数論的数値積分法について

杉原正顯（筑波大・電情）

近年，整数論の数値計算への応用が盛んに研究され，特に，数論的数値積分法（整数論を理論的基礎において用いる数値積分法）については，多くの精密な研究が行なわれている [6],[13]．本稿においては，それらの多くの数論的数値積分法に関する研究のうち，実用的視点から有効であると思われる２つの方法，Haselgrove 法と good lattice points 法について，その研究の概要を紹介する．また，従来の good lattice points 法を拡張し，今まで数論的数値積分法の研究対象となっていた関数族以外の関数族に対して，その適用可能性について考察する．

1. Haselgrove 法と good lattice points 法について

1.1 対象とする積分問題

Haselgrove 法，good lattice points 法ともに，次のような条件を満足する積分を考察の対象とする．

(i) 積分領域は，s 次元単位超立方体 $I^s\ (\triangleq[0,1]^s)$ とする．(つまり，次のような積分を考える $\int_{I^s} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}\qquad \boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_s)$.)

(ii) 被積分関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，次の条件を満足する関数族 $\mathcal{P}^s(\lambda, C)$，$\lambda>1$，$C>0$ に含まれるとする．

$f(\boldsymbol{x})\in\mathcal{P}^s(\lambda,C)\iff$

(ア) $f(\boldsymbol{x})$ は次のような絶対収束する s 次元 Fourier 級数に展開可能である．

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{\boldsymbol{h}} a_{\boldsymbol{h}}\, e^{2\pi i\langle \boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\rangle}, \tag{1}$$

ここで，$\boldsymbol{h}\equiv(h_1,h_2,\cdots,h_s)$，$\langle\boldsymbol{h},\boldsymbol{x}\rangle=h_1x_1+h_2x_2+\cdots+h_sx_s$

$a_{\boldsymbol{h}}\equiv a_{h_1,h_2,\cdots h_s}$，$\sum_{\boldsymbol{h}}\equiv\sum_{h_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{h_s=-\infty}^{\infty}$ とする．

(イ) $f(\boldsymbol{x})$ の Fourier 係数 $a_{\boldsymbol{h}}$ $(\boldsymbol{h}\neq\boldsymbol{0})$ は次の不等式を満たす．

$$|a_{\boldsymbol{h}}|\leq C\,(r(\boldsymbol{h}))^{-\lambda}, \tag{2}$$

ここで

$$r(\boldsymbol{h})\equiv\prod_{j=1}^{s}\mathrm{Max}(1,|h_j|).$$

注意 1．ここで，$f(\boldsymbol{x})$ が I^s 上で高階偏導関数

$$\frac{\partial^{j_1}}{\partial x_1^{j_1}}\cdots\frac{\partial^{j_s}}{\partial x_s^{j_s}}f(\boldsymbol{x})\qquad(0\leq j_1\leq k,\cdots,0\leq j_s\leq k)$$

をもち，それらが連続であるならば，次のような多項式を用いた積分変数の変換

$$x = \varphi_k(y), \quad \varphi_k(y) \equiv \int_0^y \frac{(2k+1)!}{k!\,k!} t^k (1-t)^k dt \tag{3}$$

によって，変換後の被積分関数 $f(\varphi_k(y_1), \cdots, \varphi_k(y_s))\varphi_k'(y_1)\cdots\varphi_k'(y_s)$ （ここで $'$ は，微分を表わす）を $\mathcal{P}^S(k, C)$ に入れることが出来る。

<u>注意2.</u> 注意1. に記したのと同じ条件下で，$f(\boldsymbol{x})$ の偏微分係数の計算結果を用いて，新しい関数 $F(\boldsymbol{x})$ $\left(\int_{I^s} f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{I^s} F(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right)$ を作り，$F(\boldsymbol{x})$ を $\mathcal{P}^s(k, C)$ に入れる方法もある．一般の次元で書くと非常に複雑であるので，$s = 1, 2$ の場合を記すと，

$$s=1, \quad F(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\left(f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)\right)\cdot P_j(x), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} s=2, \quad F(x,y) = f(x,y) &- \sum_{i=0}^{k-1}\left\{\frac{\partial^i}{\partial x^i}f(1,y) - \frac{\partial^i}{\partial x^i}f(0,y)\right\}P_i(x) - \sum_{j=0}^{k-1}\left\{\frac{\partial^j}{\partial y^j}f(x,1) - \frac{\partial^j}{\partial y^j}f(x,0)\right\}P_j(y) \\ &- \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\left\{-\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}f(1,1) + \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}f(1,0) + \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}f(0,1) - \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}f(0,0)\right\}P_i(x)P_j(y), \end{aligned} \tag{5}$$

ここで，$P_i(x) \equiv \frac{1}{(i+1)!}B_{i+1}(x)$，$B_{i+1}(x)$ は，Bernoulli 多項式，

となる [19]. 一般に，偏微分係数を計算するのは大変であり，また，$f(\boldsymbol{x})$ が積分領域の端点に代数的特異性を持っている場合には，$F(\boldsymbol{x})$ を求めることは出来ない等々，この方法は，実用的視点からするとあまり有効ではないように思われる。

1.2. Haselgrove 法

Haselgrove 法とは，1961年 Haselgrove によって導された多次元数値積分法で，その後いろいろな人々によって，その研究が行われている．original の Haselgrove 法は，次の定理1の形に述べることができる [4].

定理1.

$\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \in \mathcal{R}^s$ （$\mathcal{R}$：実数体）は，次の条件を満足するとする．

《条件》

ある $\varepsilon > 0$ が存在して，任意の $\boldsymbol{h} \in \boldsymbol{Z}^s$ （$\boldsymbol{Z}$：整数環），$\boldsymbol{h} \neq 0$ に対して，次の不等式が成立する．

$$\|\langle \boldsymbol{h}, \boldsymbol{\alpha} \rangle\| \geq c(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon)(r(\boldsymbol{h}))^{-1-\varepsilon}, \tag{6}$$

ここで，$\|x\|$ は x に最も近い整数までの距離を表わし，$c(\boldsymbol{\alpha}, \varepsilon)$ は，$\boldsymbol{\alpha}$ と ε によって定まる正定数を表わす．

そして，S_m，S_m^H 等を次式で定義する

$$S_1(N) \equiv \sum_{j=-N}^{N} f(\{j\alpha_1\}, \cdots, \{j\alpha_s\}), \quad S_m(N) \equiv \sum_{j=0}^{N} S_{m-1}(j) \quad (m \geq 2),$$

$$S_1^H(N) \equiv \frac{1}{(2N+1)} S_1(N), \quad S_2^H(N) \equiv \frac{1}{(N+1)^2} S_2(N), \tag{7}$$

$$S_3^H(N) \equiv \frac{1}{(N+1)^2(2N+3)}\{S_3(2N+1) - 2S_3(N)\}, \quad S_4^H(N) \equiv \frac{1}{(N+1)^4}\{S_4(2N) - 4S_4(N-1)\},$$

ここで $\{x\}$ は，x の小数部分を表わす，

この時，$f(x) \in \mathcal{P}^s(\lambda, C)$，$\lambda > m(1+\varepsilon)$ に対して

$$\mathcal{S}_m^H(N) - \int_{I^s} f(x)\,dx = O\left(\frac{1}{N^m}\right) \qquad (m=1,2,3,4) \tag{8}$$

が成立する。

この定理（Haselgrove 法）において，注目すべき点は (i) 数値積分誤差の N に関するオーダーが次元に無関係であること，(ii) N が増加しても，Gauss 型の積分公式のようにその都度すべて新しく関数値を計算し直す必要がないということである．しかし，定理の中の α に関する《条件》を満足するような α としては，どのようなものがあるのかは，1961年の時点においては，あまり明確ではなし，Haselgrove は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，《条件》を満足する α の測度が正であることを示し，実際の α の決定は，Monte Carlo 法を用いて，おこなった．現在では，数論が進歩して，定理1の中の《条件》に関して，次のようなことがわかっている．

定理2.
任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ほとんどすべての $\alpha \in R^s$ が《条件》にいう不等式を満足する．

定理3. (Schmidt の定理 [16])
$\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$ において，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ を，$1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ が $\mathbb{Q}$（有理数体）上一次独立であるような実代数的数とする．この時，任意の $\varepsilon > 0$ に対して《条件》にいう不等式が成立する．

定理4. (Baker の定理 [1])
$\alpha \equiv (e^{\gamma_1}, e^{\gamma_2}, \cdots, e^{\gamma_s})$ とし，$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ を相異なる有理数とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して《条件》の中の不等式が成立する．

ただし，定理3，定理4は，背理法を用いて証明されており，《条件》の中の定数 $c(\alpha, \varepsilon)$ に関する評価は得られておらず（$c(\alpha, \varepsilon)$ は，effective constant として与えられていない），実際の α の決定に関しては，あまり有効な情報は，与えてくれない．現時点においては，上記の定理，および，経験則から，次の3つの α が推奨されている．((i), (iii) において $\mathbb{Q}(\alpha)$ の拡大次数が $s+1$ であることに注意せよ）

(i) $2s+3$ が素数である時，

$$\alpha = \left(2\cdot\cos\frac{2\pi}{2s+3},\ 2\cos\frac{4\pi}{2s+3},\ \cdots,\ 2\cos\frac{2\pi s}{2s+3}\right),$$

(ii) $$\alpha = \left(2^{1/(s+1)},\ 2^{2/(s+1)},\ \cdots,\ 2^{s/(s+1)}\right),$$

(iii) $$\alpha = (e^1,\ e^2,\ \cdots,\ e^s)$$

しかし，筆者の経験（あまり多いわけではないが）では，$2s+3=$ 素数となる時 — $s=2,4,5,7,8\cdots$ — は，(i) の α が，その他の場合 — $s=3,6,9,\cdots$ — においては，(ii) の α を用いるのが良いようである．

次に，当然，問題となるのは，$\mathcal{S}_m^H(N)$ ($m \geq 5$) はどのようなものになるかということである．これについては，華羅庚と王元，Niederreiter によって，次のよう

な結果が得られている[6],[13].

定理5

αは，定理1の中の《条件》を満足するとする．そして，$w_{N,j}^{(m)}$を次式で定義する．

$$\left(\sum_{j=-N}^{N} z^j\right)^m = \sum_{j=-mN}^{mN} w_{N,j}^{(m)} z^j. \tag{9}$$

この時，$f(x)\in\mathcal{P}^s(\lambda, C)$，$\lambda > m(1+\varepsilon)$に対して

$$\frac{1}{(2N+1)^m}\sum_{j=-mN}^{mN} w_{N,j}^{(m)} f(\{j\alpha_1\},\cdots,\{j\alpha_s\}) - \int_{I^s} f(x)dx = O\left(\frac{1}{N^m}\right). \tag{10}$$

(最後の式の最左辺の和の部分を$S_m^N(N)$と表わすことにする.)

$S_1^H(N)=S_1^N(N)$，$S_2^H(2N)=S_2^N(N)$，$S_4^H(2N)=S_4^N(N)$なる関係が成立し，$S_m^N(N)$をHaselgrove法の一般化(拡張)と見ることが出来る．しかし，$m\geqq 5$について，$S_m^N(N)$を計算しようとすると，かなり面倒である．次の定理は，定理5におけるweights $w_{N,j}^{(m)}$をより計算し易いようにしたものである[17].

定理6

αは，定理1の中の《条件》を満足するとする．そして，$w_m(x)$を

$$w_m(x) \stackrel{\triangle}{=} (1-x)^m(1+x)^m \Big/ \int_{-1}^{1}(1-x)^m(1+x)^m dx = \frac{(2m+1)!}{m!\,m!\,2^{2m+1}}(1-x)^m(1+x)^m \tag{11}$$

とおく．この時，$f(x)\in\mathcal{P}^s(\lambda,C)$，$\lambda>m(1+\varepsilon)$に対して

$$\frac{1}{N}\sum_{j=-N}^{N} w_m\left(\frac{j}{N}\right) f(\{j\alpha_1\},\cdots,\{j\alpha_s\}) - \int_{I^s} f(x)dx = O\left(\frac{1}{N^m}\right). \tag{12}$$

筆者の若干の経験によれば，$m\geqq 5$に対しては，定理6の中の公式(和)が，使い易いようである．

以上，Haselgrove法について概観して来たが，αの選択に関しては，理論，数値実験両面からの研究が今後とも不可欠である．ただし，歴史的経緯からみて非常に難しい問題であると思われる．

1.3. good lattice points 法

good lattice points 法は，Hlawka と Korobov によって独立に導入された数値積分法で，次式で定義される[5],[8].

$$\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}j\right\},\cdots,\left\{\frac{g_s}{N}j\right\}\right), \quad \boldsymbol{g}\equiv(g_1,g_2,\cdots,g_s)\in\mathbf{Z}^s. \tag{13}$$

Hlawka，Korobovは，この公式を，$f(x)\in\mathcal{P}^s(\lambda,C)$に適用し，その数値積分誤差が小さくなるような$\boldsymbol{g}$(Hlawkaは good lattice point modulo N と呼び，Korobovは optimal coefficients modulo N と呼んだ)の研究を行った．その後，その研究は Niederreiter，Zaremba，華羅庚と王元等に受け継がれ，多くの精密な結果が得られた．以下，それを概観する．

まず，$f(x)\in\mathcal{P}^s(\lambda,C)$に(13)を適用した時の誤差は，次のように評価される．

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f\left(\left\{\frac{g_1}{N}j\right\},\cdots,\left\{\frac{g_s}{N}j\right\}\right)-\int_{I^s} f(x)dx\right| = \left|\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{h} a_h e^{2\pi i\langle \frac{j}{N}h, g\rangle} - a_0\right|$$

$$= \left|\sum_{h} a_h \left(\frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi i\langle \frac{j}{N}h, g\rangle}\right) - a_0\right|$$

$$= \left|\sum_{\substack{h\neq 0 \\ \langle h,g\rangle\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ N)}} a_h\right|$$

$$\leqq C \sum_{\substack{h\neq 0 \\ \langle h,g\rangle\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ N)}} (r(h))^{-\lambda} \quad . \tag{14}$$

従って，$R^{(\lambda)}(g,N) \overset{d}{=} \sum_{\substack{h\neq 0 \\ \langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}N)}} (r(h))^{-\lambda}$ が小さくなるような g を求めることが研究課題となる．Hlawka, Korobov, Niederreiter は，この $R^{(\lambda)}(g,N)$ を次のように評価し [9]，

$$R^{(\lambda)}(g,N) \leqq (1+2\zeta(\lambda))^s \cdot (N^{-\lambda} + Q(g,N)^{\lambda}) \tag{15}$$

ここで，$Q(g,N) \overset{d}{=} \sum_{\substack{h\neq 0,\ -\frac{N}{2}<h_j\leqq\frac{N}{2} \\ \langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}N)}} (r(h))^{-1}$，$\zeta(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\lambda}$ はリーマンの ζ-関数，

$R^{(\lambda)}(g,N)$ の評価を $Q(g,N)$ の評価に帰着し，$Q(g,N)$ の値が小さくなるような g の研究に専心した． 現在，得られている最良の結果は，次のようである．

定理７ [14]

$N\geqq 2$，$s\geqq 2$ に対して，ある $g\in Z^s$ が存在して，次の不等式

$$Q(g,N) \leqq \frac{1}{N}(1.4+2\log N)^s \tag{16}$$

が成立する．

この結果と，(14)，(15)の評価を考慮すると，$s\geqq 2$ において，

“任意の $N\geqq 2$ に対して，ある $g\in Z^s$ が存在して $|$誤差$|\leqq C\cdot C(s,\lambda)\cdot\frac{(\log N)^{\lambda s}}{N^{\lambda}}$ となる，” (17)

ことがわかる．ただし，定理７は，存在定理であり，g の具体的構成については未解決である．

$R^{(\lambda)}(g,N)$ の評価に関しては，上記の方法以外に，Hlawka，Zaremba 等によって研究された方法がある．$R^{(\lambda)}(g,N)$ の定義式（表式）からわかるように，

$$\rho(g,N) \overset{d}{=} \mathop{\mathrm{Min}}_{h\neq 0,\ \langle h,g\rangle\equiv 0\ (\mathrm{mod}N)} (r(h)) \tag{18}$$

なる量を導入すると，$R^{(\lambda)}(g,N)$ は，ほぼ $O((\rho(g,N))^{-\lambda})$ と評価され，$R^{(\lambda)}(g,N)$ の最小化の問題が，比較的見易い $\rho(g,N)$ の最大化問題に帰着される．このような考えに基づいて，Hlawka，Zaremba 等は，$\rho(g,N)$ を用いて，$R^{(\lambda)}(g,N)$ の最小化問題を考察した．より正確には，$\rho(g,N)$ の表式が非常に簡単になる $g=(1,g_2,\cdots,g_s)$ の場合（この時 $\rho(g,N)=\mathop{\mathrm{Min}}_{(k,h_2,\cdots h_s)\neq 0}\{\mathrm{Max}(1,|Nk-g_2h_2-\cdots-g_sh_s|)\times\prod_{j=2}^{s}\mathrm{Max}(1,|h_j|)\}$ となる）に，$\rho(g,N)$ を用いて，$R^{(\lambda)}(g,N)$ の研究を行なった．まず，

$R^{(\lambda)}(g,N)$は，$\rho(g,N)$を用いて次のように評価される[19]，
$s \geqq 2$, $N \geqq 4$に対して $g=(1,g_2,\cdots,g_s)$とする時，

$$R^{(2)}(g,N) \leqq \frac{8^s\pi^2}{6\rho(g,N)^2}\left(\frac{1}{(s-1)!}\left(\log_2\frac{N}{4}\right)^{s-1}+2^{s-1}\left(\log_2\frac{N}{2}\right)^{s-2}\right)+\frac{2\pi^2}{3N^2}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\right)^{s-1}, \tag{19}$$

$$R^{(\lambda)}(g,N) \leqq R^{(2)}(g,N)/(\rho(g,N))^{\lambda-2} \quad ,(\lambda \geqq 2).$$

$\rho(g,N)$の最大化問題に対しては，次の定理の中での評価が，現時点では最良のものである．

定理 8 [20]

$s \geqq 2$とする．この時，十分大きな任意のNに対して，ある$g=(1,g_2,\cdots,g_s)$が存在して，

$$\rho(g,N) > (s-1)!\,N/(2\log N)^{s-1} \tag{20}$$

が成立する．

この定理8も，定理7と同様，存在定理であって，gの具体的構成に関しては何ら情報を与えない．(19)と(20)を結びつけると $s \geqq 2$ において，

“十分大きなNに対して，ある$g=(1,g_2,\cdots,g_s)$が存在して，$|$誤差$| \leqq C\cdot C'(s,\lambda)\dfrac{(\log N)^{(\lambda+1)(s-1)}}{N^\lambda}$” (21)

となることがわかる．

(21)や(17)に現われる誤差のNに関するオーダーについては，N＝素数の場合には誤差＝$O((\log N)^{\lambda(s-1)}/N^\lambda)$となるような$g$が存在することがわかっている[6]．

また，誤差の下限に関しては，次のSaryginの定理が成立することがわかっている．

定理 9 [15]

N点からなる任意の数値積分公式（重みw_j，分点x_j $j=1,\cdots,N$）に対して，ある$f(x)\in P^s(\lambda,C)$が存在して

$$\left|\sum_{j=1}^{N} w_j f(x_j)-\int_{I^s} f(x)\,dx\right| \geqq C\cdot C''(s,\lambda)\cdot\frac{(\log N)^{s-1}}{N^\lambda}. \tag{22}$$

つまり，$P^s(\lambda,C)$に対しては，誤差のNに関するオーダーが$(\log N)^{s-1}/N^\lambda$より良い数値積分公式は存在しない．

この定理から見ると，(17),(21)にいうgを見つけることが出来れば，ほぼ理論的限界と思われる数値積分公式が得られることになる．しかし，先にも注意したように定理7，定理8とも存在定理であり，具体的gの構成法については，定理7，8の証明とは別のアプローチを必要とする．$\rho(g,N)$に関しては，この方向の研究が比較的よく行なわれており，いろいろな結果が得られている．その結果は$s=2$の場合と，$s \geqq 3$の場合とでは，大きな差異がある．以下$s=2$と，$s \geqq 3$の場合に分けて，それらの結果を記す．

(i) $s=2$ の場合

$g=(1,g)$，$\gcd(N,g)=1$, $0 \leqq g < N$の場合を考える．そしてg/Nが次のように連分数展開されているとする．

$$\frac{g}{N}=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\cdots+\frac{1|}{|a_{g-1}}+\frac{1|}{|a_g},\quad a_g=1. \tag{23}$$

この時，$\rho(g,N)$は，次のように評価される[18]．

$$\frac{N}{\mathrm{Max}(a_1,\cdots,a_g)+2}\leq\rho(g,N)\leq\frac{N}{\mathrm{Max}(a_1,\cdots,a_g)} \tag{24}$$

この評価から，$a_1=a_2=\cdots=a_g=1$ の場合に $\rho(g,N)$ が非常に大きくなることが期待出来る．実際それは，事実であって，次の定理にその結果をまとめることができる．

定理10 [18]

$g=(1,g)$，$\gcd(N,g)=1$ の時，

(i) $g_2/N=F_{m-2}/F_m$ または，F_{m-1}/F_m $(m\geq3)$ （ここで $F_0=0$, $F_1=1$, $F_{k+2}=F_{k+1}+F_k$ $(k\geq0)$）

の時，

$$m=4\Rightarrow\rho(g,N)=\frac{1}{3}N,\qquad m>4\Rightarrow\rho(g,N)\geq\frac{3}{8}N, \tag{25}$$

(ii) (i)以外の g,N に対しては

$$\rho(g,N)\leq\frac{10}{29}N. \tag{26}$$

従って，2次元の場合には，$N=F_m$, $g=(1,F_{m-1})$ ととれば，良い数値積分公式が得られる．なお，その時の $f(x)\in\mathcal{P}^2(\lambda,C)$ に対する数値積分誤差は

$$\left|\frac{1}{F_m}\sum_{j=0}^{F_m-1}f\left(\left\{\frac{1}{F_m}j\right\},\left\{\frac{F_{m-1}}{F_m}j\right\}\right)-\int_{I^2}f(x)dx\right|\leq C\cdot120\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^{\lambda-2}\cdot\frac{\log F_m}{F_m{}^{\lambda}} \tag{27}$$

と評価される[21]．この結果が，定理9に記した誤差のオーダーの下限 $O(\log N/N^\lambda)$ を達成していることから，Fibonacci数を用いたこの数値積分公式は非常によいものであることがわかる．

(ii) $s\geq3$ の場合

2次元の場合のような理論的に良い結果は得られていないが，華羅庚と王元は系統的に，比較的良いと思われるような N と g の系列を生成する方法を考案した．彼らは，Schmidtの定理（定理3）の条件を満足する $\alpha=(\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_s)$ に対して $N^{(i)}$，$(g_2^{(i)},g_3^{(i)},\cdots,g_s^{(i)})$ $i=1,2,3,\cdots$ なる列が

$$\left|\alpha_j-\frac{g_j^{(i)}}{N^{(i)}}\right|\leq C\cdot(N^{(i)})^{-1-d}\quad j=2,3,\cdots,s\quad(0\leq d\leq1/s) \tag{28}$$

を満足する時，

$$\rho((1,g_2^{(i)},\cdots,g_s^{(i)}),N^{(i)})\geq C'(N^{(i)})^{(1+d)/(2+\varepsilon)} \tag{29}$$

となることを示した．そして，特殊な α に対して，具体的に(28)を満足するような $N^{(i)}$，$(g_2^{(i)},g_3^{(i)},\cdots,g_s^{(i)})$ $i=1,2,3,\cdots$ 系列を生成するアルゴリズムを示した（これが，代数体の単数を利用した方法，および，P-V数を利用した方法と呼ばれるものである）[6]．しかし，この方法によって生成される N，g の系列は，あまり良いものでないことが報告されており[12]，現状としては，$s\geq3$ においては理論的に満足のいく結果は得られていないといってよい．

従って，本質的にしらみつぶし法によって，与えられた N に対して良い α を求めていくより他に，良い数値積分公式をもとめる方法はなく，この方向での研究が

現在も精力的に行われている。実際のしらみつぶし計算は，古くは，Korobov等によって，N=p（素数）$g\equiv(1,g,g^2,\cdots,g^{s-1})\bmod N$，および，$N=p_1\cdot p_2$（$p_1,p_2$は素数）$g\equiv(p_1+p_2,\ p_1g_1+p_2g_2,\cdots,\ p_1g_1^{s-1}+p_2g_2^{s-1})\bmod N$ の場合に，近年では，N：任意 $g=(1,g_2,g_3,\cdots,g_s)$ の場合に Maisonneuve [11] や，Kedem & Zaremba [7] によって行なわれ，華羅庚と王元の本[6]の巻末に，その結果がまとめられている。今後，その表が拡充されることが望まれる。

以上，good lattice points 法について概観して来たが，Haselgrove 法と較べると，文献[6]にある N と g を用いた限りにおいては，good lattice points 法の方が勝っているように思われる。今後，より深い good lattice points 法に関する結果（特に，構成的結果）が得られることを期待したい。

2. good lattice points 法の拡張と，その $P^s(\lambda,C)$ 以外の関数族への応用

good lattice points 法を次のように拡張する（本来の good lattice points 法(13)の拡張になっていることは後に記す）。

$$\det A\times\sum_{n\in\mathbf{Z}^s}f(An)\ ,\quad A\in GL(s,\mathbf{R}) \tag{30}$$

この数値積分公式によって生成される誤差は，被積分関数 $f(x)$ に適当な regularity condition を仮定する時，次式で与えられる。

$$\det A\times\sum_{n\in\mathbf{Z}^s}f(An)-\int_{\mathbf{R}^s}f(x)\,dx=\sum_{\substack{m\neq 0\\ m\in\mathbf{Z}^s}}f^*(2\pi({}^tA)^{-1}m), \tag{31}$$

ここで，$\quad f^*(y)=\int_{\mathbf{R}^s}f(x)e^{i\langle x,y\rangle}dx$ （f の Fourier 変換）

この誤差の表現から，f^*（f の Fourier 変換）が，ある条件を満たすとき，その条件にあうような A を選ぶことによって，(31) の右辺を小さく出来る，つまり，"good"な公式が得られることがわかる。以下，この考えのもとに，いろいろな関数，関数族を設定し，それに対して良い A を求めること，つまり，(30) の形をした公式の中でよいものを求めることを考える。

(i) $f(x)=\exp(-x_1^2-\cdots-x_s^2)$ の場合．

$f^*(y)=(\sqrt{\pi})^s\exp(-\frac{1}{4}(y_1^2+\cdots+y_s^2))$ であるから，$\rho(A)\equiv\underset{\substack{m\neq 0\\ m\in\mathbf{Z}^s}}{\mathrm{Min}}(4\pi^2\,{}^tm({}^tAA)^{-1}m)$

とする時，|数値積分誤差| $=O(e^{-\rho(A)/4})$ となる。一方，公式(30)において $\det A$ は，分点の密度の逆数を表わす。従って，良い公式は，$\det A=\mathrm{const}$ の時，$\rho(A)$ を最大化する A を用いることによって得られる。このような問題は，本質的に数の幾何学の中の critical determinant の問題と同じである。例えば，$s=2$ においては

$$A=c\cdot\begin{pmatrix}1&1/2\\0&\sqrt{3}/2\end{pmatrix}\qquad c\text{は}\ \det A=\mathrm{const}\ \text{となるようにとる。}$$

なる A において $\rho(A)$ は，最大値をとる [2], [10]。従って，このような関数に対

しては，次のような積分公式を用いて数値積分を行なえば，非常に効率がよい．

$$\frac{\sqrt{3}}{2}c^2\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f\left(cm_1,\ c\left(\frac{m_1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}m_2\right)\right).$$

ただし，今のような場合，$f(x)$は，直交変換に関して不変であるから，普通は，極座標変換して積分をもとめることになるであろうから，この公式は，使用されることはないであろう．

(ii) $f(x)$の Fourier 変換 $f^*(y)$ が $|f^*(y)| \leq C\exp(-d\sum_{i=1}^{s}|y_i|)$ を満足する場合．

$[0,1]^s$上の関数に DE 変換を施した場合，変換された被積分関数などがこの性質を満たす．この場合，(i)におけるρに対応するものは

$$\rho(A) = \mathop{\mathrm{Min}}_{m\neq 0} |Am|$$

である．このようなρに関しても，$s=2,3$に関しては，critical determinant の問題は解けており，例えば，$s=2$の場合，

$$A = c\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad c\text{は } \det A = \mathrm{const} \text{ とする定数},$$

なるAにおいて$\rho(A)$が最大化されることがわかっている．従って，この場合，公式

$$\frac{c^2}{2}\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} f\left(cn_1,\ c\left(\frac{n_1}{2}+\frac{n_2}{2}\right)\right)$$

を使用すればよいことがわかる．

(iii) $f(x)$が$[0,1]^s$上の関数である場合

(31)において$({}^tA)^{-1} = B \in GL(s,\mathbb{Z})$とすると，(31)は

$$\frac{1}{\det B}\sum_{n\in\mathbb{Z}^s} f(({}^tB)^{-1}n) - \int_{I^s} f(x)\,dx = \sum_{m\neq 0} f^*(2\pi Bm)$$
$$= \sum_{m\neq 0} a_{Bm},$$

ここで，a_kは$f(x)$の Fourier 係数．

となり，Frolov の与えた good lattice points 法の一般化[3]と一致する．

その他(30)の形の公式について，いろいろな結果を導くことが出来る．ただし，今のところ，理論的側面のみを考察対象としている．今後，実際的側面（当然考えられるべきもの）について，数値実験をまじえて考えて行きたい．

References

1. A. Baker: On some Diophantine inequalities involving the exponential function. Canad. J. Math., Vol. 17, pp. 616-626 (1965).
2. J. W. S. Cassels: An Introduction to the Geometry of Numbers. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1959.
3. K. K. Frolov: On the connection between quadrature formulas and sublattices of the lattice of integral vectors. Dokl. Akad. Nauk SSSR 232(1977)= Soviet Math. Dokl., Vol. 18, pp.37-41 (1977).
4. C. B. Haselgrove: A method for numerical integration. Math. Comp., Vol. 15, pp. 323-337 (1961).

5. E. Hlawka: Zur angenäherten Berechung mehrfacher Integrale. Monatsh. Math., Vol. 66, pp.140-151 (1962).
6. L.-K. Hua and Y. Wang: Applications of Number Theory to Numerical Analysis. Springer-Verlag, Beijing, 1981.
7. G. Kedem and S. K. Zaremba: A table of good lattice points in three dimensions. Numer. Math., Vol. 23, pp.175-180 (1974).
8. N. M. Korobov: Number Theoretic Method in Approximate Analysis(Russian). Fizmatigiz, Moscow, 1963.
9. L. Kuipers and H. Niederreiter: Uniform Distribution of Sequences. Wiley, New York, 1974.
10. C. G. Lekkerkerker: Geometry of Numbers. North-Holland, Amsterdam, 1969.
11. D. Maisonneuve: Recherche et utilisation des "bons treillis". Programmation et résultats numériques. Applications of Number Theory to Numerical Analysis (S. K. Zaremba, ed.), Academic Press, New York, 1972, pp. 121-201.
12. Y. S. Moon: Som numerical experiments on number-theoretic methods in the approximation of multi-dimensional integrals. Tech. Rep., 72, Dept. of Computer Science, Toronto Univ., 1974.
13. H. Niederreiter: Quasi-Monte Carlo methods and pseudo-random numbers. Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 84, pp.957-1041 (1978).
14. H. Niederreiter: Existence of good lattice points in the sense of Hlawka. Monatsh. Math., Vol. 86, pp. 203-219 (1978).
15. I. F. Sarygin: A lower estimate for the error of quadrature formulas for certain classes of functions(English trans.). U. S. S. R. Computational Math. and Math. Phys., Vol. 3, pp.489-497 (1963).
16. W. M. Schmidt: Simultaneous approximation to algebraic numbers by rationals. Acta. Math., Vol. 125, pp.189-201 (1970).
17. M. Sugihara and K. Murota: A note on Haselgrove's method for numerical integration. Math. Comp., Vol. 39, pp.549-554 (1982).
18. S. K. Zaremba: Good lattice points, discrepancy, and numerical integration. Ann. Mat. Pura Appl., Vol. 73, pp.293-317 (1966).
19. S. K. Zaremba: La méthode des "bons treillis" pour le calcul des intégrales multiples. Applications of Number Theory to Numerical Analysis(S. K. Zaremba, ed.), Academic Press, New York, 1972, pp. 39-119.
20. S. K. Zaremba: Goog lattice points modulo composite numbers. Monatsh. Math., Vol. 78, pp.446-460 (1974).
21. S. K. Zaremba: L'erreur dans le calcul des intégrales doubles par la méthode des bons treillis. Demonstratio Math., Vol. 8, pp.347-364 (1975).