δのもとで、t は type X の term である」ことを表す。ここで文脈Γとは、変数 x_i、type A_i の対の有限列 $x_1:A_1,\ldots,x_n:A_n$ である。Δは formula の有限列、X は type、t は記号列である。type Ωのterm を特に formula と呼ぶ。この時、導出可能な judgement は以下の推論規則によって与えられる。

$$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad s:X\quad (\Delta)\quad Y\ \mathrm{set}}{[\Gamma,y:Y](\Delta)\quad s:X}$$

$$\frac{(\Delta)\quad X\ \mathrm{set}}{[x:X](\Delta)\quad x:X}$$

$$\frac{(\Delta)\quad X\ \mathrm{set}}{[x:X]()\quad fx:Y}$$

（f は functional symbol で dom(f) = X、cod(f) = Y）

$$\frac{}{[\,]()\quad *:1}$$

$$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad s:X\qquad [\Gamma](\Delta)\quad t:Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \langle s,t\rangle : X\times Y}$$

$$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad u:X\times Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \pi u:X}\qquad \frac{[\Gamma](\Delta)\quad u:X\times Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \pi' u:Y}$$

$$\frac{[\Gamma,x:X](\Delta)\quad t:Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \lambda x:X.\,t:Y^X}\qquad \frac{[\Gamma](\Delta)\quad u:X\times Y^X}{[\Gamma](\Delta)\quad \mathrm{ev}u:Y}$$

$$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad t:\{x:X\mid \phi(x)\}}{[\Gamma](\Delta)\quad m(\phi)t:X}$$

$$\frac{[\Gamma,x:X](\Delta)\quad \phi(x):\Omega \qquad [\Gamma](\Delta)\quad t:X\qquad [\Gamma]\Delta\vdash\phi(x/t)}{[\Gamma](\Delta)\quad p(\phi,t):\{x:X\mid\phi(x)\}}$$

$$\frac{[\Gamma]\Delta\vdash\exists x:X\ \phi(x)\ \wedge\forall x1:X\ \forall x2:X\ \ \phi(x1)\wedge\phi(x2)\supset \mathrm{Eq}(x1,x2:X)}{[\Gamma](\Delta)\quad \mathrm{I}x.\ \phi(x):X}$$

$$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad t1:X\quad [\Gamma](\Delta)\quad t2:X}{[\Gamma](\Delta)\quad \mathrm{Eq}(t1,t2:X):\Omega}$$

等号の judgement

term 間の等号に対する judgement は

$$[\Gamma](\Delta)\quad t1=t2:X$$

という形のstatementである。これは「文脈Γ、前提Δのもとで、type Xの term t1、t2 は等しい」ことを表す。ここでΓは文脈、Δは formula の有限列、X は type、t1、t2 は type X の term である。この時、導出可能な judgement は以下の推論規則によって与えられる。以下でterm Eq(*,*:1)をtrue と略記する。

$$\text{<=-*>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad t:1}{[\Gamma](\Delta)\quad t=*:1}$$

$$\text{<=c-<>1>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad s:X\qquad [\Gamma](\Delta)\quad t:Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \pi\langle s,t\rangle=s:X}$$

$$\text{<=c-<>2>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad s:X\qquad [\Gamma](\Delta)\quad t:Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \pi'\langle s,t\rangle=t:Y}$$

$$\text{<=u-<>>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad u:X\times Y}{[\Gamma](\Delta)\quad \langle\pi u,\pi' u\rangle=u:X\times Y}$$

$$\text{<=c-×>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad \lambda x:X.\,t:Y^X\qquad [\Gamma](\Delta)\quad u:X}{[\Gamma](\Delta)\quad \mathrm{ev}\langle\lambda x:X.\,t,u\rangle=t(x/u):Y}$$

$$\text{<=u-×>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad f:Y^X}{[\Gamma](\Delta)\quad \lambda x:X.\,\mathrm{ev}\langle f,x\rangle=f:Y^X}$$

$$\text{<=c-p>}:\ \frac{[\Gamma,x:X](\Delta)\quad \phi(x):\Omega\qquad [\Gamma](\Delta)\quad t:X\qquad [\Gamma]\Delta\vdash\phi(x/t)}{[\Gamma](\Delta)\quad m(\phi)p(\phi,t)=t:X}$$

$$\text{<=u-p>}:\ \frac{[\Gamma,x:X](\Delta)\quad \phi(x):\Omega}{[\Gamma,x':\{x:X\mid\phi(x)\}](\Delta)\quad p(\phi,m(\phi)x')=x':\{x:X\mid\phi(x)\}}$$

$$\text{<=c-m>}:\ \frac{[\Gamma,x:X](\Delta)\ \phi(x):\Omega\qquad [\Gamma](\Delta)\ t:\{x:X\mid\phi(x)\}}{[\Gamma](\Delta)\quad \phi(m(\phi)t)=\mathrm{true}:\Omega}$$

$$\text{<=c-I>}:\ \frac{[\Gamma](\Delta)\quad \mathrm{I}x.\ \phi(x):X}{[\Gamma](\Delta)\quad \phi(\mathrm{I}x.\ \phi(x))=\mathrm{true}:\Omega}$$

$$\text{<=-log>}:\ \frac{[\Gamma]\Delta,\phi\vdash\psi\qquad [\Gamma]\Delta,\psi\vdash\phi}{[\Gamma](\Delta)\quad \phi=\psi:\Omega}$$

論理の judgement

論理に関する judgement は

$$[\Gamma]\Delta \vdash \phi$$

という形のstatementである。これは「文脈Γ、前提Δのもとϕが導かれる」ことを表す。ここでΓは文脈、Δは formula の有限列、ϕは formula である。この時、導出可能な judgement は以下の推論規則によって与えられる。

[basic] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash a=b : X \qquad [\Gamma, x : X](\Delta)\ \phi(x) : \Omega}{[\Gamma]\Delta, \phi(x/a) \vdash \phi(x/b)}$$

[r-w] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash}{[\Gamma]\Delta \vdash \phi}$$
[l-w] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \phi}{[\Gamma]\Delta, \psi \vdash \phi}$$

[ex] : $$\frac{[\Gamma]\Delta, \phi, \psi \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \psi, \phi \vdash \theta}$$

[r-∧] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \qquad [\Gamma]\Delta \vdash \psi}{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \wedge \psi}$$

[l-∧] : $$\frac{[\Gamma]\Delta, \phi, \psi \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \phi \wedge \psi \vdash \theta}$$

[r-∨1] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \phi}{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$
[r-∨2] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \psi}{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \vee \psi}$$

[l-∨] : $$\frac{[\Gamma]\Delta, \phi \vdash \theta \qquad [\Gamma]\Delta, \psi \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \phi \vee \psi \vdash \theta}$$

[r-⊃] : $$\frac{[\Gamma]\Delta, \phi \vdash \psi}{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \supset \psi}$$

[l-⊃] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \phi \qquad [\Gamma]\Delta, \psi \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \phi \supset \psi \vdash \theta}$$

[r-∀] : $$\frac{[\Gamma, x : X]\Delta \vdash \phi(x)}{[\Gamma]\Delta \vdash \forall x : X.\ \phi(x)}$$

[l-∀] : $$\frac{[\Gamma]\Delta, \forall \phi(x), \phi(t) \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \forall \phi(x) \vdash \theta}$$

[r-∃] : $$\frac{[\Gamma]\Delta \vdash \phi(t)}{[\Gamma]\Delta \vdash \exists x : X.\ \phi(x)}$$

[l-∃] : $$\frac{[\Gamma, x : X]\Delta, \phi(x) \vdash \theta}{[\Gamma]\Delta, \exists \phi(x) \vdash \theta}$$

[eq] : $$\frac{[\Gamma](\Delta)\quad t1 = t2 : X}{[\Gamma]\Delta \vdash Eq(t1, t2 : X)}$$

3. judgement の interpretation

今、言語$\mathcal{L}$に対してトポス$\mathcal{T}$が与えられ、さらに$\mathcal{L}$の各 ground type A 及び function symbol f に各々$\mathcal{T}$の object $[\![A]\!]$ 及び$\mathcal{T}$の arrow $[\![f]\!] : [\![dom(f)]\!] \to [\![cod(f)]\!]$ を対応づける写像 $[\![\ ]\!]$ が与えられたとする。この $[\![\ ]\!]$ をもとに、$\mathcal{L}$の type X のトポス$\mathcal{T}$での interpretation $[\![X]\!]$、term t のトポス$\mathcal{T}$での interpretation $[\![t]\!]$ 及び、導出可能な judgement に対する interpretation が以下のように定められる。

type の judgement の interpretation

$(\Delta)\quad X\quad set$ は、「前提 $[\![\Delta]\!] = true$ のもとで、$[\![X]\!]$ がトポス$\mathcal{T}$の object である」と解釈される。

- $[\![1]\!] = 1$、$[\![\Omega]\!] = \Omega$ とする。
- A が ground type の時、$[\![A]\!]$ は$[\![\ ]\!]$によって定められたトポス$\mathcal{T}$の object とする。
- $[\![X]\!]$、$[\![Y]\!]$ がトポス$\mathcal{T}$の object の時、$[\![X \times Y]\!] = [\![X]\!] \times [\![Y]\!]$ とする。
- $[\![X]\!]$、$[\![Y]\!]$ がトポス$\mathcal{T}$のobjectの時、$[\![Y^X]\!] = [\![Y]\!]^{[\![X]\!]}$ とする。
- $[\![\phi]\!] : [\![X]\!] \to \Omega$ の時、$[\![\{x : X \mid \phi(x)\}]\!] = \{x : [\![X]\!] \mid [\![\phi]\!]\}$ とする。

term の judgement の interpretation

$[\Gamma](\Delta)\quad t : X$ は、「仮定$[\![\Delta]\!] = true \circ !_{[\![\Gamma]\!]}$ のもとで、arrow $[\![t]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![X]\!]$ である」と解釈される。ただしここで、文脈$\Gamma = x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$ に対して$[\![\Gamma]\!] = [\![A_1]\!] \times \ldots \times [\![A_n]\!]$ と定める。$!_{[\![\Gamma]\!]}$ は$[\![\Gamma]\!]$ からterminal object 1へのunique arrowである。

- $[\![t_1]\!] : B \to C$、$[\![t_2]\!] : A \to B$ の時、$[\![t_1 t_2]\!] = [\![t_1]\!] \circ [\![t_2]\!] : A \to C$ とする。
- $x : X$ の時、$[\![x]\!] = id_{[\![X]\!]}$ とする。
- $[\![*]\!] = !_{[\![\Gamma]\!]}$ とする。
- $[\![<s,t>]\!] = <[\![s]\!],[\![t]\!]>$ とする。
- $[\![\pi u]\!] = \pi \circ [\![u]\!]$ とする。
- $[\![\pi' u]\!] = \pi' \circ [\![u]\!]$ とする。
- $[\![\lambda x : X.\ t]\!] = ([\![t]\!] \circ \pi)^\wedge$ とする。
- $[\![ev]\!] = ev : X \times Y^X \to Y$ とする。
- $[\![m(\phi)]\!] = m([\![\phi]\!])$ とする。

・$[\!|p(\phi, t)|\!] = p([\!|\phi|\!],[\!|t|\!])$ とする。
・$[\!|Ix.\ \phi(x)|\!] = Ix.\ [\!|\phi(x)|\!]$ とする。

論理の judgement の interpretation
$[\Gamma]\Delta \vdash \phi$ は、「仮定$[\!|\Delta|\!] = \mathrm{true} \circ !_{[\!|\Gamma|\!]}$ のもとで、$[\!|\phi|\!] = \mathrm{true} \circ !_{[\!|\Gamma|\!]}$ である」と解釈される。
トポスにおける arrow $\wedge$、$\vee$、$\supset : \Omega\times\Omega\to\Omega$、functor $\forall x$、$\exists x$ については[Mac]参照。
・$[\!|\phi|\!] : X\to\Omega$、$[\!|\psi|\!] : X\to\Omega$ の時、
　$[\!|\phi \wedge \psi|\!] = \wedge \circ \langle[\!|\phi|\!],[\!|\psi|\!]\rangle$ とする。
・$[\!|\phi|\!] : X\to\Omega$、$[\!|\psi|\!] : X\to\Omega$ の時、
　$[\!|\phi \vee \psi|\!] = \vee \circ \langle[\!|\phi|\!],[\!|\psi|\!]\rangle$ とする。
・$[\!|\phi|\!] : X\to\Omega$、$[\!|\psi|\!] : X\to\Omega$ の時、
　$[\!|\phi \supset \psi|\!] = \supset \circ \langle[\!|\phi|\!],[\!|\psi|\!]\rangle$ とする。
・$[\!|\phi|\!] : X\to\Omega$ の時、
　$[\!|\forall x : X.\ \phi(x)|\!] = \forall x\langle[\!|\phi|\!]\rangle$ とする。
・$[\!|\phi|\!] : X\to\Omega$ の時、
　$[\!|\exists x : X.\ \phi(x)|\!] = \exists x\langle[\!|\phi|\!]\rangle$ とする。

等号の judgement の interpretation
$[\Gamma](\Delta)\ t1 = t2 : A$ は、「仮定$[\!|\Delta|\!] = \mathrm{true} \circ !_{[\!|\Gamma|\!]}$ のもとで、$[\!|t1|\!] = [\!|t2|\!]$ である」と解釈される。

定理１：　上記の interpretation に対して deductive system は健全である。

証明はまったくオーソドックスな方法で示されるので省略する。

4.　Canonicalモデル

言語 $\mathcal{L}$、theory 即ち formula の（有限）集合Δが与えられたとき、以下のようにカテゴリー Top(Δ:$\mathcal{L}$) を作る。
　Top(Δ:$\mathcal{L}$) の object はΔのもとで定義される type A の同値類 A~ である。ここでこの同値関係 ~ は、次のように定義される。
$\{x : X \mid \phi(x)\} \sim \{x : Y \mid \psi(x)\}$
　iff　$(\Delta)\ \phi = \psi : \Omega$
　Top(Δ:$\mathcal{L}$) の arrow $f : A\to B$は、$[x : A]\ f : B$ で定義される。id_A は $[x : A]\ x : A$ とする。 arrow の合成は　$([y{:}B]\ g(y){:}C) \circ ([x{:}B]\ f(x) : B) = [x : A]\ g(y/f(x)) : C$　で定義される。

補題１：　$[\Gamma]\Delta \vdash \phi \iff [x{:}X]\ (\Delta)\ \phi = \mathrm{true} : \Omega$

[証明]
(=>)　$[\Gamma]\Delta \vdash \phi$　より (=c-sub) を使って、$[\Gamma](\Delta)\ m(\phi)p(\phi,x) = x : X$。一方、$[\Gamma](\Delta)\ p(\phi,x) : \{x : X \mid \phi\}$ より、$(m(\phi)c)$ を使って、$[x{:}X]\ (\Delta)\ \phi(m(\phi)p(\phi,x)) = \mathrm{true} : \Omega$。以上より、$[\Gamma](\Delta)\ \phi(x) = \mathrm{true} : \Omega$。
(<=)　[basic] 規則で、$\phi(x)$ の部分を x（ただし、$x : \Omega$）で置き換えると、$[\Gamma](\Delta)\ a=b : X$ より、$[\Gamma]\Delta, a \vdash b$ となる。よって、$[\Gamma](\Delta)\ \phi(x) = \mathrm{true} : \Omega$ の時、$[\Gamma]\Delta, \mathrm{true} \vdash \phi$。一方、$*=*$ より、$[\Gamma]\Delta \vdash \mathrm{true}$。よって、cut 規則より、$[\Gamma]\Delta \vdash \phi$。　□

補題２：　式の列Δに対し、Δ^*はΔの式に何回か左導入規則を逆に適用、即ち、結論部にマッチする場合、条件部に書き換えたものを表すとする。この時、
（１）　$[\Gamma]\Delta \vdash Eq(a,b{:}X)$　ならば　$[\Gamma](\Delta^*)\ a=b : X$ となる（Δ^*がある）。
（２）　（１）の$[\Gamma](\Delta^*)\ a=b : X$　に対して、$[\Gamma](\Delta^*)\ a=b : X$ から等式推論で$[\Gamma](\Delta^*)\ a'=b' : X$ が導かれたなら、$[\Gamma]\Delta \vdash Eq(a',b'{:}X)$ が導かれる。

[証明]
（１）の証明：$[\Gamma]\Delta \vdash Eq(a,b{:}X)$ の証明のステップ数による帰納法を用いる。
ステップ数が１の場合は、[start]規則と、[r-Eq]規則の適用の二つの場合に分かれる。[r-Eq] の場合、前提が$[\Gamma](\Delta^*)\ a=b : X$ となっているので主張は満たされる。[basic] の場合、Δの中に Eq を含む式が入っていなければならない。しかし、理論では Eq は用いられず、また、演繹の中で、Eq が現われるのは等式推論から論理推論に変わる (r-Eq) 規則の所だけなので、Δの中に Eq が入ることはありえない。よって、[basic] 規則は適用されない。
ステップ数が2以上の場合、まず式の形から右導入規則は適用されない。よって、適用されるのは左導入規則だけである。その前提には必ず$[\Gamma]\Delta^* \vdash Eq(a,b{:}X)$ の形の sequent があるので、帰納法の仮定を適用して
$[\Gamma](\Delta^*)^*\ \ a=b : X$ となり、主張を満たす。
（２）の証明：Δ^*を導く右導入規則で$[\Gamma](\Delta^*)$

a=b : X を [Γ]（Δ*）a'=b' : X に置き換えて逆の順序で適用すればよい。 □

定理２： カテゴリーTop(Δ:$\mathcal{L}$) はトポスになる。

[証明]

[terminal object]

terminal object は type 1 と定める。

<存在>

任意の object A から 1 への unique arrow は [x : A](Δ) *: 1 と定義する。

<一意性>

今、r : A→1 とする。これは、[x : A] (Δ) [x:A] f : 1 と書ける。この時 (eq-tl) より、[x : A] (Δ) [x:A] f = * : 1。

[product]

object A と B のproduct は A×B と定める。

<存在>

A×B から A の projection arrow は [z : A×B] πz : A で定める。

A×B から B の projection arrow は [z : A×B] π'z : A で定める。

[u : C] f : A、[u : C] g : B から定まるunique arrow は [u : C] <f,g> :A×B で定める。

<可換性>

（[z : A×B] πz : A）∘（[u : C] <f,g> :A×B） = ([u : C] π<f,g> :A） = （[u : C] f :A） が(eq-c1-pd)より導かれる。同様に （[z : A×B] π'z : B）∘（[u : C] <f,g> :A×B） = （[u : C] π'<f,g> :B） = （[u : C] g :B） が導かれる。

<一意性>

今、ある （[u : C] h :A×B） があって、（[u : C] f: A） = （[z : A×B] πz: A）∘（[u : C] h :A×B） = （[u : C] πh :A） かつ （[u : C] g : B） = （[z : A×B] π'z : B）∘（[u : C] h :A×B） = （[u : C] π'h :B） だったとする。この時、(eq-u-pd) とこの二つの等式より、（[u : C] h :A×B） = （[u : C] <πh, π'h> :A×B） = （[u : C] <f,g> :A×B）。

[exponential]

A 上 B の exponential は、A^B で定める。

<存在>

C^B×B から C への evaluation arrow は、[u : C^B×B] evu : C で定める。

[z : A×B] f : C の transpose は [x:A] λy : B. f(z/<x,y>) : C^B で定める。

<可換性>

（[x:A] λy : B. f(w/<x,y>) : C^B） ×id = < （[x:A] λy : B. f(w/<x,y>) : C^B） π, π'> = [z : A×B] <λy : B. f(w/<πz,y>), π'z> : C^B ×B。よって、（[u :C^B ×B] evu : C）∘（[x:A] λy : B. f(w/<x,y>) : C^B） ×id = [z : A×B] ev<λy : B. f(w/<πz,y>), π'z> : C = [z : A×B] f(w/<πz, π'z>) : C = [z : A×B] f(z) : C。

<一意性>

（[u :C^B ×B] evu : C）∘（[x:A] h : C^B） ×id = [z : A×B] f(z) : C とする。即ち、（[u :C^B ×B] evu : C）∘（[z : A×B] <h(x/πz), π'z> : C^B × B） = [z : A×B] f(z) : C。よって、（[z : A×B] ev<h(x/πz), π'z> : C） = [z : A×B] f(z) : C となり、[x:A] λy : B. f(z/<x,y>) : C^B = [x:A] λy : B. ev<h(x/π<x,y>), π'<x,y>> : C^B = [x:A] λy : B. ev<h,y> : C^B = [x:A] h : C^B。

[subobject]

subobject classifier はΩとする。

[kernel arrow についての pullback]

<存在>

object X からΩへの arrow [x : X] φ : Ωが与えられたとき、(term-sub) より、{x : X ¦ φ(x)} から X への arrow [x' : {x : X ¦ φ(x)}] m(φ)x' : X が得られる。これを、character arrow と定める。

<可換性>

（[x : X] φ : Ω）∘（[x' : {x : X ¦ φ(x)}] m(φ)x' : X） =[x' : {x : X ¦ φ(x)}] φ(x/x') : Ω =[x' : {x : X ¦ φ(x)}] true * : Ω = （[r : 1] true r : Ω）∘（[x' : {x : X ¦ φ(x)}] *' : Ω）

今、任意の object Y、Y から X への任意の arrow [y:Y] t : X に対して、（[x:X] φ : Ω）∘（[y:Y] t : X） = （[r : 1] true r : Ω）∘（[y:Y] * : 1） とする。

<存在>

即ち、[y:Y] φ(x/t) = true *: Ω となる。これと、[basic] 規則 と cut 規則 により [y:Y] ⊢φ(x/t) が導ける。よって、[y:Y] p(φ,t) : {x : X ¦ φ(x)} が存在する。

<可換性>

[y:Y] ⊢φ(x/t) より (=c-sub) から、（[x' : {x : X ¦ φ(x)}] m(φ)x' : X ）∘（[y:Y] p(φ,t) : {x : X ¦ φ(x)}） = （[y:Y] m(φ) p(φ,t) : X ） = （[y:Y] t : X ）。

<一意性>
今、$([x' : \{x : X \mid \phi(x)\}]\ m(\phi)x' : X) \circ ([y:Y]\ s: \{x : X \mid \phi(x)\}) = ([y:Y]\ \ t : X)$ とする。
即ち、$([y:Y]\ m(\phi)s : X) = ([y:Y]\ t : X)$ とする。
(=u-sub) と上式より、$([y:Y]\ s: \{x : X \mid \phi(x)\}) = ([y:Y]\ p(\phi, m(\phi)s) : \{x : X \mid \phi(x)\}) = ([y:Y]\ p(\phi, t) : \{x : X \mid \phi(x)\})$ となる。

[character arrow についての pullback]
今、$[z:Z]\ \ f : X$ が与えられたとする。
<存在>
arrow $[x:X]\ \ \exists z.Eq(f,x) : \Omega$ が存在する。
<可換性>
$([x:X]\ \ \exists z.Eq(f,x) : \Omega) \circ ([z:Z]\ \ f : X) = ([z':Z]\ \ \exists z.Eq(f(z),f(z')) : \Omega)$ となる。
今、$[z':Z] \vdash Eq(f(z'),f(z'))$。よって[I-∃] より、$[z':Z] \vdash \exists z.Eq(f(z),f(z'))$。よって補題2により
$[z':Z]\ \ \exists z.Eq(f(z),f(z')) = true * : \Omega$ で、pullback 図式は可換。
<一意性>
今、$[x:X]\ \ h : \Omega$ が図1を pullback にする arrow だとする。$[x' : \{x \mid h\}]\ m(h)x' : X$ をとると、$m(h)$ の定義から、図2は可換になる。よって図1が pullback であることから、ある $[x' : \{x \mid h\}]\ \ r : Z$ があって、$([x' : \{x \mid h\}]\ m(h)x' : X) = ([z:Z]\ \ f : X) \circ ([x' : \{x \mid h\}]\ \ r : Z)$、即ち、$m(h)x' = f(z/r)$ となる。一方、$[x:X]\ h(x) \vdash h(x)$ より、$[x:X]\ (h(x))\ h(x) = true : \Omega$ となり、図1が pullback であることから、ある$[x:X]\ \ u : \{x \mid h\}$ があり、$[x : X]\ \ x : [x : X] = ([x' : \{x \mid h\}]\ m(h)x' : X) \circ ([x:X]\ \ u : \{x \mid h\})$、即ち $x = m(h)u$ となる。$m(h)x' = f(z/r)$ に対して、この u を合成して、$m(h)u = f(z/r(x'/u))$ を得る。この二つの式より、$f(z/r(x'/u)) = x$ となり、$h \vdash Eq(f(z/r(x'/u)),x)$、よって $h \vdash \exists z Eq(f(z),x)$ が導ける。

逆に、まず $[\Gamma, x:X]\ \Delta, \exists x Eq(f,x) \vdash Eq(f,x)$ と補題2より、$[\Gamma, x:X]\ (\Delta, Eq(f,x)) *\ f = x$ となる。よって、$h = h(x/f)$ となる。一方、図1の可換性 $h(x/f) = true$ である。よって $h = true$。よって、補題1より、$[\Gamma, x:X]\ \ (\Delta, Eq(f,x)) * \vdash h$。再び、補題2より、$[\Gamma, x:X]\ \Delta, Eq(f,x) \vdash h$、よって $[\Gamma]\ \Delta, \exists x Eq(f,x) \vdash h$。

以上の結果と (=-log) 規則より、$[\Gamma]\ (\Delta)\ \exists x Eq(f,x) = h$。

今、任意の object Y、Y から X への任意の arrow $[y:Y]\ \ t : X$ に対して、$([x:X]\ \ \exists z.Eq(f,x) : \Omega) \circ ([y:Y]\ \ t : X) = ([r : 1]\ \ true\ r : \Omega) \circ ([y:Y]\ \ * : 1)$ とする。即ち、$[y:Y] \exists z.Eq(f,t) = true * : \Omega$ とする。
<存在>
まず、前提の可換図式より、$[y : Y]\ (\Delta)\ true = \exists z Eq(f,t) : \Omega$が導かれる。よって、補題1より、$[y : Y]\ \Delta \vdash \exists z Eq(f,t)$ となる。一方、$[y : Y, z1 : Z, z2 : Z]\ \Delta, Eq(f(z1),t) \wedge Eq(f(z2),t) \vdash Eq(f(z1),t)$ と補題2より、$f(z1) = t$。同様に同じ条件のもとで、$f(z2) = t$。よって、$f(z1) = f(z2)$。ここで、fはこのカテゴリーで monic であるから、$z1 = z2$ となる。よって$[y : Y, z1 : Z, z2 : Z]\ (\Delta, Eq(f(z1),t) \wedge Eq(f(z2),t)) * \vdash Eq(z1,z2)$。よって、$[y : Y, z1 : Z, z2 : Z]\ \Delta, Eq(f(z1),t) \wedge Eq(f(z2),t) \vdash Eq(z1,z2)$。よって、$[y : Y]\ \Delta \vdash \forall z1 \forall z2 (Eq(f(z1),t) \wedge Eq(f(z2),t) \supset Eq(z1,z2))$。以上より、$[y:Y]\ (\Delta) Iz.\ Eq(f, t) : Z$ が導かれ、これが求める arrow である。
<可換性>
$([z:Z]\ f : X) \circ ([y:Y]\ Iz.Eq(f,t) : Z) = ([y:Y]\ \ t : X)$、つまり、$f(z/Iz.Eq(f,t)) = t$ を示せばよいが、(=c-I) より、$Eq(f(z/Iz.Eq(f,t)),t) = true$。よって $[y:Y]\ \Delta \vdash Eq(f(z/Iz.Eq(f,t)),t)$ となり、可換性も満たされる。
<一意性>
$([z:Z]\ f : X)$ が monic であることから、一意性は明らか。　□

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "{[z:Z]\ *\ :\ 1}"] \arrow[d, "{[z:Z]\ f\ :\ X}"'] & 1 \arrow[d, "{[r:1]\ true\ :\ \Omega}"] \\
X \arrow[r, "{[x:X]\ h\ :\ \Omega}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

図１：hがcharacter arrowとなる図式.

$$
\begin{tikzcd}
\{x:h\} \arrow[r, "{[x':\{x:h\}]\,*\,:\,1}"] \arrow[d, "{[x':\{x:h\}]\ m(h)x'\,:\,X}"'] & 1 \arrow[d, "{[r:1]\ \mathrm{true}\,:\,\Omega}"] \\
X \arrow[r, "{[x:X]\ h\,:\,\Omega}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

図２：m(h)x' がkernel arrowとなる図式.

命題１：　上記の演繹システムで cut 規則を消去できる。

[証明]　一階述語直観主義論理LJの cut 規則消去と同じように示せる。たとえば[Dum]に基づくと、rank 0 の cut で前提の一方が basic 規則から導かれる cut 以外については全く同様に示される。rank 0で basic 規則適用の場合には、ϕ(b) が atomic であるから、下図のような二つの場合になる。よって各々 $\Delta \vdash C$、$\Delta \vdash \phi(b)$ の weakening から直接結果が導かれる。

$$
(\mathrm{cut})\ \dfrac{\Gamma,\ \phi(a) \vdash \phi(b) \qquad \dfrac{\Delta \vdash C}{\Delta,\ \phi(b) \vdash C}}{\Gamma,\ \Delta,\ \phi(a) \vdash C}
$$

$$
(\mathrm{cut})\ \dfrac{\Gamma \vdash \phi(a) \qquad \dfrac{\Delta \vdash \phi(b)}{\Delta,\ \phi(a) \vdash \phi(b)}}{\Gamma,\ \Delta \vdash \phi(b)}
$$

□

定理３：　この推論システムはトポスセマンティクスに対して完全である。
即ち、任意のトポスの interpretation で [|$\Delta \vdash \phi$|] = true ならば　[]$\Delta \vdash \phi$。

[証明]　上記のトポスと解釈を適用すると、[|$\Delta \vdash \phi$|] = true は、[]（Δ）　ϕ = true を意味し、補題１より、[]$\Delta \vdash \phi$。　□

おわりに

本論文では、higher order categorical logic に対して、集合概念をベースとした従来の deductive system とは違い、よりトポスセマンティクスに密着した deductive system を与えた。この deductive system で中心的な役割を果たすものが description Iz. ϕ の存在である。この term の導入によって、character map の存在条件を論理の形で記述することが可能となった。また、この deductive system は、ある意味では Beth-Kripke-Joyal semantics のメカニズム化とも考えられ、この時、文脈と generalized element が互いに対応している。

謝辞

本研究の機会を与えてくださったNTTコミュニケーション科学研究所の河岡司所長ならびに中野良平主幹研究員に感謝します。

参考文献

[Boi]　A. Boileau and A. Joyal, *La logique des topos,* J. Symbolic Logic, 46, pp. 6-16, 1981.

[Dum]　M. Dummett, *Elements of Intuitionism,* Clarendon Press Oxford, 1977.

[Fou]　M.P. Fourman, *The logic of topoi,* Handbook of Mathematical Logic, pp. 1053-90, 1977.

[Lam]　J. Lambek and P.J. Scott, *Introduction to higher order categorical logic,* Cambridge Studies in Advanced Mathematics 7, 1986.

[Mac]　S. Mac Lane and I. Moerdijk, *Sheaves in geometry and logic,* Springer Universitext, 1992.

[Pho]　W. Phoa, *An introduction to fibrations, topos theory, the effective topos and modest sets,* LFCS Report Series, ECS-LFCS-92-208, 1992.