

2次元ポテンシャル場 $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$ の 新しい数値解法

森本 義広
(熊本電波高専情報工学科)

1. はじめに

電磁場や定常温度場などのポテンシャル場 $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$ の数値解析の一つに古くから有限差分法(以下差分法という)が用いられている。

差分法は問題領域を多角形あるいは多面体で分割し、 $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$ をテーラー展開またはガウスの定理などを使って、差分方程式を解く問題に置きかえている。

以下、媒質定数(温度伝導率, 誘電率, 透磁率等) ϵ が不連続に変化する2次元ポテンシャル場 $\phi(x, y)$ について述べる。

従来の差分法では問題領域を図1のように長方形格子網で分割し、隣接した節点(格子点ともいう)上のポテンシャル $\phi_0 \sim \phi_4$ を使って $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$ を満たす差分方程式(1)を導いている。^{1), 2)}

$$\sum_{i=1}^4 k_i (\phi_i - \phi_0) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= (h_4 \epsilon_8 + h_2 \epsilon_1) / h_1 \\ k_2 &= (h_1 \epsilon_2 + h_3 \epsilon_3) / h_2 \\ k_3 &= (h_2 \epsilon_4 + h_4 \epsilon_5) / h_3 \\ k_4 &= (h_3 \epsilon_6 + h_1 \epsilon_7) / h_4 \end{aligned}$$

差分法では、この方法がポテンシャル場解析の主流になっている。しかし、この方法は節点を自由に設定することが困難であるため多媒質場の解析や領域内の特定の部分を詳細に解析する必要がある場合などに不便を感している。このような理由で最近では節点を自由に設定できる有限要素法³⁾がポテンシャル場の解析の主流になりつつある。

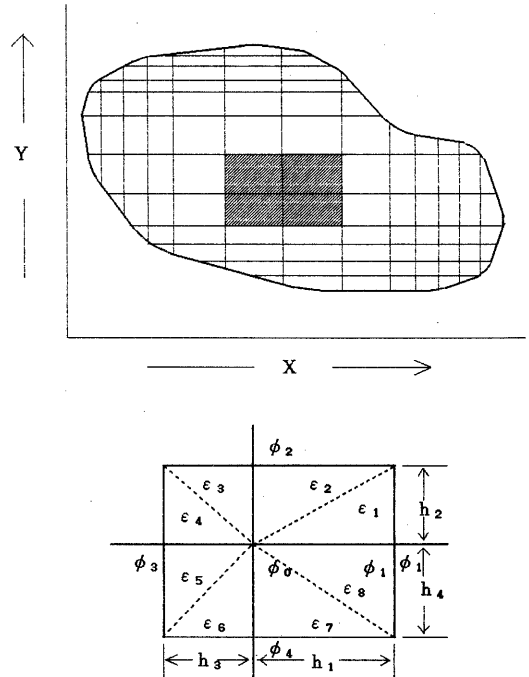


図1. 2次元ポテンシャル場と従来の格子網

本文は、このようなことから節点を自由に設定できる差分方程式の導出について考察している。この方法は有限要素法による領域分割と同様に問題領域を任意の形の微小三角要素で分割している。

2. 新しい差分方程式

偏微分方程式

$$\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0 \quad (x, y) \in R \quad (2)$$

を境界 L の上で与えられた境界条件

の下に数値的に解く方法について考察する。(図2上)

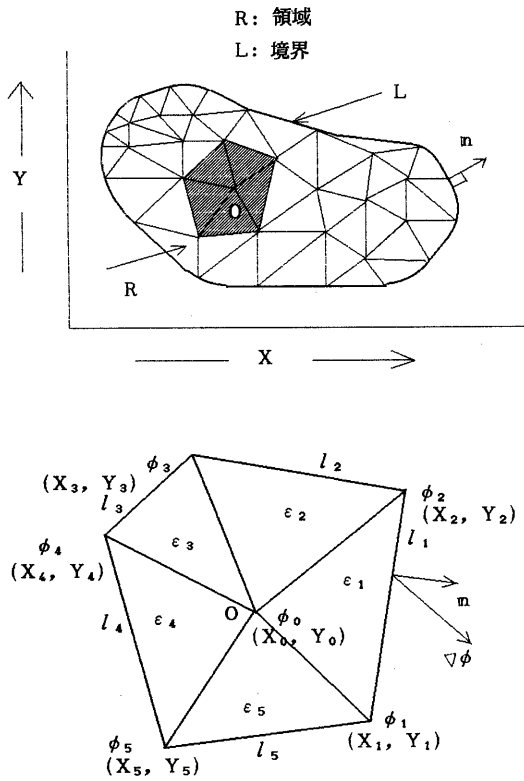


図2. 三角要素によるポテンシャル場の分割

(2) はガウスの発散の定理から次のように表わされる。

$$\int_V \nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) dV = \int_S (\epsilon \nabla \phi) \cdot n dS = 0 \quad (3)$$

ただし、 V は Z 軸方向に単位長さを取ったときの領域 R の体積、 S はその閉曲面、 n は S に対する外向単位法線ベクトルである。

ここで、問題領域は二次元場 ($\partial \phi / \partial z = 0$) を対象にしているためガウスの積分(3)の右辺は境界 L に沿ったの線積分(4)で置きかえることができる。

$$\oint_L (\epsilon \nabla \phi) \cdot n dl = 0 \quad (4)$$

領域 R を微小三角要素で分割し、これらの三角要素の各頂点(以下節点という)におけるポテンシャル ϕ の差分方程式を求めることにする。

R 内にある三角要素の任意の節点を O とし、この点 O を共通の節点とする k 個の三角要素からなる微小領域 R' について考える(図2下)

R' の点 O におけるポテンシャルを ϕ_0 、その他の節点におけるポテンシャルを反時計方向にそれぞれ $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ とする。(図2下)

つぎに差分方程式の導出にあたって次の仮定をおく。

仮定1. 三角要素内のポテンシャル $\phi(x, y)$ はその要素内で直線的に変化する。すなわち

$$\phi(x, y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y \quad (5)$$

ただし、 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ は三角要素の節点の座標と節点上のポテンシャルを使って表わされる。

仮定2. 媒質定数 ϵ は各三角要素内でそれぞれ一定である。(図2下)

このような仮定のもとでは、微小領域 R' を一周する線積分は

$$\nabla \phi = \beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \oint_{L'} (\epsilon \nabla \phi) \cdot n dl &= \oint_{L'} \epsilon (\beta_1 \hat{i} + \beta_2 \hat{j}) \cdot n dl \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。ただし、 $L' = l_1 + l_2 + \dots + l_k$ 、 $\hat{i}, \hat{j}$ は基本ベクトルである。

ここで積分を簡単にするために、点 O を中心とする半径 r の円 C を領域 R' 内に取りこの円周に沿ったの線積分を考える。さらに計算手続の簡

単化のために点 $O(X_0, Y_0)$ を原点 $(0, 0)$ とする新しい直角座標系 (x, y) を取り入れることにする (図 3)

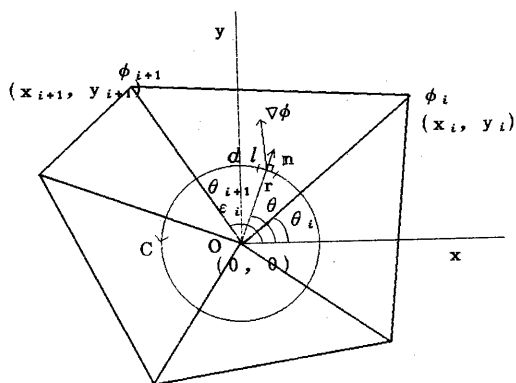


図 3. 円 C に沿っての線積分

三角要素内のポテンシャル ϕ は新しい座標系では次のように表わせる。

$$\phi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y \quad (8)$$

ただし, $\alpha_0 = \phi_0$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \phi_0 & 0 \\ 1 & \phi_i & y_i \\ 1 & \phi_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$\alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \phi_0 \\ 1 & x_i & \phi_i \\ 1 & x_{i+1} & \phi_{i+1} \end{vmatrix}}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} x_i &= X_i - X_0 \\ y_i &= Y_i - Y_0 \end{aligned}$$

領域 R 内に, 点 O を中心とする半径 r の円 C

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (9)$$

を取るとき, C 上の点 (x, y) において

$$x = r \cos \theta \quad (10)$$

$$y = r \sin \theta \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \phi(r, \theta) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 r \cos \theta + \alpha_2 r \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n} &= \partial \phi / \partial r \\ &= \alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta \end{aligned} \quad (13)$$

が成り立つので, C に沿っての反時計方向の線積分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \oint_C \epsilon (\nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dl &= \oint_C \epsilon \partial \phi / \partial r dl \\ &= \oint_C \epsilon r \partial \phi / \partial r d\theta \\ &= \oint_C \epsilon r (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^k \epsilon_i r \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} (\alpha_1 \cos \theta + \alpha_2 \sin \theta) d\theta \\ &= \sum_{i=1}^k \epsilon_i r \left\{ \alpha_1 (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) \right. \\ &\quad \left. - \alpha_2 (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

上式から点 O に隣接する節点上のポテンシャルに関して次の差分方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\epsilon_i}{x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i} &\left[\left\{ (y_i - y_{i+1}) (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (x_i - x_{i+1}) (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) \right\} \phi_0 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ y_{i+1} (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) + x_{i+1} (\cos \theta_{i+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \theta_i) \right\} \phi_i - \left\{ y_i (\sin \theta_{i+1} - \sin \theta_i) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x_i (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) \right\} \phi_{i+1} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ただし, $\phi_{k+1} = \phi_i$ $\theta_{k+1} = \theta_i$

$$\sin \theta_k = y_k / \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

$$\cos \theta_k = x_k / \sqrt{x_k^2 + y_k^2}$$

すなわち偏微分方程式 $\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \phi) = 0$ の点 O における差分方程式が導かれたことになる。またこの差分方程式は円 C の半径 r には影響されないことがわかる。

このようにして求められた全ての節点についての差分方程式を与えられた境界条件の下に解くならばポテンシャル場の数値解が得られる。

3. 数値実験

図4のような正方形領域 R の境界 L の上において、ディリクレ条件 $f(X, Y)$ が与えられている境界値問題を例にとり (15) による数値解と前述の仮定 1., 2. の課せられた有限要素法による数値解との比較を行なう。ここで領域 R は図4に示すよう

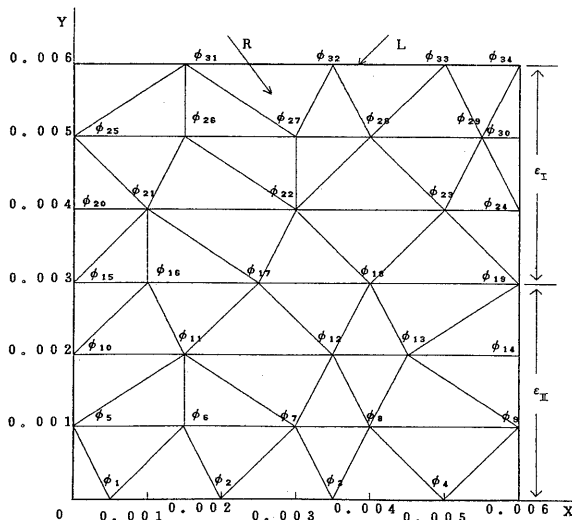


図4. 正方形領域のディリクレ問題

に $Y = 0.003$ を境にして2種類の媒質 $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ で満たされているものとする。

ディリクレ条件 $f(X, Y)$ と媒質定数 $\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$ として次の3組を例にとり数値実験を行なった。

1. $f(X, Y) = 80X + 60Y$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$$

2. $f(X, Y) = 80X + 60Y + 10XY$

$$\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$$

3. $f(X, Y) = 80X + 60Y + 10XY$

$$\varepsilon_I = 2\varepsilon_{II}$$

計算はSOR法で行ない、加速係数として $\omega = 1.2$ を使用した。これらの結果を表1, 2, 3にまた解の収束状態を図5に示す。境界条件 $f(X, Y)$ には真値との比較を行なうために調和関数を選んだ。

計算例1では ϕ が直線関数になる場合の解であり、本方法の理論の正当性が実証されている。

計算例2では ϕ が直線関数から大きく離れていないためこの程度の領域分割でも真値にはほぼ等しい解が得られている。

計算例3では媒質定数が ε_I キ ε_{II} であるため、 ϕ は直線関数から大きく離れている。したがって、この程度の領域分割で良い精度の解は望めない。本方法と有限要素法では小数点以下3桁目に違いが出ているが、本方法はガウスの発散の定理を出発点としたものであり、有限要素法は場のエネルギーを汎関数とするエネルギー最小原理を出発点としたもので両者の誘導過程の違いからこのような差が生ずるものである。しかし三角要素をさらに小さく (ϕ が要素内で直線近似できる程度に) することによって、両方法ともに限りなく解に収束するものである。

表 1. 計算例 1

境界条件 $f(x, y) = 80x + 60y$
 媒質定数 $\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$

節点番号	新しい方法	有限要素法	真 値
NO.= 6	0.180000	0.180000	0.180000
NO.= 7	0.300000	0.300000	0.300000
NO.= 8	0.380000	0.380000	0.380000
NO.=11	0.240000	0.240000	0.240000
NO.=12	0.400000	0.399999	0.400000
NO.=13	0.480000	0.479999	0.480000
NO.=16	0.260000	0.260000	0.260000
NO.=17	0.380000	0.379999	0.380000
NO.=18	0.500000	0.500000	0.500000
NO.=21	0.320000	0.320000	0.320000
NO.=22	0.480000	0.479999	0.480000
NO.=23	0.640000	0.640000	0.640000
NO.=26	0.420000	0.420000	0.420000
NO.=27	0.540000	0.540000	0.540000
NO.=28	0.620000	0.620000	0.620000
NO.=29	0.740000	0.740000	0.740000

表 2. 計算例 2

境界条件 $f(x, y) = 80x + 60y + 10xy$
 媒質定数 $\varepsilon_I = \varepsilon_{II}$

節点番号	新しい方法	有限要素法	真 値
NO.= 6	0.180015	0.180015	0.180015
NO.= 7	0.300029	0.300030	0.300030
NO.= 8	0.380039	0.380039	0.380040
NO.=11	0.240030	0.240029	0.240030
NO.=12	0.400069	0.400069	0.400070
NO.=13	0.480089	0.480090	0.480090
NO.=16	0.260030	0.260029	0.260030
NO.=17	0.380073	0.380075	0.380075
NO.=18	0.500119	0.500120	0.500120
NO.=21	0.320039	0.320040	0.320040
NO.=22	0.480118	0.480120	0.480120
NO.=23	0.640199	0.640200	0.640200
NO.=26	0.420074	0.420075	0.420075
NO.=27	0.540149	0.540150	0.540150
NO.=28	0.620200	0.620200	0.620200
NO.=29	0.740275	0.740275	0.740275

表 3. 計算例 3

境界条件 $f(x, y) = 80x + 60y + 10xy$
 媒質定数 $\varepsilon_I = 2\varepsilon_{II}$

節点番号	新しい方法	有限要素法
NO.= 6	0.186185	0.187686
NO.= 7	0.307862	0.309858
NO.= 8	0.387024	0.389034
NO.=11	0.254381	0.257210
NO.=12	0.417749	0.422047
NO.=13	0.492904	0.496021
NO.=16	0.283203	0.285736
NO.=17	0.413748	0.418412
NO.=18	0.530693	0.537039
NO.=21	0.329903	0.332935
NO.=22	0.497826	0.503279
NO.=23	0.648489	0.651799
NO.=26	0.425388	0.426940
NO.=27	0.547884	0.550193
NO.=28	0.626467	0.628274
NO.=29	0.742119	0.742904

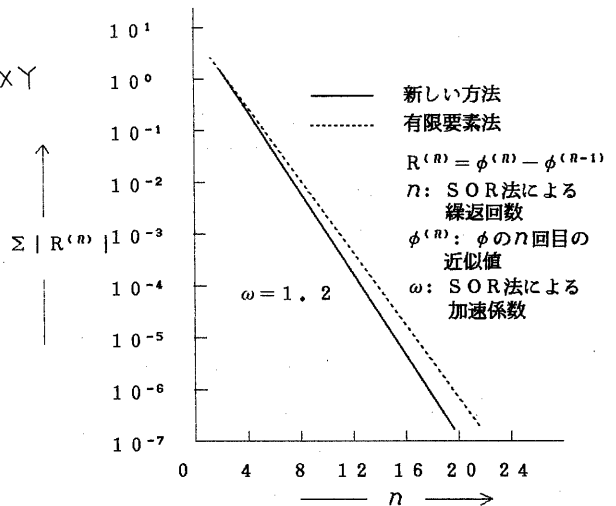


図 5. 解の収束状況

4. おすび

従来の差分法は領域を分割するメッシュの取り方に制約があるため、最近ではエネルギー最小原理を用いた有限要素法による解法が主流になりつつある。本論はメッシュを自由に設定できる新しい差分方程式の導出について報告した。この方法は直角座標系($x-y$)の二次元場($\partial/\partial z = 0$)を対象にしたもので、有限要素法と同様に領域内を任意の微小三角要素で分割しその節点上のポテンシャルを用いて偏微分方程式 $\nabla \cdot (\epsilon \nabla \phi) = 0$ を満足する差分方程式を導いている。数値実験によってこの理論の正当性が実証されている。

最後に卒研で数値実験をやってくれた後藤国和君(現九州日本電気)に感謝する。

5. 参考文献

- 1). 森本義広, 松山公一:
だ円型境界値問題解析プログラム, 情報処理, Vol. 16,
NO. 5, PP. 459~463
(May 1975)
- 2). 森本義広: BASIC による数
値計算入門, P171, 啓学出
版, 東京(1983)
- 3). 中田高義, 他: 電気工学の
有限要素法, P278, 森北出
版, 東京(1983)