

## Runge-Kutta 法に関する二三の

## 話題について

田中正次 山下茂 山下忠志 加藤武彦

石原肇樹 奥宮常義 (山梨大工)

## 1. 5 次陽的 Runge-kutta 法の新しい解系

## 1.1 5 次陽的 Runge-kutta 法

常微分方程式の初期値問題  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  が与えられたとき、

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^5 R_i k_i \quad k_i = h_n f(x_n + a_i, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad (a_0 = b_{10} = 0) \quad (1)$$

を 6 段数陽的 Runge-kutta 法という。これが 5 次法であるために係数が満たさなければならない条件式は、21 個の未知数を含む 16 個の連立方程式である。

## 1.2 次数条件式の解

 $R_2 = 0$  の場合の Cassity ([1]) の解系において分母が零になる条件は、

$$(I) \quad a_6 = 1 \text{ のとき } a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1, a_3 = a_4, a_3 = a_5,$$

$$a_4 = a_5, 30a_3a_4a_5 - 20(a_3a_4 + a_3a_5 + a_4a_5) + 15(a_3 + a_4 + a_5) - 12 = 0,$$

$$10a_3a_5 - 5(a_3 + a_4) + 3 = 0$$

$$(II) \quad a_4 = a_3 / (10a_3^2 + 8a_3 + 2) \text{ のとき } a_2 = 0, a_3 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0, a_3 = a_5, a_3 = a_6,$$

$$a_5 = a_6, 50a_3^2 - 4a_3 + 1 = 0, 10a_3^2 - 8a_3 + 1 = 0, 10a_3^2 - 12a_3 + 3 = 0,$$

$$10a_3^2a_5 - 8a_3a_5 - a_3 + 2a_5 = 0, 10a_3^2a_6 - 8a_3a_6 - a_3 + 2a_6 = 0,$$

$$20a_3a_5 - 15a_3 - 10a_6 + 8 = 0$$

上の条件のうち少なくとも 1 つが満たされると、解系の分母が零になってしまう。従って、これらの条件をもとの次数条件式群に付加して解くことにより、新しい解系が得られる。このうち次の 5 つの場合について解系が得られた。

$$I) \quad a_6 = 1 \text{ の場合 } (i) \quad a_5 = 0 \quad (ii) \quad a_4 = 1$$

$$II) \quad a_4 = a_3 / (10a_3^2 + 8a_3 + 2) \text{ の場合 } (iii) \quad a_5 = a_6 \quad (iv) \quad a_4 = a_6 \quad (v) \quad a_6 = 0$$

得られた解系が正しいことは、REDUCE 3.0 を用いて確認されている。

## 1.3 解系の安定性と打ち切り精度の関係

1.3.1 安定性 リスト方程式  $y' = \lambda y$  ( $\lambda$  は複素数) を公式 (1) に代入し、5 次法の条件式群を用いて整理すると、

$$y_{n+1} = P(\lambda h, r_0) y_n \quad P(\lambda h, r_0) = \sum_{k=0}^5 (r_k \lambda)^k / k! + r_6 (\lambda h)^6 / 6! \\ r_6 = 6! b_{21} b_{32} b_{43} b_{54} b_{65} R_6 \quad (2)$$

が得られる。このとき  $S(r_0) = \{\lambda h \mid |P(\lambda h, r_0)| \leq 1, \lambda h \text{ は複素数}\}$  によって定義される複素平面上的開領域を公式 (1) の絶対安定領域という。便宜上、原点を含む単連結な絶対安定領域を  $\bar{S}(r_0)$  とし、その面積を  $S_a$  とする。又  $R$  を実数全体の集合とすると、 $S_2(r_0) = R \cap \bar{S}(r_0)$  によって定義される閉区間  $[d, 0.0]$  を公式 (1) の絶対安定区間という。

1.3.2 打ち切り誤差とその判定基準 公式 (1) の局所打ち切り誤差を  $T$  とすれば、 $T = \tau_5 h n^6 + O(h n^7)$  と表わされる。ここで、

$$\tau_5 = a_{51} D^5 f + a_{52} f_y D^4 f + a_{53} f_y^2 D^3 f + a_{54} f_y^3 D^2 f + a_{55} f_y^4 D f + a_{56} D^2 f D f_y + a_{57} f_y D^2 f D f_y \\ + a_{58} f_y^2 D f D f_y + a_{59} D^3 f_y D f + a_{510} f_y D^2 f_y D f + a_{511} D^2 f_y D^2 f + a_{512} f_y D^2 f D f \\ + a_{513} f_y f_{yy} (D f)^2 + a_{514} D f_{yy} (D f)^2 + a_{515} (D f_y)^2 D f \quad (3)$$

ただし  $D = \partial/\partial x + f \partial/\partial y$  であり、また  $a_{5j}$  ( $j=1, 2, \dots, 15$ ) は公式の係数のみに依存する関数である。このとき打ち切り精度判定基準として  $A_{53} = \sum_{j=1}^{15} a_{5j}^2$  を使用する。([2])

1.3.3 安定性と打ち切り精度の関係 各解系は  $a_i, b_i, R_i$  を自由パラメータとして持っている。そこで  $\sigma_0 = \text{一定}$  という条件の下で最適化の手法を用いて  $A_{53}$  を最小にする制約付き最小化を行う。Fig. 1 は、横軸に  $\sigma_0$ 、縦軸に  $A_{53}$  の下限の常用対数、 $S_2(\sigma_0)$  の下限の絶対値及び  $S_a$  をと、(i) の解系についてそれらの相互関係を図示したものである。又 Fig. 2 も同様に座標軸をとり、(ii) の解系について安定性と打ち切り精度の関係を図示したものである。

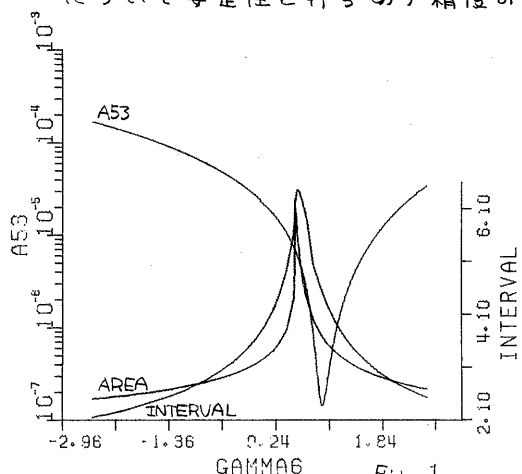


Fig. 1

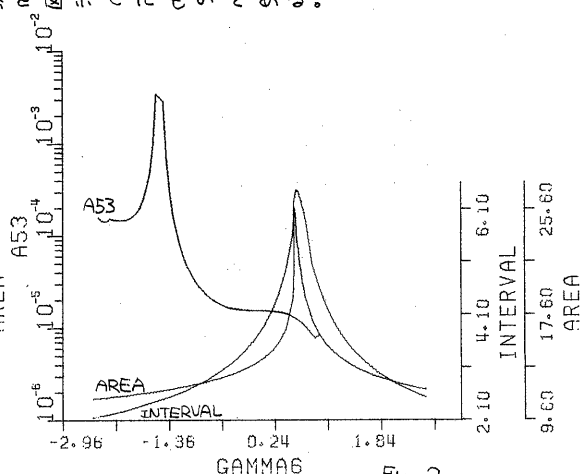


Fig. 2

#### 1.4 数値例

(i) の解系に属する公式のうち (I)  $S_a$  最大 (II)  $A_{53}$  の下限最小 (III) (I) と (II) の中間の公式、又 (ii) の公式として  $A_{53}$  の下限最小の公式を選び、又比較のために Butcher の打ち切り精度最良の公式を選んでいくつかの例題について数値実験を行った。Table 1 は、 $y' = -x^2 y^2 / 3$   $y(2) = 1$  (解  $y = 9 / (x^3 + 1)$ ) を各公式を用いて刻み幅 0.1 で 50 ステップ積分したと

Table 1

その第 1 ステップ及び最終ステップの誤差、最大誤差である。この結果は多くの数値例にみける誤差の傾向を良く表している。

|               | 1ステップの誤差     | 最終ステップの誤差    | 最大誤差         |
|---------------|--------------|--------------|--------------|
| $a_6 = 0$     | .2581886E-07 | .3333777E-09 | .4621649E-07 |
| $a_5 = 0$ (I) | .9319901E-07 | .1077276E-08 | .1598854E-06 |
| (II)          | .7705453E-08 | .9285953E-10 | .1290616E-07 |
| (III)         | .4199623E-07 | .4988915E-09 | .7237306E-07 |
| Butcher       | .1606607E-07 | .8693575E-10 | .2403288E-07 |

#### 1.5 まとめ

1. Cassity の  $R_2 = 0$  の解系について、分母が零になる条件を明らかにした。
2.  $a_5 = 0, a_6 = 0$  のそれぞれの場合において、最適化の結果得られた公式と既知公式との間に差がほとんどないことから、Cassity のもとの解系に比べると新しい解系は良くないと思われる。
3. 今後はできる限り多くの新解系を導き、Cassity による旧解系と新解系の最適化を行いその両者を比較したい。

(文献)

[1] C.R.Cassity, The Complete Solution of The Fifth-Order Runge-kutta Equations. SIAM J. on Numerical Analysis, Vol. 6, No.3, pp. 432-436 (1969)

[2] 田中正次, 山下茂, 田中後保彦, 尾崎実, 5次陽的 Runge-kutta 法の特性的比較と最適化 数値解析研究所集録 422, pp. 37-58 (1981)

## 2. Runge-Kutta法の診断ルーチンDREKFFについて

任意の  $m$  段陽的 Runge-Kutta 法  $k_i = hf(x_n + a_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j)$ ,  $q_i = b_{i0} = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )  
 $y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m c_i k_i$  (1) に対して, その様々な特性を診断する会話型ルーチンDREKFF  
 (Diagnostic Routine for Explicit Runge-Kutta Formulas) が開発された。このプログラ  
 ムは MELCOM 拡張FORTRANで書かれ, その全文は約 2000 ステップに及ぶ。以下の概要を述べ  
 る。このルーチンは, 与えられた公式に対して (i) 公式の係数の簡単なチェック,  
 (ii) 次数の判定, (iii) 局所打ち切り誤差と同判定基準, 丸め誤差判定基準の出力,  
 (iv) 安定多項式, 絶対安定区間, 絶対安定領域のグラフ及び面積の出力 等を行  
 うものである。

・入力データ 公式の係数と段数。係数は小数型と分数型に分けられ, その各  
 つはまた無理数を含むものと含まないものに分けられる。入力された係数は  
 $a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij}$ ,  $\sum_{i=1}^m c_i = 1$  を満足するかどうかチェックされ, 誤りの有無が出力され  
 る。誤りがあればその旨を指摘して Stop する。

・次数の判定<sup>1)</sup> 単一微分方程式, 連立微分方程式の何れの場合に対する判定を  
 望むかを入力すれば, 指定された場合について係数が何次までの次数条件式を満足  
 するか調べられる。次数条件式の残差が  $10^{-8}$  未満ならばその条件式は成立したとす  
 る。各段数に対して到達可能な最大次数が得られているときは, 公式は normal であ  
 る。なければ abnormal と出力される。

・局所打ち切り誤差とその大小の判定基準の出力<sup>2)</sup> 紙面の関係で詳述は避ける  
 が, 単一または連立微分方程式の何れについて診断を求めるかに従い, それぞれの場合  
 の局所打ち切り誤差とその大小の判定基準が出力される。

・丸め誤差判定基準の出力<sup>2)</sup> 丸め誤差に関する性質を判断するため次の数量  $R$   
 が計算され出力される。  $R = \sum_{i=1}^m |c_i| + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{i-1} |b_{ij}|$  (2)

・安定多項式の出力<sup>3)</sup>  $m$  段  $p$  次法の場合  $\sum_{k=0}^p \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \sigma_{PH} \cdot \frac{(h\lambda)^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + \sigma_m \cdot \frac{(h\lambda)^m}{m!}$  (3) が出力される。

・絶対安定領域のグラフ, 面積及び絶対安定区間の出力<sup>3)</sup> 絶対安定領域のグラフ  
 が描かれ, 原点を含む単連結な領域についてその総面積 AREA, 第1象限及び第4  
 象限にはみ出した部分の面積 AREA1, AREA2 = AREA - AREA1 が出力される。また  
 絶対安定区間 (= AREA の実数部分) が出力される。

本ルーチンの使用により, E. B. Shanks<sup>4)</sup> が 10 段 8 次法とよんでいる公式が 7 次法で  
 あることが確認された。

この診断ルーチンの収率は, 任意の公式の特性と同段数の標準的な既知公式の  
 特性を同時に表示し, 任意の公式の特性の評価を直観的に可能にすることにある。  
 またあらゆる Runge-Kutta 公式のデータベース化の一つの step でもある。現実 1 次から 7  
 次までは問題ないが (多分連立方程式については 1 次から 8 次までよいと思われるが),  
 多くとも 8 次法までは信頼できるものはない。次に診断プログラムの使用例と  
 して Heun の 2 次法に関する結果を示そう。

文献

1. D. Jacobs (ed.), The State of the Art in Numerical Analysis, Part IV Ordinary Differential Equations and Quadrature (J. D. Lambert), Academic Press, 1977
2. 田中他, 5 次陽的 Runge-Kutta 法の特性の比較と最適化, 数理解析研究所研究報 422, 1981
3. J. D. Lambert, Computational Methods in Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, 1973
4. E. B. Shanks, Solution of differential equations by evaluations of functions, Math. Comp. Vol. 20, No. 93, 1966

使用例

例えばHeunの公式

1  
2/3 | 2/3

-----  
1 | 1/4 3/4

を、入力してみる。

Do you want to write the name of input formula (Y or N) ? Y

Please input the name! Heun

How many stages ? 2

Which is the type of input data , fraction or decimal (F or D) ? F

Are irrational numbers in the data (Y or N) ? N

the numerator of A( 2 )= 2

the denominator of A( 2 )= 3

the numerator of B( 2 1 )= 2

the denominator of B( 2 1 )= 3

the numerator of C( 1 )= 1

the denominator of C( 1 )= 4

the numerator of C( 2 )= 3

the denominator of C( 2 )= 4

This formula is 2nd (LE.4) order method.

Therefore, I cannot judge that it is for systems of D.E. or simple

Please input (R or T) ! R

以上の入力が終わると、以下の診断結果が得られる。

\*\*\*\*\* THE DIAGNOSIS \*\*\*\*\*

----- INPUT DATA -----

\* Heun-formula

\* stages ----- 2

\* formula -----

2/3 | 2/3  
-----  
1 | 1/4 3/4

\* check -----

This formula is perfect ! It has no error !

----- ORDER -----

The result of test, this formula satisfied  
conditional equations of 2 nd order for systems of D.E.

Therefore, this formula is 2 stage 2 nd order  
explicit Runge-Kutta formula for systems of D.E.

\* check -----

This formula is normal !

For a 2 stage method, the best possible order is 2 !

----- TRUNCATION ERROR -----

\* for systems of D.E.

T2 = G2 \* Hn\*\*3 + O( Hn\*\*4 )

G2 =

+ a 2 1 \* f'(f,f)  
+ a 2 2 \* f'(f'(f))

: a 2 1 = .69384939039072289E-17  
: a 2 2 = .16666666666666666E+00

----- CRITERIA OF THE SIZE OF TRUNCATION ERROR -----

\* for systems of D.E.  
 \* A 2 2 = \$( i=1,2 ) | a 2 i |  
 \* A 2 3 = \$( i=1,2 ) a 2 i \*\*2 @ where, \$ denotes 'SIGMA'  
 A 2 2 = .1666666666666666E+00  
 A 2 3 = .2777777777777777E-01

----- CRITERION OF ROUND-OFF ERROR -----

\* for systems of D.E.  
 R = \$( i=1,2 ) |C1| + \$( i=2,2 ) \$(j=1,1-1) |B1j| @ where, \$ denotes 'SIGMA'  
 R = .1416666666666666E+01

----- POLYNOMIAL OF STABILITY -----

PP( 2 2 )=1+Z+Z\*\*2/2!

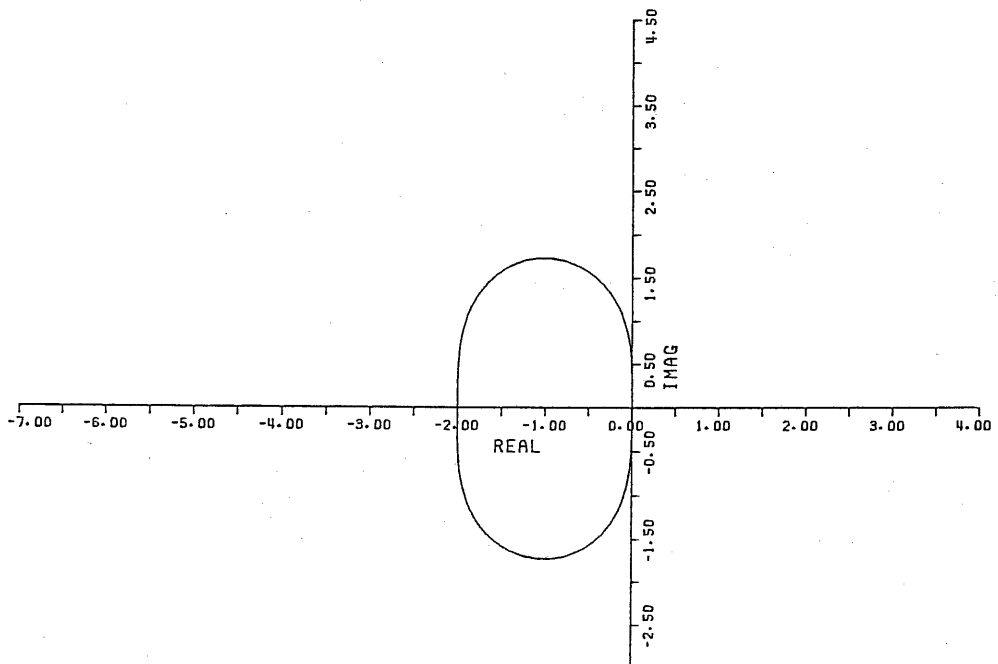
----- THE AREA OF THE REGION OF ABSOLUTE STABILITY -----

\* AREA ; the area of the region of absolute stability  
 \* AREA 1 ; the area of the non-effective region of absolute stability  
 (in the first and the forth quadrant)  
 \* AREA 2 ; the area of the effective region of absolute stability  
 AREA = 5.86869924820757690  
 AREA 1 = .00000020586098893  
 AREA 2 = 5.86869904224658890

----- THE INTERVAL OF ABSOLUTE STABILITY -----

( -1.99999704743720560 .00000000000000000 )

----- THE REGION OF ABSORUTE STABILITY -----



### 3. 10段数陽的 Runge-Kutta 法の安定性について

3.1 まえがき 我々はこれまで5段4次法から9段7次法に及ぶ様々な段数及び次数の方法の安定性について研究してきた。そして特に多くの既知公式が存在している5, 6次法については、打ち切り誤差及び安定性の両面から若干実用的に意味のある提案を行うことができたと思ふ。<sup>(1,2)</sup>今回は10段公式について報告する。

3.2 10段数陽的 Runge-Kutta 法 与えられた初期値問題を  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  (3.2-1) とし,  $f(x, y)$  は十分滑らかと仮定しよう。そのとき10段数陽的 Runge-Kutta 法の一般形は次のように表される。

$$k_i = h_n f(x_n + a_i h_n, y_n + \sum_{j=0}^{i-1} b_{ij} k_j) \quad a_i = b_{i0} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m c_i k_i \quad h_n = x_{n+1} - x_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.2.2)$$

10段法の具体的な公式として E. B. Shanks<sup>(3)</sup> による10段8次法があるが、我々の診断ルーチンによればこれは比較的精度の高い7次法である。<sup>(4)</sup>10段で8次の精度が可能であるかどうかは未だ知られていない。以下10段数陽的 Runge-Kutta 法を10段法と略称する。

3.3 10段法の安定性 安定性の取扱いは次数によって異なるので、ここでは二つの可能性を考慮する必要がある。すなわち公式が実在する7次法と、おぼつとすると架空の仮定があるかもしれない8次法である。まず取扱いが容易な8次法から考えよう。

3.3.1 安定性に関する諸概念 慣例にしたがい、テスト方程式  $y' = \lambda y$ ,  $\lambda$  は複素定数 (3.3-1) を用いて安定性に関する諸概念を導入しよう。公式 (3.2.2) をテスト方程式 (3.3-1) に代入し、次数条件式を用いて簡単化すると次式が得られる。

$$y_{n+1} = p(h\lambda, \gamma_8, \gamma_{10}) y_n \quad (3.3.2)$$

ここで  $p(h\lambda, \gamma_8, \gamma_{10})$  は  $h\lambda$  の10次式で次式によって与えられる。

$$p(h\lambda, \gamma_8, \gamma_{10}) = \sum_{k=0}^8 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \gamma_8 \cdot \frac{(h\lambda)^9}{9!} + \gamma_{10} \cdot \frac{(h\lambda)^{10}}{10!} \quad (3.3.3)$$

(3.3.3) 式によって与えられる  $h\lambda$  の多項式  $p(h\lambda, \gamma_8, \gamma_{10})$  を10段8次法の安定多項式という。また次式によって定義される  $S(\gamma_8, \gamma_{10})$  を10段8次法の絶対安定領域という。

$$S(\gamma_8, \gamma_{10}) = \{ h\lambda \mid |p(h\lambda, \gamma_8, \gamma_{10})| \leq 1, h\lambda \text{ は複素数} \} \quad (3.3.4)$$

$S(\gamma_8, \gamma_{10})$  の中で、安定性の面で特に重要な原点を含む単連結な閉領域を  $\bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10})$  と表すことにする。そのとき次式によって定義される実軸上の区間  $S_I(\gamma_8, \gamma_{10})$  を10段8次法の絶対安定区間という。

$$S_I(\gamma_8, \gamma_{10}) = R \cap \bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10}) \quad (3.3.5) \quad \text{ただし}$$

$R$  は実数全体の集合である (Fig. 1 を見よ)。

$S_a$  を  $\bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10})$  の面積,  $S_1, S_2, S_3$  及び  $S_4$  をそれぞれ  $\bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10})$  の中央部の面積, 左側のくびれた部分の面積, 第1象限への突出部の面積及び第4象限への突出部の面積としよう (Fig. 2 を見よ)。

そのとき

$$S_a = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \quad (3.3.6)$$

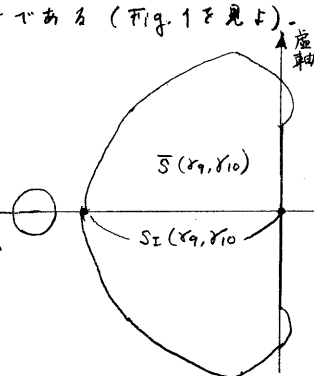


Fig. 1  $\bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10})$  と  $S_I(\gamma_8, \gamma_{10})$

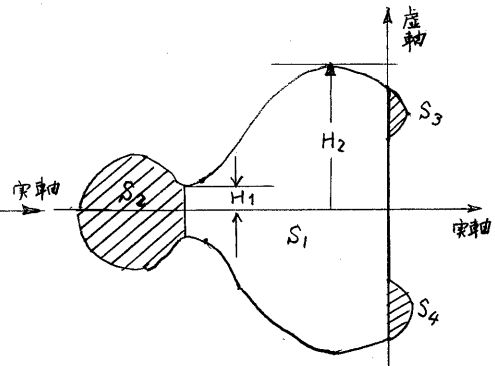


Fig. 2  $\bar{S}(\gamma_8, \gamma_{10})$  の有効面積

$\bar{S}(\gamma_9, \gamma_{10})$  の中で安定性にとって有効な面積  $S_a'$  を次のように定義しよう。

(i)  $H_1/H_2 < 0.1$  ならば  $S_a' = S_1$  (3.3.7) (ii)  $H_1/H_2 \geq 0.1$  ならば  $S_a' = S_1 + S_2$   
 ただし  $H_1$  及び  $H_2$  はそれぞれ  $\bar{S}(\gamma_9, \gamma_{10})$  の境界上の点の虚部の絶対値の最小と (3.3.8)  
 最大である。

3.3.2 10段8次法の安定性 紙面の都合で詳述はしない。パラメータ  $\gamma_9, \gamma_{10}$  を一定区間において固定刻みで動かしたときに得られるすべての二次元格子点  $(\gamma_9, \gamma_{10})$  について、 $S_a, S_a', S_E$  を計算し、それぞれが最大となる格子点を求めるメツシユ法、 $\gamma_9, \gamma_{10}$  を両軸として  $S_a$  の等高線図を描き、最適パラメータの存在範囲をしぼる等高線図法、 $\max S_E$  を与える安定多項式  $p(\lambda, \gamma_9, \gamma_{10})$  のグラフが  $y = \pm 1$  に接することから得られる非線形連立方程式を解いてパラメータを決定する方法などを併用し、また低段数の探査結果から得られた知識を参考にして、絶対安定区間  $S_E$  を最大にするパラメータ及び  $S_a, S_a'$  をほぼ最大にするパラメータを求めた。その結果を下図に示す。

$\gamma_9 = 0.762313, \gamma_{10} = 0.2751203$  で絶対安定区間は最大となりその値は  $[-10.15, 0.0]$  となる。Fig. 3 にこれに対応する安定多項式のグラフ及び絶対安定領域が示される。また  $\gamma_9 = 0.8125, \gamma_{10} = 0.34$  で  $S_a$  及び  $S_a'$  がほぼ最大となり、その他は  $S_a = 58.3, S_a' = 58.2$  となる。Fig. 4 にこれに対応する絶対安定領域のグラフが示される。

8次法の場合

8次法の場合

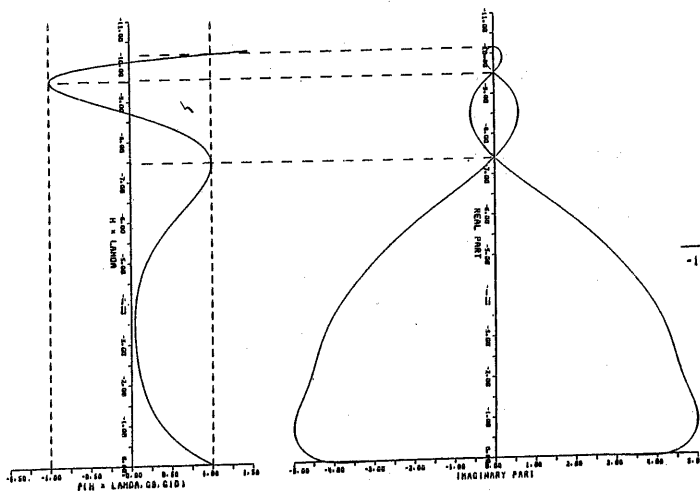


Fig. 3 最大絶対安定区間に対応する安定多項式のグラフと絶対安定領域

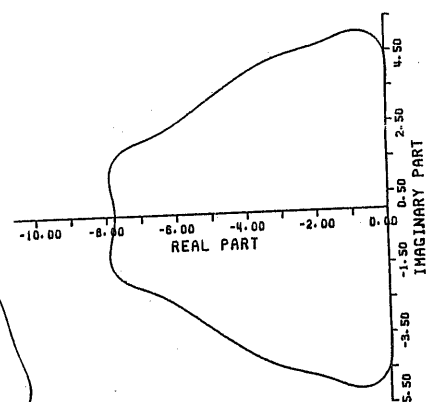


Fig. 4  $S_a, S_a'$  がほぼ最大となる場合の  $\bar{S}(\gamma_9, \gamma_{10})$

3.3.3 10段7次法の安定性 この場合安定多項式は  $p(\lambda, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10}) = \sum_{k=0}^7 \frac{(h\lambda)^k}{k!} + \sum_{i=2}^{10} \gamma_i \frac{(h\lambda)^i}{i!}$  となる。10段7次法の安定性に関する諸概念は、10段8次法の各定義式 (3.3.9) において  $p(\lambda, \gamma_9, \gamma_{10})$  を  $p(\lambda, \gamma_8, \gamma_9, \gamma_{10})$  で1つとして置き換えれば得られる。この場合における最適パラメータの探査は、等高線図法が使えないことと俾いて8次法と同様である。得られた結果を次に示す。

$\gamma_8 = 0.87032367, \gamma_9 = 0.505478, \gamma_{10} = 0.1347$  で絶対安定区間はほぼ最大となりその値は  $[-12.0, 0.0]$  となる。これに対応する安定多項式のグラフと絶対安定領域をFig. 5に示す。また  $\gamma_8 = 0.87, \gamma_9 = 0.515, \gamma_{10} = 0.145$  で  $S_a$  がほぼ最大となり、その値は  $S_a = 72.2$  である。Fig. 6 にこれに対応する絶対安定領域を示す。

7次法の場合

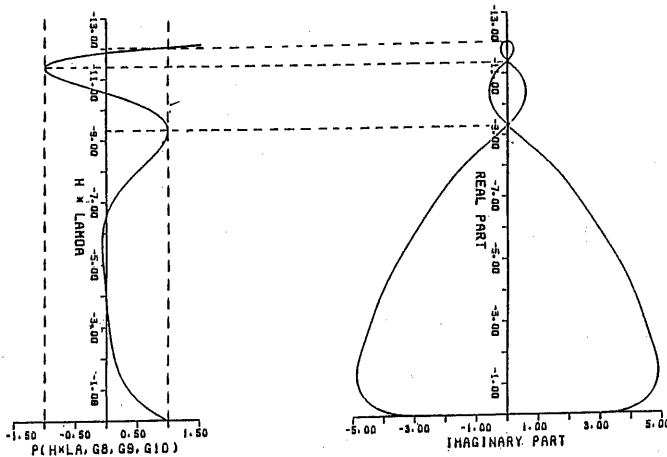


Fig. 5 最大絶対安定区間に対応する安定多項式のグラフと絶対安定領域

7次法の場合

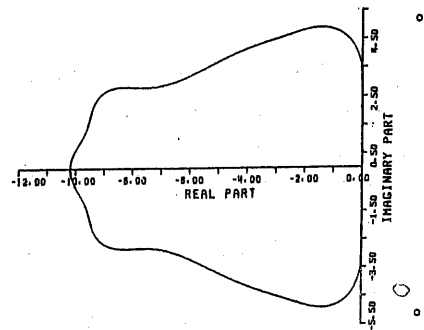


Fig. 6  $S_a$  がほぼ最大となる場合の  $\bar{S}(\gamma_9, \gamma_{10})$

4. 高次法の安定性 段数が増う程安定性はよくなる。また同じ段数では低次法の方が安定性が優れている。最大絶対安定区間に対応する安定多項式のグラフ及び絶対安定領域は酷似している(表1及び表2を見よ)。

表1 高次法の絶対安定区間(m段法)

| 公 式     | $\gamma_{m-2}$ | $\gamma_{m-1}$ | $\gamma_m$ | $\max S_I$ の下限 |
|---------|----------------|----------------|------------|----------------|
| 5段 4次法  |                |                | 0.490      | -6.06          |
| 6段 5次法  |                |                | 0.525      | -6.21          |
| 7段 6次法  |                |                | 0.54731    | -6.5111        |
| 8段 6次法  |                | 0.716          | 0.233      | -9.2287        |
| 9段 7次法  |                | 0.742          | 0.256      | -9.9589        |
| 10段 7次法 | 0.870527       | 0.505118       | 0.1347     | -12.0          |
| 10段 8次法 |                | 0.762          | 0.275      | -10.1530       |

注  
Shanksの公  
式の安定性  
 $S_a = 26.27$   
 $S_I = [-4.05, 0.0]$

表2 高次法の絶対安定領域(m段法)

| 公 式     | $\gamma_{m-2}$ | $\gamma_{m-1}$ | $\gamma_m$ | $\max S_a$ |
|---------|----------------|----------------|------------|------------|
| 5段 4次法  |                |                | 0.54       | 23.41      |
| 6段 5次法  |                |                | 0.5625     | 27.05      |
| 7段 6次法  |                |                | 0.589      | 29.83      |
| 8段 6次法  |                | 0.775          | 0.2975     | 45.56      |
| 9段 7次法  |                | 0.80           | 0.324      | 51.59      |
| 10段 7次法 | 0.87           | 0.515          | 0.145      | 72.2       |
| 10段 8次法 |                | 0.8125         | 0.34       | 58.33      |

文 献

1. 田中, 若林, 山下, 5段数陽の Runge-Kutta 法の安定性と打ち切り精度の肉俣について, 数理解析研究所講究録 483, 1983
2. 6次及び7次陽の Runge-Kutta 法について, 田中, 山下, 若林, 数値解析研究全集, 1983
3. E. B. Shanks, Solution of differential equations by evaluations of functions, Math. Comp. Vol. 20, No. 93, 1966

#### 4. Runge-Kutta 法の次数条件式自動生成ルーチン AMOCE について

高次 Runge-Kutta 法の次数条件式や局所打ち切り誤差を求める計算は、計算力を誇る応用数学のエキスパートにとってもなかなか極めて厄介で困難な問題であった。この困難を大幅に緩和し計算を可能にしたのは、J.C. Butcher による rooted tree の考案であった<sup>1)</sup>。しかしそれでもなお、この方法を駆使して高次法について正しい結果を導くことは、大変骨の折れる退屈なまた時間のかかる仕事であることには変りはない。我々はこの点に着目して次数条件式を自動的に求める会話型プログラム AMOCE を開発した。

##### 1. AMOCEの概要

AMOCEは指定された次数に対して、

1. tree及び近似解のTaylor展開の計算
2. tree及び数値解のTaylor展開の計算
3. 連立の微分方程式に対する次数条件式の計算
4. 単一の微分方程式に対する次数条件式の計算

を行い、XYプロッタ装置に出力するためのデータを作成する。PLAMOCEは、

これを読み込みXYプロッタ装置に出力するものである。ここでAMOCEはMELCOM

PASCAL8000によって、PLAMOCEはMELCOM拡張FORTRANによって記述されている。

##### 2. 操作法

AMOCEは、プロッタ出力用データをF:FOUTに出力する。従ってF:FOUTにファイル  
をセットしておく必要がある。そのファイルをF:5にセットしてPLAMOCEを実行  
することにより、近似解、理論解のTaylor展開、次数条件式がXYプロッタ装置に  
出力される。しかしながら、これらを行うコマンド・プロシジャーC:AMOCEが  
すでに用意されている。その利用法は、

!C:AMOCE. [F:FOUT,F:5にセットするファイル名]

である。セットするファイル名を省略すると後で問い合わせてくる。

C:AMOCEを実行すると、

Load-module L:AMOCE already exist? (YES...Y,PLOT...P):

の問い合わせがある。これはAMOCEをコンパイル、リンクしてロード・モジュール  
がすでに出来ているかの問い合わせである。ある場合はYと入力することにより  
コンパイル、リンクは行なわれず、すぐに実行に移る。また、プロッタ出力用  
データがすでに出来ていてすぐにPLAMOCEを実行したい場合はPと入力する。

AMOCEの実行が終ると、

PLOT START! (NO...N):

の問い合わせがある。これは、F:FOUTにセットしたファイルを読み込みPLAMOCE  
を実行してもよいかの問い合わせである。何らかの理由で実行しない場合はNと  
入力する。Yと入力すると、

Load-module L:PLAMOCE already exist? (YES...Y):

の問い合わせがある。これはAMOCEの場合と同様である。

コマンド・プロシジャーC:AMOCEを用いずに実行する場合の注意点は、

1. AMOCEはF:FOUTにプロッタ出力用データを出力する

2. PLAMOCEのリンクは、

!LYNX ¥:IXYLIB1.9999KK54;.KPLIBE;.EXTLIBE

とする

ことである。ここでIXYLIB1は、高速化、簡単化を図るためDRAWプロセッサを用いずにXYプロッタ装置に出力するものである。又KPLIBEはMOJI（文字作図用サブルーチンパッケージ）の使用に必要である。

### 3. 使用法

ユーザーは、次数の指定及び

0. treeと近似解のTaylor展開の計算

1. treeと理論解のTaylor展開の計算

2. 単一の微分方程式に対する次数条件式の計算

3. 連立の微分方程式に対する次数条件式の計算

のうちの仕事をするかを選択しなければならない。

まず、次数を問い合わせてくる。

----- PLEASE INPUT YOUR JOB'S ORDER (.2..9.) -----

次に仕事を問い合わせてくる。

----- PLEASE INPUT YOUR JOB'S NUMBER (.0..3.) -----

--IF YOU INPUT 0 THEN

MAKES TREES AND TAYLOR EXPANSION OF NUMERICAL SOLUTION

--ELSE IF YOU INPUT 1 THEN

MAKES TREES AND TAYLOR EXPANSION OF NUMERICAL SOLUTION

--ELSE IF YOU INPUT 2 THEN

MAKES ORDER CONDITIONAL EQUATION FOR SINGLE D.E

--ELSE THEN

MAKES ORDER CONDITIONAL EQUATION FOR SYSTEM D.E

従って、実行したい仕事を0から3の間で選択する。

#### 4. 実行例

例えば、単一の微分方程式に対する5次の次数条件式を出力したい場合は、

----- PLEASE INPUT YOUR JOB'S ORDER (.2..9.) -----  
75

----- PLEASE INPUT YOUR JOB'S NUMBER (.0..3.) -----

--IF YOU INPUT 0 THEN

MAKES TREES AND TAYLOR EXPANSION OF NUMERICAL SOLUTION

--ELSE IF YOU INPUT 1 THEN

MAKES TREES AND TAYLOR EXPANSION OF NUMERICAL SOLUTION

--ELSE IF YOU INPUT 2 THEN

MAKES ORDER CONDITIONAL EQUATION FOR SINGLE D.E

--ELSE THEN

MAKES ORDER CONDITIONAL EQUATION FOR SYSTEM D.E

72

と入力する。すると次の様な出力が得られる。

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx dy = 1/120$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx dy^2 = 1/60$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dx dy + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 dy dx = 7/120$$

|                                          |        |
|------------------------------------------|--------|
| $\sum w_i \beta_{ij} d_j^3$              | = 1/20 |
| $\sum w_i \beta_{ij} d_j^2 d_i$          | = 1/15 |
| $\sum w_i \beta_{ij} d_j \beta_{ik} d_k$ | = 1/20 |
| $\sum w_i \beta_{ij} d_j d_i^2$          | = 1/10 |
| $\sum w_i d_i^4$                         | = 1/5  |

5. もすが このルーチンは、現在連立微分方程式については2次から9次に至る次数条件式を生成することができる。単一方程式については一部のエック中である。このルーチンを一層有用なものにするためには、乙の形で書かれた次数条件式の乙を外し、各係数の階数を正確に書き下す必要があるだろう。また局所打ち切り誤差の主項または主項と第2項を次数条件式と同時に出力することかかきると、このルーチンの価値は倍加されるだろう。今後の研究は単一方程式に対して次数条件式を完全なものとすることに加えて、局所打ち切り誤差を出力することに向けられるだろう。

#### 文献

1. G. Hall and J. M. Watt, *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*, Chap. 10, <sup>(ed.)</sup> Implicit Runge-Kutta and related methods (J. C. Butcher), Clarendon Press, Oxford, 1976