

ベクトル計算機におけるSOR的方法の効率について

杉原正典, 小柳義夫, 森正武
筑波大学 電子・情報工学科

偏微分方程式の差分化によって得られる方程式を解く場合, ベクトル計算機上でSOR法を単純に実行せしめるとSOR法に似てはいるが本来のSOR法とは異なる方法になる。本論文では, このSOR的方法の効率を論ずる。特に, 理論, 実験両面から, このSOR的方法がSOR法に比べて劣ることを指摘する(SOR的方法をベクトル計算機上で動かしたとしても)。また, 最適加速パラメータの値が両方法で大きく異なることも示す。

On the efficiency of an SOR-like method suited to vector processors

Masaaki SUGIHARA, Yoshio OYANAGI and Masatake MORI

Institute of Information Sciences and Engineering, University of Tsukuba
Sakura, Niihari, Ibaraki 305, Japan

A simple implementation on vector processors of the SOR method for solving linear system of equations arising from the discretization of partial differential equations makes the SOR method into another, which, though, looks like the SOR method. In this paper the efficiency of this SOR-like method is investigated. Specifically it is demonstrated theoretically and practically that the SOR-like method is less than the SOR method in efficiency, even if the former is used on vector processors. It is also shown that the optimum relaxation factor of the SOR-like method is entirely different from that of the SOR method.

1. はじめに (問題提起)

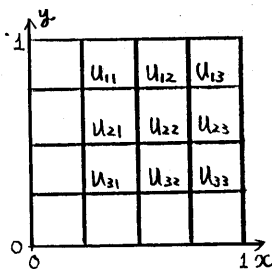
Poisson方程式なども差分法によって離散化することによって得られる連立一次方程式をSOR法を用いてベクトル計算機で解く場合、hyperplane法と呼ばれるようなベクトル計算機向きのアルゴリズムがよく知られている。しかし、ベクトル計算機で単純に（この意味は、後に正確に記す）SOR法を実行させることも考えられる（現実には、このような方法が使用されていることもあるようである）。しかし、この方法は、本来のSOR法とは異なる方法になる（hyperplane法はそのようなことはない）。ここでは、このSOR的方法の効率を、本来のSOR法と比較して、論ずる。

まず、初めに、矢にSOR的方法といふ方法を明確にしておく。ただし、最も簡単な場合についてのみに記す。

今、単位正方形領域 Ω で、次の Dirichlet 問題を、差分法で解くことを考える。

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad u(x, y) = \varphi(x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

このとき、初めに、単位正方形領域 Ω を N^2 等分し、格子点 K における u の値 u_K をつける (右図参照)。そして、方程式 (1) を差分近似 (5点、9点) し、 u_{ij} を未知数とする連立一次方程式をたてる。今、この一次方程式をSOR法を用いて解くとする。このとき、SOR法のプログラムの主要部は次のようになる (……は9点差分の場合)。



```

      Do 10 I=1,N-1
        Do 20 J=1,N-1
          U(I,J)=U(I,J)+w*(1/4*(U(I,J-1)+U(I,J+1)+U(I-1,J)+U(I+1,J))-U(I,J))
20      CONTINUE
10 CONTINUE

```

$$\left(+\omega(\frac{1}{5}(U(I,J-1)+U(I,J+1)+U(I-1,J)+U(I+1,J)) \right. \\ \left. \frac{1}{2\theta}(U(I+1,J-1)+U(I+1,J+1)+U(I-1,J-1)+U(I-1,J+1))-U(I,J)) \right)$$

このプログラムは、このままではバクトル化できない。そこで、この部分をバクトル化可能な次のようなプログラムに変えてしまうことが考えられる。

```

      Do 10 I=1,N-1
        Do 20 J=1,N-1
          V(J)=U(I,J)+ $\omega(\frac{1}{4}(U(I,J-1)+U(I,J+1)+U(I-1,J)+U(I+1,J))-U(I,J))$ 
20      CONTINUE
        Do 30 J=1,N-1
          U(I,J)=V(J)
30      CONTINUE
10      CONTINUE

```

(9点差分の場合も同様)

このプログラムに記述された連立一次方程式の解法が、矢張り SOR 的方法と言、
べき方法である。この方法は、明らかに、本来の SOR 法とは異なるものである。
従って、本来の SOR 法に関する議論は、そのまゝでは通用しない。そこで、以
下、この SOR 的方法を擬 OR 法と呼ぶことにし、その性質(最適加速パラメ
ータの値やその値を用いた時の収束の速さ等)を調べることにする。

まず, 2. において 5 点差分近似を用いた場合の SOR 法, 擬 SOR 法の解析を行う。
3. において 9 点差分近似の場合を解析する。

2. 5点差分近似を用いた場合のSOR法と擬SOR法

2.1 SOR法, 擬SOR法の反復の行列表現

まず解くべき方程式の行列表現は, $u = (u(1,1), u(1,2), \dots, u(1,N-1), u(2,1), u(2,2), \dots, u(2,N-1), \dots, u(N-1,1), u(N-1,2), \dots, u(N-1,N-1))^T$ と未知数を並べると, 次のようになる.

$$A_5 u = b \quad A_5 = \begin{pmatrix} B_5 & C_5 & 0 \\ C_5 & B_5 & C_5 \\ 0 & & C_5 & B_5 \end{pmatrix} \quad B_5 = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 & 0 \\ -1/4 & 1 & -1/4 \\ 0 & & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad C_5 = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{pmatrix}$$

N-1 7"□□□□ N-1 N-1

これから, SOR法, 擬SOR法の反復は, 次のように行列表現出来ることかわかる.

《SOR法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L_5^{SOR})^{-1} ((1-\omega)I + \omega U_5^{SOR}) u^{(m)} + b' (= L_5^{SOR}(\omega) u^{(m)} + b' \text{ と略記})$$

$$L_5^{SOR} = \begin{pmatrix} -B_5^L & 0 \\ -C_5 & -B_5^L & 0 \\ 0 & -C_5 & -B_5^L \end{pmatrix} \quad U_5^{SOR} = \begin{pmatrix} -B_5^U & -C_5 & 0 \\ -B_5^U & -C_5 & 0 \\ 0 & -C_5 & -B_5^U \end{pmatrix} \quad B_5^L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad B_5^U = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

《擬SOR法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L_5^{P-SOR})^{-1} ((1-\omega)I + \omega U_5^{P-SOR}) u^{(m)} + b'' (= L_5^{P-SOR}(\omega) u^{(m)} + b'' \text{ と略記})$$

$$L_5^{P-SOR} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -C_5 & 0 & 0 \\ 0 & -C_5 & 0 \end{pmatrix} \quad U_5^{P-SOR} = \begin{pmatrix} (-B_5^L - B_5^U) & -C_5 & 0 \\ (-B_5^L - B_5^U) & -C_5 & 0 \\ 0 & (-B_5^L - B_5^U) & -C_5 \end{pmatrix}$$

2.2 ω の変化に対する $\rho(L_5^{SOR}(\omega))$, $\rho(L_5^{P-SOR}(\omega))$ の変化 ($\rho(A)$ は行列 A のスペクトル半径を表わす)

$N=6$ の場合に, $L_5^{SOR}(\omega)$, $L_5^{P-SOR}(\omega)$ の固有値を数値的に調べることによって, 各 ω の値に対する $\rho(L_5^{SOR}(\omega))$, $\rho(L_5^{P-SOR}(\omega))$ の値を調べた. 結果を図1に示す.

この図から次のようなことがわかる.

- (1) 擬SOR法の最適加速パラメータは, SOR法の最適加速パラメータよりかなり小さい.
- (2) 擬SOR法の最適加速パラメータを用いた時の収束率は, SOR法の最適加速パラメータを用いた時の収束率よりかなり劣る.
- (3) 擬SOR法においては, 加速パラメータの選択を誤ると, 反復が収束しない (発散する) 場合が起こる.

ここに述べた(1)(2)(3)は, $N=6$ 以外の場合にも一般的にいえ.

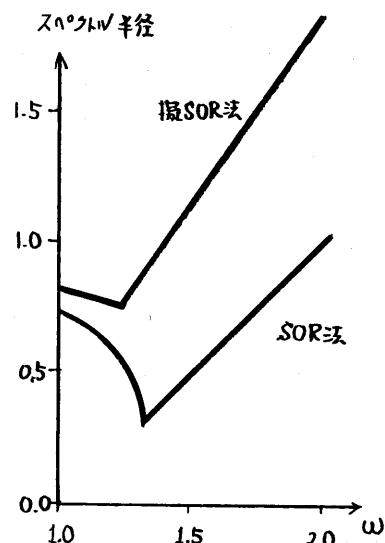


図1 各 ω に対する L_5^{SOR} , L_5^{P-SOR} のスペクトル半径

2.3 最適加速ハラーメータの決定 (理論的)

最適加速ハラーメータ (反復行列のスペクトル半径が最小になるような ω の値) が, ここで考えているような簡単な場合には, 理論的に決定できる. 以下その結果を示し, その証明を記す.

(1) SOR法の場合

Varga: "Matrix Iterative Analysis", Prentice-Hall, New York (1962) に完全な記述がある. 擬SOR法との比較のために, 結果を引用する.

$$\omega_{\text{opt}} (\text{最適加速ハラーメータ}) = 2 / (1 + \sin(\frac{\pi}{N}))$$

$$\lambda_{\text{opt}} = \rho(L_5^{\text{SOR}}(\omega_{\text{opt}})) = \omega_{\text{opt}} - 1$$

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\omega_{\text{opt}} = 2 - \frac{2\pi}{N} + O(\frac{1}{N^2}), \quad \lambda_{\text{opt}} = 1 - \frac{2\pi}{N} + O(\frac{1}{N^2}).$$

(2) 擬SOR法の場合

$$\omega_{\text{opt}}: \text{連立方程式} \begin{cases} 1 - (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - \lambda = -\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N})\omega\sqrt{\lambda} \\ \lambda = (1 + \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - 1 \end{cases} \text{の根として定まる.}$$

$$\lambda_{\text{opt}}: (1 + \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega_{\text{opt}} - 1 \text{ で与えられる.}$$

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{4}{3} - \frac{4}{9}(\frac{\pi}{N})^2 + O(\frac{1}{N^4}), \quad \lambda_{\text{opt}} = 1 - (\frac{\pi}{N})^2 + O(\frac{1}{N^4}).$$

Q: Jacobi法の反復行列のスペクトル半径 $= \cos \frac{\pi}{N} = 1 - \frac{1}{2}(\frac{\pi}{N})^2 + O(\frac{1}{N^4})$ ($N \rightarrow \infty$)

(ω_{opt} が上記のようにして与えられることの証明)

$L_5^{\text{P-SOR}}$ の固有値を ω と求めることを考える. まず, $L_5^{\text{P-SOR}}(\omega)$ の固有値を求めることは ($\det(L_5^{\text{P-SOR}}(\omega) - \lambda I) = 0$ を解くこと) は, $\det((1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_5^{\text{P-SOR}} + \omega U_5^{\text{P-SOR}}) = 0$ を解くことに帰着し得ることに注意する. このことは

$$\begin{aligned} \det(L_5^{\text{P-SOR}}(\omega) - \lambda I) &= \det((I - \omega L_5^{\text{P-SOR}})^{-1} ((1 - \omega)I + \omega U_5^{\text{P-SOR}}) - \lambda I) \\ &= (\det(I - \omega L_5^{\text{P-SOR}}))^{-1} \cdot \det((1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_5^{\text{P-SOR}} + \omega U_5^{\text{P-SOR}}) \end{aligned}$$

であることより, 明らかである. 以下, 方程式

$$\det((1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_5^{\text{P-SOR}} + \omega U_5^{\text{P-SOR}}) = 0$$

を考える. ここで, 行列 $(1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_5^{\text{P-SOR}} + \omega U_5^{\text{P-SOR}}$ は, 次のようなブロック対角行列である:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E & F & 0 \\ \lambda F & E & F \\ 0 & & \lambda F & E \end{pmatrix}}_{N-1 \text{ ブロック}}, E = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \omega - \lambda & \omega/4 & 0 \\ \omega/4 & 1 - \omega - \lambda & \omega/4 \\ 0 & & \omega/4 & 1 - \omega - \lambda \end{pmatrix}}_{N-3}, F = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega/4 & 0 \\ 0 & \omega/4 \end{pmatrix}}_{N-1}$$

このことに注意して, 次の補題を用いる.

《補題》

B, C を任意の m 次正交行列とすると, 次の等式が成立する.

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} B & C & 0 \\ \lambda C & B & C \\ 0 & & \lambda C & B \end{pmatrix}}_{m \text{ ブロック}} = \det \begin{pmatrix} B & \sqrt{\lambda} C & 0 \\ \sqrt{\lambda} C & B & \sqrt{\lambda} C \\ 0 & & \sqrt{\lambda} C & B \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^m \det(B + \delta_j \sqrt{\lambda} C) \quad \delta_j = 2 \cos(\frac{\pi j}{m+1})$$

$\det((1-\omega-\lambda)I + \lambda \omega L_5^{P-SOR} + \omega U_5^{P-SOR}) = 0$ は, 方程式族 $\det(E + \delta_j \sqrt{\lambda} F) = 0, \delta_j = 2\cos(\frac{j\pi}{N})$ ($j=1, \dots, N-1$) と同値であることがわかる. ここで, さらに, $E + \delta_j \sqrt{\lambda} F$ が 3 重対角行列であることに注意して, 再度, $\det(E + \delta_j \sqrt{\lambda} F) = 0$ に補題を適用する. このようにして, $L_5^{P-SOR}(\omega)$ の固有値 λ を求めるのと同値な次の一連の方程式族を得る.

$$(2) \quad 1 - (1 + \frac{\delta_k}{4})\omega - \lambda = \frac{\delta_k}{4} \sqrt{\lambda} \omega \quad (j=1, \dots, N-1, k=1, \dots, N-1)$$

次にこれらの方程式族の解 ($L_5^{P-SOR}(\omega)$ の固有値) に対して, 次の命題が成立することを示す.

《命題》

$$(2) \text{ の方程式族の根 } |\lambda| \leq \max \left\{ 1 - (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - \lambda = -\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}) \sqrt{\lambda} \omega \text{ の根の絶対値の最大値}, \right. \\ \left. | (1 + \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - 1 | \right\}$$

この命題が証明されれば, ω_{opt} が先に述べた連立方程式の根として定まることが明らかである(以下の命題の証明の初めの部分を参照).

(命題の証明)

(2) の方程式族は, 次のような形をした方程式の集まり (α, β が異なる) である.

$$(3) \quad \frac{1 - \alpha\omega - \lambda}{\omega} = \pm \beta \sqrt{\lambda} \quad (\Leftrightarrow \lambda^2 - (\beta^2\omega^2 + 2(1-\alpha\omega))\lambda + (1-\alpha\omega)^2 = 0)$$

$$(\alpha > 0, \beta \geq 0, \alpha > \beta)$$

方程式(3)の根に関して, 次のようなことが成立する.

($\beta=0$ の場合, (3) は一次方程式になるが, 以下で, 2 実根 $\Leftrightarrow$ 正根, 共役複素根 $\Leftrightarrow$ 負根と対応づければ, 得られる結果はすべて成立する)

まず, $\omega \in (0, \omega_1]$ なる ω に対して, 方程式(3)は 2 実根をもち, $\omega \in (\omega_1, \infty)$ なる ω に対して, 絶対値が $\alpha\omega - 1$ で与えられる共役複素根をもつ(図2参照).

ここで, 容易にわかるように, ω_1 は $2/(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ で与えられる. 今さらに, $\omega \in (0, \omega_1]$ においては, 根の絶対値の最大値は, ω の増加に従って, 単調に減少し, $\omega \in (\omega_1, \infty)$ においては, ω の増加に従って, 単調に増加する ($1/\alpha \leq \omega_1 = 2/(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})$ に注意せよ).

以上のことから明らかになるように, (2) の方程式の共役複素根の絶対値は, $(1 + \frac{2}{4} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - 1$ 以下である ($2\cos(\frac{\pi}{N})$ は, δ_k の最大値). そこで, 次に, 2 実根について詳細に解析する.

今, α が一定で β が異なる 2 つの方程式 ($\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式と, $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2 > \beta_1$ なる方程式) の実根について考える. このとき, 図3から明らかになるように, $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式が実根をもつかまわり, $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2$ なる方程式は実根をもたず, かつ, $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_2$ なる方程式の絶対値最大の根は, $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_1$ なる方程式の絶対値最小の根よりつねに大きい.

次に, β が一定で α が異なる 2 つの方程式 ($\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式と, $\alpha = \alpha_2 > \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式) の実根について考える. このとき, 図4から明らか

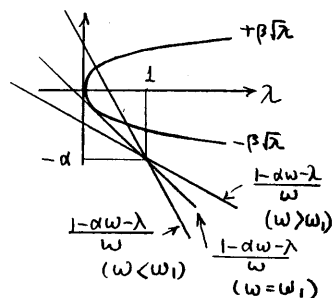


図2

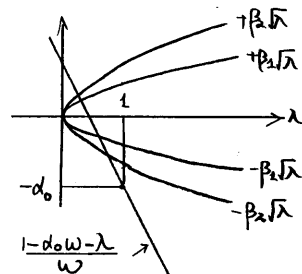


図3

よって, $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_0$ なる方程式が実根をもつかまり
 $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_0$ なる方程式は実根をもつ, かつ, $\alpha = \alpha_2$
 $\beta = \beta_0$ なる方程式の絶対値最大の根は, $\alpha = \alpha_2, \beta = \beta_0$ なる
 方程式の絶対値最大の根よりつねに大きい.

以上の実根に関する考察により, (b) の方程式の実根
 の絶対値は, α が最小で β が最大の (b) の方程式の絶対
 値最大の根よりつねに小さいことがわかる. つまり,
 (a) の実根は, $\pm (1 - \frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2}))\omega - \lambda = -\frac{1}{2} \cos(\frac{\pi}{2})\omega \sqrt{\alpha}$ の
 根の絶対値の最大値より小さいことがわかる.

以上で, 命題の証明は完了した.

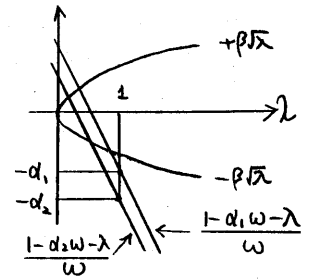


図4

2.4 数値例

境界条件が次で与えられるような Dirichlet 問題:

$$u(0, y) = 0, \quad u(1, y) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$$

を差分 ($N=6$) した連立一次方程式を SOR 法と擬 SOR 法で解いた時の, 残
 差の Max-Norm の変化を図5に示す (初期値 $u^{(0)} = 0$ とした)

この図から, 2.2 に述べた (1)(2)(3) が確認される. より大きな N に対する数値実
 験結果においても, 2.2 に述べた (1)(2)(3) が確認される (結果をここに記すことはで
 きないが)

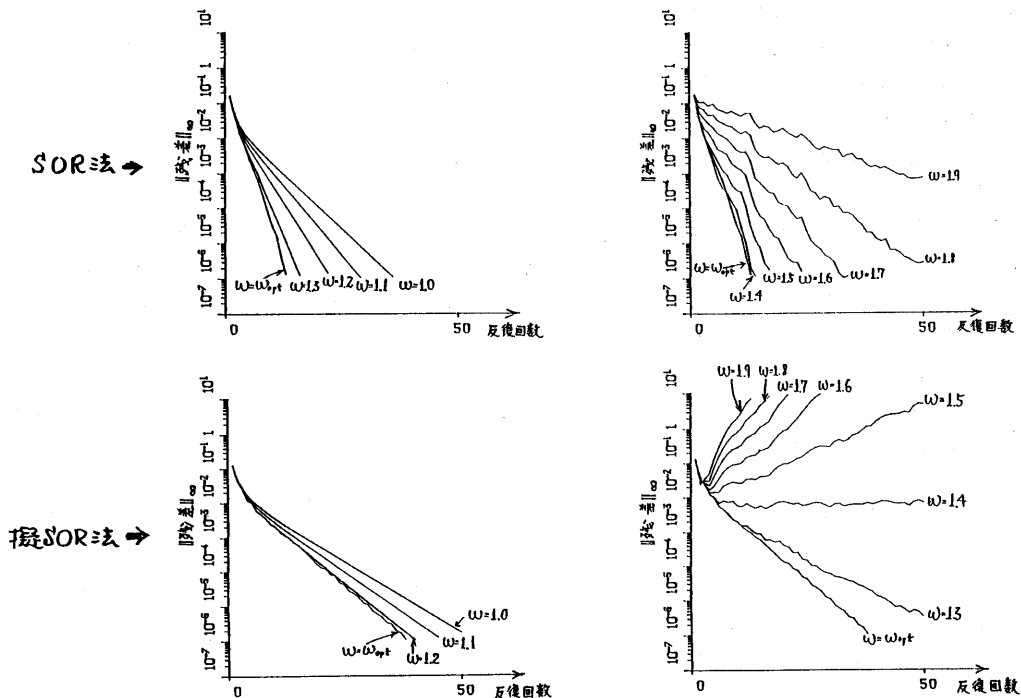


図5. SOR法, 擬SOR法における残差の Max-Norm の変化 (5点差分近似)

3. 9点差分近似を用いた場合のSOR法と擬SOR法

3.1 SOR法, 擬SOR法の反復の行列表現

まず解くべき方程式の行列表現は, 次のようになる.

$$A_q u = b \quad A_q = \begin{pmatrix} B_q & C_q & 0 \\ C_q & B_q & C_q \\ 0 & & C_q & B_q \end{pmatrix} \quad B_q = \begin{pmatrix} 1 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 1 & -1/5 \\ 0 & & -1/5 & 1 \end{pmatrix} \quad C_q = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/20 & 0 \\ -1/20 & -1/5 & -1/20 \\ 0 & & -1/20 & -1/5 \end{pmatrix}$$

また, SOR法, 擬SOR法の反復は, 次のように行列表現できることがわかる.

《SOR法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L_q^{SOR})^{-1} ((1-\omega)I + \omega U_q^{SOR}) u^{(m)} + b^* (\equiv \mathcal{L}_q^{SOR}(\omega) u^{(m)} + b^*)$$

$$L_q^{SOR} = \begin{pmatrix} -B_q^L & & 0 \\ -C_q & -B_q^L & \\ 0 & & -C_q & -B_q^L \end{pmatrix} \quad U_q^{SOR} = \begin{pmatrix} -B_q^U & -C_q & 0 \\ & -B_q^U & -C_q \\ 0 & & -B_q^U & -C_q \end{pmatrix} \quad B_q^L = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -1/5 & 0 & \\ 0 & & -1/5 & 0 \end{pmatrix} \quad B_q^U = \begin{pmatrix} 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & & -1/5 & \\ 0 & & & -1/5 \end{pmatrix}$$

《擬SOR法》

$$u^{(m+1)} = (I - \omega L_q^{P-SOR})^{-1} ((1-\omega)I + \omega U_q^{P-SOR}) u^{(m)} + b'' (\equiv \mathcal{L}_q^{P-SOR}(\omega) u^{(m)} + b'')$$

$$L_q^{P-SOR} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ -C_q & 0 & \\ 0 & & -C_q & 0 \end{pmatrix} \quad U_q^{P-SOR} = \begin{pmatrix} (-B_q^L - B_q^U) & -C_q & 0 \\ & (-B_q^L - B_q^U) & -C_q \\ 0 & & (-B_q^L - B_q^U) & -C_q \end{pmatrix}$$

3.2 ω の変化に対する $\rho(\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega)), \rho(\mathcal{L}_q^{P-SOR}(\omega))$ の変化

$N=6$ の場合に, $\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega), \mathcal{L}_q^{P-SOR}$ の固有値を数値的に調べることにし, ω の値に対する $\rho(\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega)), \rho(\mathcal{L}_q^{P-SOR}(\omega))$ の値を調べる. 結果を図6に示す.

この図から, 9点差分近似を用いた差分比によつて得られた連立一次方程式にSOR法, 擬SOR法を適用する場合においても, 2.2で述べた(1)(2)(3)と同様のことが言えることがわかる.

また, $N=6$ 以外の場合についても一般に同様のことが言える.

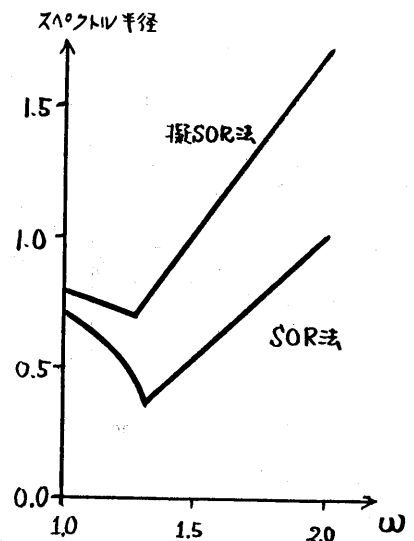


図6 各 ω に対する $\mathcal{L}_q^{SOR}, \mathcal{L}_q^{P-SOR}$ のスノクトル半径

3.3 最適加速パラメータの決定(理論的)

1) SOR法の場合

種々の数値実験から, 次のことがわかった. 確率性をもっていないようである(証明は未定).

『 $\alpha = \cos(\frac{\pi}{N})$ とする. この時, λ に関する4次方程式:

$$(1-\omega-\lambda)^4 - 2\alpha^2(8+d^2) \cdot \left(\frac{\omega}{5}\right)^2 \lambda(1-\omega-\lambda)^2 + \alpha^8 \left(\frac{\omega}{5}\right)^4 \lambda^2 + 16\alpha^4 \left(\frac{\omega}{5}\right)^3 \lambda(\lambda+1)(1-\omega-\lambda) - 4\alpha^6 \left(\frac{\omega}{5}\right)^4 \lambda(\lambda+1)^2 = 0$$

の実根の最大値と虚根の絶対値が一致する ω が ω_{opt} である. λ_{opt} は, $\omega = \omega_{opt}$

の時の λ の 4 次方程式の実根の最大値を与えられ、

漸近評価 (実験式)

上記の「----」が成立するとして、 $N \leq 1000$ について、 $\omega_{opt}, \lambda_{opt}$ を求めて、次の実験式を得た。

$$\omega_{opt} \approx 1 - \frac{6.63}{N}, \quad \lambda_{opt} = 1 - \frac{5.61}{N}$$

(上記の λ の 4 次方程式の由来を簡単に記しておく)

2.3 の (2) で述べたと同様に、 $\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega)$ の固有値を求めること ($\det(\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega) - \lambda I) = 0$) を解くことは、 $\det((1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_q^{SOR} + \omega U_q^{SOR}) = 0$ を解くことに帰着される。ここで、行列 $(1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_q^{SOR} + \omega U_q^{SOR}$ の形に注意して、補題を 2 段階に用いて、 $\det((1 - \omega - \lambda)I + \lambda \omega L_q^{SOR} + \omega U_q^{SOR})$ を分解する。断りとして、 $\det(\mathcal{L}_q^{SOR}(\omega) - \lambda I) = 0$ と同値な方程式族 $1 - \omega - \lambda - d_j(\omega/5)\sqrt{\lambda} - d_k(\omega/5)\sqrt{(\lambda - (d_j/4)\sqrt{\lambda})(1 - d_j/4)\sqrt{\lambda}} = 0$ ($d_j = 2 \cos(\pi j/N)$, ($j=1, \dots, N-1$), ($k=1, \dots, N-1$)) を得る。これらの方程式族のうちのもつ $(1 - \omega - \lambda \pm d_1(\omega/5) + d_1(\omega/5)\sqrt{(\lambda \pm (d_1/4)\sqrt{\lambda})(1 \pm (d_1/4)\sqrt{\lambda})}) = 0$ (複合同順) $(1 - \omega - \lambda \pm d_1(\omega/5) - d_1(\omega/5)\sqrt{(\lambda \pm (d_1/4)\sqrt{\lambda})(1 \pm (d_1/4)\sqrt{\lambda})}) = 0$ (複合同順) に対応する λ の 4 次方程式が、「----」の中にあるわけである。

(2) 擬SOR法の場合

$$\omega_{opt}: \text{連立方程式} \begin{cases} 1 - (1 - \frac{2}{5} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - \lambda = -\frac{\omega}{5} \cos(\frac{\pi}{N})(2 + \cos(\frac{\pi}{N}))\sqrt{\lambda} \\ \lambda = (1 + \frac{2}{5} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega - 1 \end{cases}$$

の根として定まる。

$$\lambda_{opt} = (1 + \frac{2}{5} \cos(\frac{\pi}{N}))\omega_{opt} - 1$$

(証明は、5 点差分近似の場合 (2.3 (2) で述べた) とほとんど同じである)

漸近評価 ($N \rightarrow \infty$)

$$\omega_{opt} = \frac{10}{7} - \frac{85}{98} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right), \quad \lambda_{opt} = 1 - \frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$$

Q Jacobi 法の反復行列のスペクトル半径 $= \frac{4}{5} \cos(\frac{\pi}{N}) + \frac{1}{5} (\cos(\frac{\pi}{N}))^2 = 1 - \frac{3}{5} \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^4}\right)$

表 1 に実際に $\omega_{opt}, \lambda_{opt}$ を計算した結果を示す

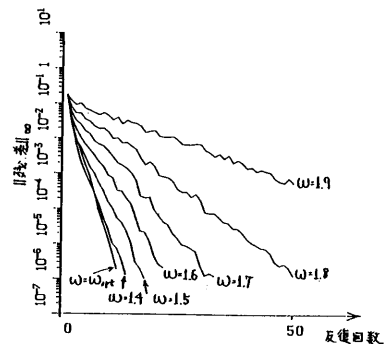
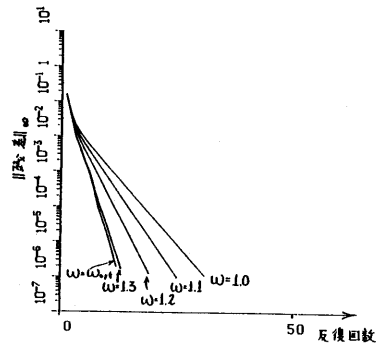
表 1. ω_{opt} と λ_{opt} (右が ω_{opt} , 左が λ_{opt})

	SOR法(5点)		擬SOR法(5点)		SOR法(9点)		擬SOR法(9点)	
N=6	1.33333	0.33333	1.23431	0.76878	1.31393	0.37071	1.26184	0.69896
N=10	1.52786	0.52786	1.29285	0.90764	1.50902	0.56335	1.35459	0.86991
N=20	1.72945	0.72945	1.32259	0.97574	1.71627	0.75377	1.40799	0.96425
N=50	1.88183	0.88183	1.33158	0.99606	1.87542	0.89351	1.42517	0.99411
N=100	1.93909	0.93909	1.33289	0.99901	1.93567	0.94529	1.42772	0.99852
N=1000	1.99373	0.99373	1.33332	0.99999	1.99337	0.99439	1.42856	0.99999

3.4 数値例

5 点差分近似の場合の数値例 (2.4) で用いた Dirichlet 問題を用いて数値実験を行う。図 7 に、9 点差分近似によつて得られる連立一次方程式にSOR法、擬SOR法を適用した時の残差の Max-Norm の変化を示した ($N=6$, 初期値 $u^{(0)} = 0$ とした)。

SOR法 →



擬SOR法 →

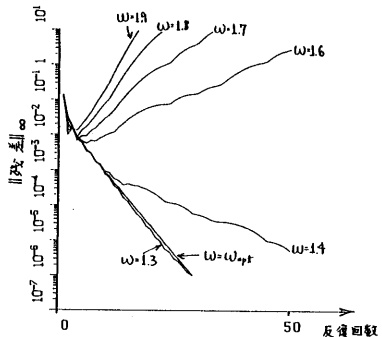
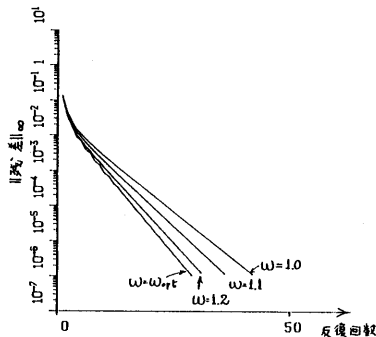


図7 SOR法, 擬SOR法における残差のMax-Normの変化 (9点差分近似)

この図から、明らかのように、9点差分近似を用いる場合にも、5点差分近似を用いる場合と同様のことが言えることがわかる。このことは、 $N=6$ 以外の場合にも同様と言える。

4. まとめ

以上から次のように言える (5点差分近似, 9点差分近似ともに)

- (1) SOR法の漸近収束率は $1 - C/N$ であるのに対して、擬SOR法の漸近収束率は $1 - C/N^2$ であり、Jacobi法の数倍である。従って、ベクトル計算機を使用し、擬SOR法を動かしたとしても、本来のSOR法に比べて、効率がよいとはいえない。
- (2) 擬SOR法の ω_{opt} は、SOR法のそれとは、大きく異なる。すなわち、SOR法何れの最適 ω (≈ 0.9...) を用いても、擬SOR法は発散してしまう。まとめとしては、『本来のSOR法で hyperplane 法などを用いてベクトル計算機上で動かすことがよい』といえる。

⑧ ベクトル計算機上での実際の数値結果は、発表当日示す。

↓ 下図は $\|残差\|_{\infty} \leq 10^{-10}$ まで書いたもの

