プログラミング 4−2
(1995. 11. 30)

高階書き換え系の単一正規形性

真野 健
NTT コミュニケーション科学研究所

小川瑞史
NTT 基礎研究所

Van Oostrom は既存のさまざまな書き換え系を統一する枠組として高階書き換え系を提案し，線形で非重なりなパターン高階書き換え系が合流性を持つことを示した．本稿では，強非重なりなパターン高階書き換え系は線形であるか否かにかかわらず単一正規形性を持つことを示す．

Unique normalform property of Higher-Order Rewriting Systems

Ken Mano
NTT Communication Science Labs.
mano@cslab.kecl.ntt.jp

Mizuhito Ogawa
NTT Basic Research Labs.
mizuhito@theory.brl.ntt.jp

Van Oostrom proposed the notion of Higher-Order Rewriting System (HORS), which unifies various existing rewriting systems, and showed that linear non-overlapping pattern HORSs satisfy the Church-Rosser property. We present that strongly non-overlapping pattern HORSs, regardless of linearity, enjoy the unique normalform property.

1 はじめに

高階の表現を対象とした書き換え系の枠組が，いくつか提案されている ([Klo80], [Nip91]). Van Oostrom は [vO94b] において，既存のさまざまな書き換え系を統一する枠組として高階書き換え系 (Higher-Order Rewriting System, HORS) を提案した．また，（一階の）項書き換え系の直交性に相当する性質を高階書き換え系に対して定義することにより（定理 2.13 の性質 A.1 から A.8），その合流性の十分条件を示した．

高階書き換え系の特徴は，書き換え規則による項の置換と，その規則を適用するための照合・代入を明確に分離したことである．後者は，代入計算 (Substitution Calculus, $\mathcal{SC}$) とよばれる書き換え系によってなされ，代入計算も書き換え規則とともに高階書き換え系を規定するパラメータとして位置づけられる．[vO94b] では，まず代入計算を具体的に規定せずに性質 A.1 から A.8 を書き換え規則と代入計算が満たすべき条件として定義し，次に代入計算として $\lambda_{\bar\eta}$ をもつ“非重なりな線形パターン高階書き換え系”がそれらの条件を満足することを示した．

一方項書き換え系においては，直交性は左線形で重なりのないことと定義される．左線形性を仮定することなしに単一正規形性を保証する十分条件が，いくつか知られている ([Che81], [dV90], [TO94], [MO95]). 本稿では，これらの結果の 1 つを高階書き換え系に拡張し，強非重なりなパターン高階書き換え系は（線形であるか否かにかかわらず）単一正規形性を持つことを示す．

2 諸定義

本節に定義は，基本的に [Klo92], [vO94b] に従う．

（抽象）書き換え系 $\langle D, \to\rangle$ とは，領域 D 上の書き換えと呼ばれる 2 項関係 $\to$ とで定義される．文脈から明らかなとき D はしばしば省略される．書き換え $\to$ の対称閉包，反射推移閉包，反射推移対称閉包は，それぞれ $\leftrightarrow$, $\to^*$, $\leftrightarrow^*$ であらわされる．要素 $d \in D$ について，$d \to d'$ なる $d' \in D$ が存在しないとき，d はその書き換え系の正規形とよばれる．

書き換え系 $\to$ は，$d_1 \to d_2, \to \ldots$ なる無限系列が存在しないとき停止性をもつという．

書き換え系 $\to$ は，任意の正規形 d, d' について $d \leftrightarrow^* d' \Rightarrow d \equiv d'$ なる性質を持つとき，単一正規形性をもつという．また書き換え系 $\to$ は，任意の d_1, d_2, d_3 について $d_1 \to^* d_2$, $d_1 \to^* d_3$ ならば $d_2 \to^* d_4$ かつ $d_3 \to^* d_4$ なる d_4 が存在するという性質を持つとき合流性を持つといわれる．書き換え系が停止性と合流性を持つとき，完備であるという．

定義 2.1 アルファベット $(a, b, c \in)$ $\mathcal{A}$ は以下の記号からなる可算集合である．ただし，記号にはそれぞれ引数の数 (arity) が定義され，引数の数が n の記号を n 引数記号という．

1. 関数適用と呼ばれる 2 引数記号 $\cdot(\cdot)$,
2. 抽象化と呼ばれる 2 引数記号 $\cdot.\cdot$,
3. 以下の無引数記号：[1]
   (a) 代入変数（あるいは束縛変数） $\xi, \eta, \zeta, \ldots \in \mathcal{B}_{\mathtt{var}}$.
   (b) 演算子（あるいは定数） $\mathtt{F}, \mathtt{G}, \mathtt{H}, \ldots \in \mathcal{O}_{\mathcal{R}}$.
   (c) 項変数（あるいは自由変数） $x, y, z, \ldots, \mathcal{F}_{\mathtt{var}}$. このなかには，孔と呼ばれる特別な記号 $\Box_1, \Box_2, \ldots$ が含まれる．

束縛変数と自由変数は，あわせて変数と呼ばれる．演算子と自由変数の和を書き換えアルファベットとよび $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ で表す．

[1] [vO94b] ではこの中に代入変数 (substitution operator) が現れるが，本稿には関係ないので略す．

アルファベットの中の記号から，原前項が以下のように作られる．任意の束縛変数の集合 Z について，Z 上の (A-) 原前項の集合 $(s, t, r \in)$ $\mathbb{RPT}(\mathcal{A}, Z)$ は以下のように定義される：

1. 束縛変数 $\xi \in Z$ は，Z 上の原前項である．全ての定数および自由変数は Z 上の原前項である．
2. もし s, t が Z 上の原前項ならば，$s(t)$ も Z 上の原前項ある．
3. もし s が $Z \cup \{\xi\}$ 上の原前項ならば，$\xi.s$ は Z 上の原前項である．

定義 2.2 $\mathcal{A}$ をアルファベットとする．集合 $(\phi, \psi, \chi \in)$ $\mathtt{Pos} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{0,1\}^*$ を出現の集合と呼ぶ．関数 $\mathtt{Pos} : \mathbb{RPT}(\mathcal{A}) \to 2^{(\mathtt{Pos})}$ は，原前項をそれの出現の集合に，関数 $\mathtt{top} : \mathbb{RPT}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ は，原前項をその最上の記号に，部分関数 $/ : \mathbb{RPT}(\mathcal{A}) \times \mathtt{Pos} \to \mathbb{RPT}(\mathcal{A})$ は組 s, ϕ を s の出現 ϕ に現れる部分原前項に，それぞれ以下に定義されるように写す．

1. もし，s が無引数記号ならば，

$$\begin{aligned} \mathtt{Pos}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\epsilon\} \\ \mathtt{top}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s \\ s/\epsilon &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s \end{aligned}$$

2. もし $s \stackrel{\mathrm{def}}{=} s_0(s_1)$ ならば，

$$\begin{aligned} \mathtt{Pos}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\epsilon\} \cup \{0\sigma \mid \sigma \in \mathtt{Pos}(s_0)\} \\ &\quad \cup \{1\sigma \mid \sigma \in \mathtt{Pos}(s_1)\} \\ \mathtt{top}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \cdot(\cdot) \\ s/\epsilon &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s \\ s/0\sigma &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s_0/\sigma \\ s/1\sigma &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s_1/\sigma \end{aligned}$$

3. もし $s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \xi.s_0$ ならば，

$$\begin{aligned} \mathtt{Pos}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\epsilon\} \cup \{0\sigma \mid \sigma \in \mathtt{Pos}(s_0)\} \\ \mathtt{top}(s) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \cdot.\cdot \\ s/\epsilon &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s \\ s/0\sigma &\stackrel{\mathrm{def}}{=} s_0/\sigma \end{aligned}$$

出現 ϕ, ψ に対して，ϕ と ψ の連接を $\phi;\psi$ であらわす．出現 ϕ が ψ の接頭辞であるとは，$\psi = \phi;\phi'$ なる ϕ' が存在することをいい，このとき $\phi \preceq \psi$ と書く．2 つの出現は，互いにもう一方の接頭辞でないとき，独立であるという．原前項 s に対して，s, ϕ を s の出現 ϕ に現れる記号に写す部分関数を $s(\phi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathtt{top}(s/\phi)$ のように定義する．原前項 s の a の現れる出現を a- 出現という．記号 $a \in \mathcal{A}$ に対して，原前項 s の中で a の現れる出現の集合 $a\mathtt{Pos}(s)$

を $\{\phi \in \mathtt{Pos}(s) \mid s(\phi) \in A\}$ のように定義する．また，s のなかで $\mathcal{A}_{\mathcal{R}}$ の記号が現れる出現を $\mathcal{R}\mathtt{Pos}(s)$ であらわす．関数 Bvar (Fvar) は原前項をその中に現れる束縛変数（自由変数）の集合に写す．s が Z 上の原前項であるとき，$Z \cap \mathtt{Bvar}(s)$ を s の未束縛な束縛変数の集合とよび，$\mathtt{UBvar}(s)$ であらわす．

定義 2.3 $\mathcal{A}$ をアルファベットとする．前項とは，空集合上の原前項である．以後，$\mathcal{A}$ から作られる前項の集合を $\mathbb{PT}(\mathcal{A})$ で表し，$s,t,r \in \mathbb{PT}(\mathcal{A})$ とする．もし $\mathtt{Fvar}(s) = \emptyset$ ならば，s は閉じているといい，さもなければ s は開いているという．前項 s に現れる孔が $\Box_1,\ldots,\Box_m$ のいずれかであるとき，s は m-引数の前文脈であるという．前文脈を表すのに C, D, E 等を用いる．m-引数の前文脈を $C[m], D[m], E[m]$ と書き，1引数のものは単に $C[], D[], E[]$ と書く．前文脈 $C[m]$ の孔 $\Box_1,\ldots,\Box_m$ を前項 $s_1,\ldots,s_m$ で置き換えて得られるものを $C[s_1,\ldots,s_m]$ であらわす．前文脈 $C[m]$ に孔 $\Box_1,\ldots,\Box_m$ が各々ちょうど 1 つづつ現れるとき，$C[m]$ は線形であるという．

定義 2.4 高階書き換え系 (HORS) とは，アルファベット $\mathcal{A}$，代入計算 $\mathcal{SC}$，書き換え規則の集合 $\mathcal{R}$ からなる 3 つ組である．各々は，以下の条件を満たす．

1. $\mathcal{SC}$ は $\mathbb{PT}(\mathcal{A})$ 上の書き換え系である．
2. 書き換え規則 $l \to r \in \mathcal{R}$ は閉前項の対である．書き換え規則を表すのに，$\aleph, \beth, \gimel, \daleth$ 等を用いる．書き換え規則 $\aleph$ の第 1 要素，第 2 要素をそれぞれ右辺，左辺と呼び $\mathbf{lhs}(\aleph), \mathbf{rhs}(\aleph)$ であらわす．

高階書き換え系を $\mathcal{H}, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ 等で表す．高階書き換え系 $\mathcal{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ に対して，前項上の 2 つの書き換え系（置換，書き換え関係）を定義する．

1. 書き換え規則 $\aleph \stackrel{\mathrm{def}}{=} l \to r \in \mathcal{H}$ と前文脈 $C[]$ に対して，$C[]$ における $\aleph$ の置換を $C[l] \to_{C[\aleph]} C[r]$ と定義する．任意の文脈における $\aleph$ の置換を $\to_\aleph \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{C[]} \to_{C[\aleph]}$ であらわす．さらに，任意の $\mathcal{R}$ の書き換え規則による置換を $\to_{\mathcal{R}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\aleph \in \mathcal{R}} \to_\aleph$ と書く．
2. 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の書き換え関係は，$\to_{\mathcal{H}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \leftrightarrow^*_{\mathcal{SC}}; \to_{\mathcal{R}}; \leftrightarrow^*_{\mathcal{SC}}$ として定義される．

定義 2.5 $\mathcal{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ を高階書き換え系とする．項（文脈）とは，$\mathcal{SC}$-正規形の前項（前文脈）のことである．A-項の集合を $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ であらわす．

補題 2.6 ([vO94b]) 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ が完備であるとき，その書き換え関係 $\to_{\mathcal{H}}$ を項の上に制限すると，その定義における $\leftrightarrow^*_{\mathcal{SC}}; \to_{\mathcal{R}}; \leftrightarrow^*_{\mathcal{SC}}$ を $\leftarrow^*_{\mathcal{SC}}; \to_{\mathcal{R}}; \to^*_{\mathcal{SC}}$ に制限しても得られる書き換え関係は変化しない．このとき，$\leftarrow^*_{\mathcal{SC}}$，$\to^*_{\mathcal{SC}}$ をそれぞれ書き換えの拡張部，簡約部と呼ぶ．

定義 2.7 原前項上の書き換え系 $\mathcal{H} = \langle \mathbb{RPT}(\mathcal{A}), \to\rangle$ に子孫関係 $|\underline{\cdot}|$ が定義されるとき，3 項組 $\langle \mathcal{H}, \mathcal{R}\mathtt{Pos}, |\underline{\cdot}|\rangle$ を子孫書き換え系とよぶ．ここで，$|\underline{\cdot}|$ は書き換え $a \to b$ を関係 $|\underline{a \to b}| : \mathcal{R}\mathtt{Pos}(a) \times \mathcal{R}\mathtt{Pos}(b)$ に写す写像である．

子孫関係の定義は，$\to$ による任意の反射推移閉包 $d : t \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow s$ に対して，それに対応する子孫関係の連接として拡張される．また，$\phi \in \mathcal{R}\mathtt{Pos}(t)$ に対して，$\phi|\underline{d}|\psi$ であるとき ψ は ϕ の子孫であるという．またそのとき，ϕ を ψ の先祖と呼ぶ．

定義 2.8 子孫書き換え系は，原前項 a から b への任意の書き換え系列 d, e について $|\underline{d}| = |\underline{e}|$ であるとき，パラメータ的 (parametric) であるといわれる．また，高階書き換え系は，その代入計算がパラメータ的であるときパラメータ的であるという．

定義 2.9 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ が子孫書き換え系であるとする．$\mathcal{H}$ の各書き換え規則 $\aleph$ の左辺 l に以下の 2 つの条件を満足する頭部と呼ばれる出現 $\phi \in \mathcal{R}\mathtt{Pos}$ が定義されているとき，$\mathcal{H}$ は頭部定義であるという．

1. $C[]$ を線形な文脈とし，ψ をそのなかの孔の出現とする．そのとき，$C[l]$ からはじまる任意の代入計算による簡約系列において，$\psi;\phi$ は一意な子孫を持つ．
2. 項 s の任意の出現 χ に対して線形な文脈 $C[]$ が存在して，s から $C[l]$ への代入計算による拡張系列が存在し，その孔の出現を ψ として $\psi;\phi$ が ξ の $C[l]$ における先祖であるならば，そのような $C[]$ は一意である．

2 で，もし $C[]$ が存在するならば，組 $(\chi, \aleph)$ を s の中のリデックスとよぶ．また，s から $C[]$ への任意の拡張系列を $(\chi, \aleph)$ の（$C[]$ への）抽出という．

定義 2.10 高階書き換え系 $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ が子孫関係 $|\underline{\cdot}|$ を持つとする．

1. $\mathcal{SC}$ による書き換え $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} a \to_{\mathcal{SC}} b$ について，$|\underline{u}|$ が全単射であるとき u は線形 (linear) であるといわれる．また，系列 $v \stackrel{\mathrm{def}}{=} t \leftrightarrow_{\mathcal{SC}} \ldots \leftrightarrow_{\mathcal{SC}} s$ は，線形な書き換えで構成されているとき線形であるという．
2. 閉項の集合 S は，S のなかの項からなる任意の列 $s_1,\ldots,s_m$ と任意の m-引数文脈 $C[m]$ について，$C[s_1,\ldots,s_m]$ からはじまる任意の簡約列は線形のとき．線形であるといわれる．
3. 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ は，その書き換え規則の左辺を全て含むような線形な集合が存在するとき，線形であるといわれる．

定義 2.11 高階書き換え系 $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ が子孫関係 $|\underline{\cdot}|$ を持つとする．以下の条件を満足するとき，$\mathcal{H}$ は代入に関して自然に閉じている (naturally closed under substitution) という．

1. 任意の 2 引数の文脈 $C[,]$ と閉項 l，g について，$C[,l] \to_{\mathcal{SC}} D[]$ ならば $C[g,l] \to_{\mathcal{SC}} D[g]$.
2. $u[] : C[] \to_{\mathcal{SC}} D[]$ とする．そのとき，1 より $u[l] : C[l] \to_{\mathcal{SC}} D[l]$ である．出現 ϕ，ψ に対して，以下の 2 つの条件のいずれかが成り立つ事と，$\phi|\underline{u[l]}|\psi$ であることとは同値である．
   (a) $\phi|\underline{u[]}|\psi$.
   (b) $\phi = \phi';\chi$, $\psi = \psi';\chi$, $\phi' \in \Box\mathtt{Pos}(C[])$, $\psi' \in \Box\mathtt{Pos}(D[])$ かつ $\phi'|\underline{u[]}|\psi'$．ここで，$\Box\mathtt{Pos}(C[])$, $\Box\mathtt{Pos}(D[])$ は $C[]$，$D[]$ のなかの $\Box$ の出現である（定義 2.2 参照）.

定義 2.12 $\mathcal{H}$ を高階書き換え系，$\mathcal{U} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{u_1,\ldots,u_m\}$ を項 s 中の任意の相異なるリデックスの集合とし，$u_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\chi_i, l_i \to r_i)$ $(i = 1,\ldots,m)$ とする．拡張 $e : s \leftarrow^*_{\mathcal{SC}} C[l_1,\ldots,l_m]$ は以下の 2 つの条件が満足されるとき $\mathcal{U}$ の s から $C[m]$ への抽出とよばれる．

1. $C[m]$ は線形.

2. 任意の $u_i \in \mathcal{U}$ について，$\Box_m \mathrm{Pos}(C[m]);\mathrm{head}(l_i)$ は χ_i の祖先である．ここで，$\mathrm{head}(l_i)$ は l_i の頭部の出現である．

このような抽出が存在するとき，$\mathcal{U}$ は同時的な (simultaneous) リデックスの集合と呼ばれる．

定理 2.13 (van Oostrom [vO94b]) 以下の A.1 から A.8 の全てを満たすとき，高階書き換え系は合流性を持つ．

A.1 高階書き換え系 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ は完備である．

A.2 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ は，以下の条件を満たす．

1. $\mathcal{H}$ の書き換え規則の両辺は閉項である．
2. $\rightarrow_{\mathcal{H}}$ の定義に現れる置換で用いられる前文脈を，文脈に制限して得られる書き換え関係を $\rightarrow'_{\mathcal{H}}$ とすると，$\rightarrow_{\mathcal{H}}=\rightarrow'_{\mathcal{H}}$.

A.3 高階書き換え系 $\mathcal{H}$ は，以下の条件を満たす．すなわち，$\rightarrow_{\mathcal{H}}$ の定義に現れる置換で用いられる文脈を，線形なものに制限して得られる書き換え関係を $\rightarrow'_{\mathcal{H}}$ とすると，$\rightarrow_{\mathcal{H}}=\rightarrow'_{\mathcal{H}}$.

A.4 高階書き換え系 $\langle \mathcal{A}, \mathcal{SC}, \mathcal{R}\rangle$ の代入計算 $\mathcal{SC}$ は子孫書き換え系である．

A.5 高階書き換え系はパラメータ的かつ頭部定義である．

A.6 高階書き換え系は線形である．

A.7 高階書き換え系は代入に関して自然に閉じている．

A.8 高階書き換え系は同時的である．

証明 上記の条件から，有限展開定理（[vO94b] の定理 3.1.46）が示されることによる．詳しくは，[vO94b] を参照されたい． ∎

3 パターン高階書き換え系

本節に現れる定義は，基本的に [vO94b] に従う．

定義 3.1 単純型は，以下のように帰納的に定義される．

1. 基本型 o は単純型である．
2. σ, τ が単純型ならば，関数型 $\sigma \rightarrow \tau$ も単純型である．

単純型の集合を $\mathcal{T}$ であらわし，σ, τ, υ を単純型をあらわすのに用いる．

定義 3.2 単純型の上の関数 $\mathtt{arity}, \mathtt{order} : \mathcal{T} \rightarrow \mathbf{N}$ を以下のように定義する．

1. $\mathtt{arity}(o) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathtt{order}(o) \stackrel{\mathrm{def}}{=} 0$.
2. $\mathtt{arity}(\sigma \rightarrow \tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathtt{arity}(\tau)+1$, $\mathtt{order}(\sigma \rightarrow \tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} max\{order(\mathtt{order}(\sigma)+1, \mathtt{order}(\tau))\}$.

$\mathtt{arity}(s)$ を s の引数の数という．

定義 3.3 $\mathcal{A}$ をアルファベットとし，各定数および変数には，単純型が一意に割り当てられているとする．ただし，各々の型 σ に対して，型 σ を持つ無限個の自由変数および束縛変数が存在するとする．単純型付き原前項は，以下のように帰納的に定義される．

1. 型 σ の定数および変数は，型 σ の（原）前項である．
2. 原前項 s，t が各々型 $\sigma \rightarrow \tau$，σ を持つとき，$s(t)$ は型 τ の原前項である．
3. 原前項 s が型 τ を持ち，ξ が型 σ の束縛変数のとき，$\xi.s$ は型 $\sigma \rightarrow \tau$ の原前項である．

個々の原前項は一意な型をもつので，$\mathtt{arity}(s)$ を単純型付き原前項 s の型の引数の数として定義できる．単純型付き原前項は原前項の部分集合なので，原前項上の操作や概念は，単純型付き原前項に自然に拡張される．全ての単純型付き前項の集合を $\Lambda^{\rightarrow}$ であらわす．

厳密には，孔 $\Box_i$ $(i=1,\ldots)$ は，おのおのの型に対して存在を仮定する必要がある．型 σ の 孔を $\Box_i^{\sigma}$ であらわす．また，曖昧さがないときには，単に $\Box_i^{\sigma}$ を単に $\Box_i$ と書く．

以後本稿では，原前項，前項，項，文脈等は全て単純型付きであると約束する．

定義 3.4 s を原前項とし，x を自由変数とする．束縛変数 ξ が s に現れず，かつ s のなかに現れる x を全て ξ で置き換えて得られるものを s' とすると，$\xi.s$ は s の x- 閉包であるという．原前項 s の全ての x- 閉包を $\mathtt{clos}_x(s)$ であらわす．束縛変数列 $\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_1,\ldots,x_m$ に対して，s の σ- 閉包とは，s の x_m- 閉包，…，x_1- 閉包を順次とったものである．

定義 3.5 以下の書き換え規則を単純型付き原前項上に定義する．

1. $\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s_o \rightarrow s_1 \mid s_0, s_1 \in \mathtt{clos}_x(s)\}$.
2. $\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{s'(t) \rightarrow s[x:=t] \mid s' \in \mathtt{clos}_x(s)\}$.
3. $\eta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\xi.s(\xi) \rightarrow s\}$.

上記の書き換え規則 $\aleph$ $(=\alpha, \beta \text{ or } \eta)$ を原前項 s の部分項 s/ϕ に適用して t が得られるとき，$s \rightarrow_{(\phi,\aleph)} t$ と書く．さらに，$\rightarrow_{\aleph} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bigcup_{\phi\in\mathrm{Pos}} \rightarrow_{(\phi,\aleph)}$ と定義する．制限付き η- 拡張と呼ばれる書き換えを $\rightarrow_{(\phi,\bar{\eta})} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \leftarrow_{(\phi,\eta)} - \leftarrow_{\beta}$ と定義する．$\rightarrow_{\bar{\eta}}$ は ϕ について $\rightarrow_{(\phi,\bar{\eta})}$ の和をとったものである．書き換え関係 $\rightarrow_{\alpha} \cup \rightarrow_{\beta} \cup \rightarrow_{\bar{\eta}}$ で定義される書き換え系を $\lambda_{\bar{\eta}}$ であらわす．

以後本稿では，代入計算として $\lambda_{\bar{\eta}}$ のみを考える．したがって，項，文脈といったら，それは $\lambda_{\bar{\eta}}$- 正規形である．

以下の定理が，λ 計算の分野でよく知られている．例えば，[Wol93] Thm 2.35 および 2.38 を参照されたい．

定理 3.6 $\lambda_{\bar{\eta}}$ は完備である．

定義 3.7 $\lambda_{\bar{\eta}}$ に対して，それに対応する子孫書き換え系は，以下に定義される 3 項組 $\langle \lambda_{\bar{\eta}}, \mathcal{R}\mathrm{Pos}, |\underline{\cdot}|\rangle$ である．$\phi \in \mathcal{R}\mathrm{Pos}(s)$，$\psi \in \mathcal{R}\mathrm{Pos}(t)$ とすると，

1. $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} s \rightarrow_{(\epsilon,\alpha)} t$ ならば，$\phi|\underline{u}|\phi$.
2. $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} s'(t) \rightarrow_{(\epsilon,\beta)} s[x:=t]$ とする．そのとき，もし $s(\phi) \not\equiv x$ ならば $00\phi|\underline{u}|\phi$，さもなければ $1\psi|\underline{u}|\phi;\psi$.
3. $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} \xi.s(\xi) \rightarrow_{(\epsilon,\eta)} s$ ならば，$00\phi|\underline{u}|\phi$.
4. $u \stackrel{\mathrm{def}}{=} s \rightarrow_{(\epsilon,\bar{\eta})} t$ ならば $|\underline{u}| = |\underline{t \rightarrow_{(\epsilon,\eta)} s}|^{-1}$.

出現 ϵ 以外での書き換えに対しては，以下のように定義される．すなわち，$u \stackrel{\mathrm{def}}{=} s \rightarrow_{\phi,\aleph} t$，したがって $u' \stackrel{\mathrm{def}}{=} s/\phi \rightarrow_{\epsilon,\aleph} t/\phi$ であるとすると，そのとき，$\psi \not\geq \phi$ ならば $\psi|\underline{u}|\psi$，さもなければ $\psi = \phi;\psi'$ として $\psi|\underline{u}|\phi;\psi'' \Leftrightarrow \psi'|\underline{u'}|\psi''$.

以後，$\lambda_{\bar{\eta}}$ を代入計算としてもつ高階書き換え系には，暗黙のうちに上の子孫書き換え系が結びつけられているとする．

注意 3.8 引数の数 m の項 s' は常に $\xi_1,\ldots,\xi_m.a(s'_1)\ldots(s'_k)$ と書くことができる．ここで k は a の引数の数である．さらに，$s'_1,\ldots,s'_k$ も同様な形をしている．すなわち，s' はある項 $s \stackrel{\text{def}}{=} a(s_1)\ldots(s_k)$ の閉包である．$x_1,\ldots,x_m$ を s' のバインダといい，$a(s'_1)\ldots(s'_k)$ を s' のマトリックスという．また，a は s の頭部，$s_1,\ldots,s_k$ は s の引数と呼ばれる．なお，引数の数 k の記号が s' に現れるとき，その出現は $\phi;0^k$ となる．

定義 3.9 引数の数 m の 項 l' が，l の $x_1,\ldots,x_m$- 閉包であるとする．以下の条件を満足するとき l' はパターンと呼ばれる．

1. l の頭部は，演算子記号である．
2. 任意の x_i $(i=1,\ldots,m)$ について，x_i の引数の数を k とすると，
   (a) 少なくとも 1 回 x_i は l に現れる．
   (b) l の中の任意の x の出現 $\phi;0^k$ について，$l/\phi \equiv x_i(\xi_1{\downarrow_{\bar{\eta}}})\ldots(\xi_k{\downarrow_{\bar{\eta}}})$ である．ただし，$\xi_1,\ldots,\xi_k$ は相異なる束縛変数であり，$s{\downarrow_{\bar{\eta}}}$ は s の $\rightarrow_{\bar{\eta}}$- 正規形をあらわあす．

すべてのパターンの集合を $\mathcal{P}\mathrm{at}$ であらわす．また，上の (a) を“ちょうど 1 回 x_i は l に現れる”に置き換えて得られる条件を満足するものを線形パターンとよび，その集合を $\mathcal{LP}\mathrm{at}$ であらわす．

定義 3.10 すべての書き換え規則の左辺が（線形）パターンであるような書き換え規則を（線形）パターン規則と呼ぶ．全ての書き換え規則が（線形）パターン規則であり，代入計算が $\lambda_{\bar{\eta}}$ であるような高階書き換え系を，（線形）パターン高階書き換え系と呼ぶ．

定理 3.11 ([vO94b]) パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の規則の左辺の頭部を，注意 3.8 の意味での項 l の頭部として定義したとき，$\mathcal{H}$ は頭部定義である．

定義 3.12 $\aleph$，$\beth$ を線形パターン規則，$u \stackrel{\text{def}}{=} (\phi;0^m,\aleph)$，$v \stackrel{\text{def}}{=} (\psi;0^n,\beth)$ を項 s の中の相異なるリデックスとし，m，n をそれぞれ u, v の頭部記号の引数の数とする．

1. もし ϕ と ψ が独立ならば，u と v は独立であるという．
2. さもなければ一般性を失うことなしに $\psi \succeq \phi$ と仮定できる．規則 $\aleph$ の左辺 l' は l の $x_1,\ldots,x_n$- 閉包であるとする．
   (a) $\phi;\chi;\omega = \psi$ であるとき，u は v に入れ子しているという．ここで，$\chi;0^i$ は $x_1,\ldots,x_n$ のうちのどれかの l の中の出現である．
   (b) さもなければ，u は v に重なるという．

規則 $\aleph$，$\beth$ について，ある $\aleph$- リデックスと $\beth$- リデックスが重なるとき，$\aleph$ と $\beth$ は重なるという．高階書き換え系は重なる規則を持つとき，重なりをもつという．

4 文脈条件線形化

以下では，高階書き換え系をパターン高階書き換え系に限定する．

定義 4.1 項 l に自由変数 $x \in \mathrm{Fvar}(l)$ が，m 回 $(m>1)$ 現れるとし，$\{y_1,\ldots,y_m\} \cap (\mathrm{Fvar}(l) - \{x\}) = \emptyset$ とする．そのとき，項 l のなかの x の出現を，おのおの $y_1,\ldots,y_m$ で置き換えて得られる項 $\bar{l}$ を l の $\{y_1,\ldots,y_m\}$ による x- 線形化と呼ぶ．さらに，$x \equiv y_1$ であるとき，$\bar{l}$ は冗長でない線形化という．自由変数の列 $\sigma = x_1,\ldots,x_n$ について，l の $X_1,\ldots,X_m$ による σ- 線形化とは，l に X_m による x_m- 線形化，…，X_1 による x_1- 線形化を順次ほどこしたものである．

補題 4.2 A.2 を満足する任意のパターン高階書き換え系の書き換え規則 $l' \rightarrow r'$ について，$l' \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1\ldots\xi_m.F(t'_1)\ldots(t'_k)$ のとき，$r' \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1\ldots\eta_m.a(s'_1)\ldots(s'_n)$ と書く事ができる．このとき，$\mathtt{arity}(l') = \mathtt{arity}(r') = m$ である．さらに，l' が，$l \stackrel{\text{def}}{=} F(t_1)\ldots(t_k)$ の σ- 閉包であるとき，r' が $r \stackrel{\text{def}}{=} a(s_1)\ldots(s_n)$ の σ- 閉包となるような r が存在する．

定義 4.3 A.2 を満足する任意のパターン高階書き換え系の書き換え規則 $\aleph \stackrel{\text{def}}{=} l' \rightarrow r'$ に対して，以下の 3 ステップによって得られる $\hat{\aleph} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{l}' \rightarrow \hat{r}' \Leftarrow Q$ は，$\aleph$ の文脈条件線形化と呼ばれる．

1. $l' \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1\ldots\xi_m F(t'_1)\ldots(t'_k)$ を $l \stackrel{\text{def}}{=} \xi_1\ldots\xi_m.F(t'_1)\ldots(t'_k)$ の $x_1,\ldots,x_m$- 閉包，$\hat{l}$ を l の $X_1,\ldots,X_m$ による $x_1,\ldots,x_m$- 線形化とし，$X_i \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i^1,\ldots,x_i^{j(i)}\}$ とする．そのとき，$\hat{l}'$ は $\hat{l}$ の $\hat{\sigma}$- 閉包である．ここで，$\hat{\sigma} = x_1^1,\ldots,x_1^{j(1)},x_2^1,\ldots,x_2^{j(2)},\ldots,x_m^1,\ldots,x_m^{j(m)}$，すなわち $X_1,\ldots,X_m$ にあらわれるすべての変数の列である．
2. $r' \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1\ldots\eta_m.a(s'_1)\ldots(s'_n)$ は r の $x_1,\ldots,x_m$- 閉包であるとする．このとき，$\hat{r}'$ は r の $\hat{\sigma}$- 閉包である．ここで，$x_1,\ldots,x_m$ および $\hat{\sigma}$ は 1 で用いたものと同じである．
3. $\hat{\sigma}$ を新たに $z_1,\ldots,z_{\hat{m}}$ $(\hat{m} = \Sigma_{1\leq i\leq m} j(i))$ と書き直す．Q は以下のように定義される自然数の部分集合の列 $N_1,\ldots,N_m$ である．

$$X_i = z_j,\ldots,z_{j+j'} \text{ ならば } N_i = \{j,\ldots,j+j'\}$$
$$(1 \leq i \leq m).$$

文脈条件線形化規則 $\hat{\aleph} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{l}' \rightarrow \hat{r}' \Leftarrow Q$ の Q を条件部分と呼び，$\hat{l}' \rightarrow \hat{r}'$ を非条件部分と呼ぶ．高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ とは，$\mathcal{H}$ の書き換え規則の各々を，その文脈条件線形化で置き換えたものである．

補題 4.4 文脈 $C[\,]$ に引数の数 m の孔 $\Box^\sigma$ が現れるとする．そのとき，任意の $\psi \in \Box\mathrm{Pos}(C[\,])$ に対して ψ' と原項 $s_1,\ldots,s_m$ が存在して $\psi = \psi';0^m$ かつ $C[\,]/\psi' \equiv \Box(s_1)\ldots(s_m)$.

定義 4.5 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ の書き換え関係は，定義 2.4 の後半を $\hat{\mathcal{H}}$ の規則の非条件部分に適用したものとして定義される．ただしその適用は，以下の条件を満足する場合に限定する．すなわち，文脈条件書き換え規則 $\aleph : \hat{l} \rightarrow \hat{r} \Leftarrow N_1,\ldots,N_m$ の 左辺 $\hat{l}$ の引数の数が $\hat{m}$ であり，定義 2.4 に現れる前文脈 $C[\,]$ の $\lambda_{\bar{\eta}}$- 正規形が $C[\,]\downarrow$ であるとき，

任意の $\psi; 0^{\hat{m}} \in \Box\mathrm{Pos}(C[\,]\downarrow)$ と任意の N_i $(i = 1,\ldots,m)$ について，$N_i = \{j,\ldots,j+j'\}$ ならば $s_j \leftrightarrow^*_{\mathcal{H}} s_{j+1} \leftrightarrow^*_{\mathcal{H}} \cdots \leftrightarrow^*_{\mathcal{H}} s_{j+j'}$．ここで，$C[\,]\downarrow/\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Box(s'_1)\ldots(s'_{\hat{m}})$，$\bigcup_{1\le i\le \hat{m}} \mathtt{UBvar}(s'_i) = \{\eta_1,\ldots,\eta_n\}$ かつ $y_1,\ldots,y_n$ は $s'_1,\ldots,s'_{\hat{m}}$ にあらわれない自由変数の集合であり，$j = 1,\ldots,\hat{m}$ について，s_j は s'_j のなかにあらわれる $\eta_1,\ldots,\eta_n$ をおのおの $y_1,\ldots,y_n$ で置き換えてえられるものである．

この条件を文脈条件と呼び，$C[\,]$ は $\aleph$ の文脈条件を満足するという．

定義から明らかに，文脈条件線形化の書き換え規則の非条件部分は，線形パターン規則である．また，束縛変数の名前替えをのぞいて一意に定まる．

補題 4.6 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ とする．そのとき，

1. $\rightarrow_{\mathcal{H}} \subseteq \rightarrow_{\hat{\mathcal{H}}}$，かつ
2. $\leftrightarrow^*_{\mathcal{H}} = \leftrightarrow^*_{\hat{\mathcal{H}}}$．

証明 1. は $\mathcal{H}$ の各々の規則の左辺が，その右辺に $\hat{\mathcal{H}}$ で書き換えられることによる．2. は，定義 4.5 より明らかである． ∎

文脈条件線形化 $\mathcal{H}$ では，規則の左辺を抽出できても，文脈条件が満足されない限りそれを置換することはできない．次の補題は，文脈の書き換えによって文脈条件が保存されることを示す．

補題 4.7 文脈 $C[\,]$ が パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ の規則 $\aleph$ の文脈条件を満足するとする．そのとき，$C[\,] \leftrightarrow^*_{\mathcal{H}} C'[\,]$ ならば $C'[\,]$ も $\aleph$ の文脈条件を満足する．

証明 定義 4.5 より． ∎

定義 4.8 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ の非条件部分が重なりを持たないとき，$\hat{\mathcal{H}}$ は重なりを持たないという．

定理 4.9 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ が重なりを持たないならば，$\hat{\mathcal{H}}$ は合流性を持つ．

証明 補題 4.7 を用いて，[vO94b] の定理 3.1.46 に対応する定理が証明できることによる． ∎

補題 4.10 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化を $\hat{\mathcal{H}}$ とする．もし $\mathcal{H}$ が合流性を持つならば，$\mathcal{H}$ の正規形の集合と $\hat{\mathcal{H}}$ の正規形の集合は一致する．

証明 項の大きさの上の帰納法による． ∎

定理 4.11 ([dV90], [Che81]) 書き換え関係 $\rightarrow_0$，$\rightarrow_1$ について，

1. $\rightarrow_1 \subseteq \rightarrow_0$，
2. $\rightarrow_1$ は合流性をもつ．
3. $\rightarrow_1$ の正規形の集合は，$\rightarrow_0$ の正規形の集合を含む．

そのとき，$\rightarrow_1$ は単一正規形性を持つ．

定義 4.12 パターン高階書き換え系 $\mathcal{H}$ の文脈条件線形化 $\hat{\mathcal{H}}$ が重なりを持たないとき，$\mathcal{H}$ は強非重なりであるという．

定理 4.13 強非重なりなパターン高階書き換え系は単一正規形性を持つ．

証明 補題 4.6, 4.10，定理 4.9，4.11 より． ∎

例 4.14 型無し λ 計算は，以下のようにして高階書き換え系に翻訳することができる [vO94b]．まず，型のない λ 項を $\Lambda^{\rightarrow}$ の中で表現するため，新たな定数 $\mathtt{abs} : (o \rightarrow o) \rightarrow o$, $\mathtt{app} : o \rightarrow (o \rightarrow o)$ を導入する．このとき，型無し λ 計算の β 規則は，以下のような高階書き換え系の規則に翻訳される．

$$\mathtt{beta} : \xi.\eta.\mathtt{app}(\mathtt{abs}(\zeta.\xi(\zeta)))(\eta) \rightarrow \xi.\eta.\xi(\eta)$$

さらに，以下の書き換え規則を考える．

$$\mathtt{D} : \xi.\mathtt{app}(\mathtt{app}(D)(\xi))(\xi) \rightarrow \xi.E$$

これは，[Klo92] 等にあらわれる書き換え規則 $Dxx \rightarrow E$ を高階書き換え系に翻訳したものである．このとき，$\mathcal{R} = \{\mathtt{beta}, \mathtt{D}\}$ によって定義されるパターン高階書き換え系が強非重なりであることは容易に確かめられる．よって，単一正規形性を持つ．

参考文献

[Che81] P. Chew. Unique normal forms in term rewriting systems with repeated variables. In *the 13th STOC*, pp. 7–18, 1981.

[dV90] R. C. de Vrijer. Unique normalforms for combinatory logic with parallel conditional, a case study in conditional rewriting. Technical report, Free University, Amsterdam, 1990.

[Klo80] J. W. Klop. Combinatory reduction systems, 1980. PhD thesis, Rijks universiteit Utrecht.

[Klo92] J. W. Klop. Term rewriting systems. In D. Gabbay S. Abramsky and T. Mainbaum, editors, *Handbook of Logic in Computer Science*, volume 2, pp. 1–112. Oxford University Press, 1992.

[MO95] K. Mano and M. Ogawa. A new proof of Chew's theorem. 書き換えシステムとその応用, pp. 160–177, 1995. (数解研講究録 918).

[Nip91] T. Nipkow. Higher-order critical pairs. In *LICS*, pp. 342–349, 1991.

[TO94] Y. Toyama and M. Oyamaguchi. Church-Rosser property and unique normal form property of non-duplicating term rewriting systems. In *CTRS '94*, pp. 316–331, 1994.

[vO94a] V. van Oostrom. Confluence by decreasing diagrams. *TCS*, Vol. 126, pp. 259–280, 1994.

[vO94b] V. van Oostrom. Confluence for abstract and higher-order rewriting, 1994. PhD thesis, Vrije universiteit, Amsterdam. [vO94c], [vO94a] も参照されたい．

[vO94c] V. van Oostrom. Weak orthogonality implies confluence: The higher-order case. In *3rd Int. sympo. on Logical Foundations of Computer Science*, pp. 379–392, 1994.

[Wol93] D. A. Wolfman. *The Clausal Theory of Types*. Cambridge University Press, 1993.