数値解析 22－3
(1987. 9. 19)

複素平面上の数値積分

平山　弘
幾徳工業大学　機械システム科

有限区間[a,b]の積分は、関数論におけるCauchyの積分表示を利用することによって、周期関数の一周期に渡る積分に変形できる。この変形された積分に台形公式を適用することによって、高精度の数値積分公式が得られる。これらの公式では、任意の閉曲線を含むので、どのようにそれを選ぶかによって、その公式の計算効率は大きく変化する。問題によってその積分路を選ぶことは、効率的に計算するには大変良い方法であるが、一般的な計算法としては、煩雑である。
このため、積分路を円に限定した積分法を提案する。積分路を円に限定するために、Joukowski変換を利用して変数変換を行なった。このとき、この積分公式の誤差Eは、Nを分割数、p，qを定数としたとき、E＝pexp(－qN)となり、理論的に最良の公式となることが示される。

Numerical Integration on the Complex Plane

Hiroshi HIRAYAMA
Dept. of Mechanical Systems Engng. Ikutoku Technical University
1030 Shimo-ogino Astugi Kanagawa-ken 243-02 Japan
(英称住所)

The integral of analytical function over a finite interval can be transformed into a contour integral by means of Cauchy's integral representation. The direct application of the trapezoidal rule to this this contour integral gives an effective method of the numerical integration.
We propose the integration method to take a circle contour as that of this integration by Joukowski's transformation. It is shown that the error of this numerical integration is ae^{-bN} as N tends very large number.(where a and b are constant, N is the number of the sampling points.)

1　まえがき

数値積分公式の一種である台形公式の誤差評価式とみなすことが出来る公式として、Euler-Maclaurinの総和公式[1]がある。これは

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left\{\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)+\sum_{k=1}^{N-1}f(a+kh)\right\} - \frac{B_2}{2!}\left[f'(b)-f'(a)\right]h^2 - \frac{B_4}{4!}\left[f'''(b)-f'''(a)\right]h^4 - \cdots - \frac{B_{2m}}{(2m)!}\left[f^{(2m-1)}(b)-f^{(2m-1)}(a)\right]h^{2m} - R_m h^{(2m+1)} \tag{1.1}$$

（ここで、$h=(b-a)/N$、B_nはBernoulli数である。）

この公式から容易にわかるように

$$f(a)^{(k)}=f(b)^{(k)} \quad (k=0,1,...,m) \tag{1.2}$$

であるならば、台形公式は(1.1)の左辺の積分を高精度近似することになる。

(1.1)から出発し、(1.2)を満たすようにしようとした公式として、伊理・森口・高沢の公式[2]（ＩＭＴ公式）および高橋・森の二重指数関数型数値積分公式[2]（ＤＥ公式）が有名である。これらの公式は、変数変換を行い積分区間の両端で微係数を含めて、急減少する関数に変形して、(1.2)の条件を満足させようとするものである。変数変換後の積分が有限区間、無限区間の違いがあるが、積分区間の両端で微係数と共に急減少してゼロに近付くため、(1.2)の条件は自動的に満たされる。

もう一つ、(1.2)のようにな条件を満たすのは、f(x)が周期関数で積分区間の両端で解析的であることである。被積分関数を何らかの方法で周期関数に変形し、台形公式を適用すれば高精度の結果が期待できる。この発想が最も単純であるが、この観点から出発した積分公式は存在しなかった。ここでは、この観点に立ち、関数値を複素数まで拡張し、この条件を満たすように変形する数値積分公式を提案する。また、このようにすれば非常に効率の良い高精度公式が得られる事を示す。

このように、変形された積分は、任意に変形可能な積分路を含む。積分路をうまく選べば、驚異的な効率で計算可能なものもある。しかしながら、積分路をうまく選ぶには、被積分関数がどんな性質を持つかを調べなければならない。このため、全体としての効率は必ずしも良いとは限らない。しかし、同じ性質を持つ関数の積分を多数求める場合および有効な積分路が簡単に求められる場合には、この方法は非常に良い方法になると思われる。

積分路を円に限定し、この数値積分法の誤差評価を行なった。積分路を円に限定するために、流体力学等で良く使われ最も単純だと思われるJoukowski変換を使

った。このようにして得られた結果は積分路が円の場合だけでなく、定性的には、一般の積分路の場合でも成り立つ。誤差は、分割数Nが十分大きいとき、

$$\mathrm{Error} = \alpha\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^N \tag{1.3}$$

となる。ここで、R_1は変数変換後の積分区間長さ、R_2は変数変換後の積分区間に最も近い特異点までの距離である。これは、誤差が分割数に対して指数関数的に減少しており、高橋・森[3)]によれば、最良な公式となる。

また、これらの計算法は、Goursatの導関数の積分表示に対して適用すれば、数値微分法の効率的な計算法も与えることになる。

2 周回積分への変換

関数f(x)が実軸上の区間[a,b]を含む複素平面上の領域Dで正則であるとする。このとき、領域D上の点tのおいて、Cauchyの積分表示[4)]により

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-t}\,dz \tag{2.1}$$

となる。ここで、積分路Cは点tを含むD内の閉曲線である。したがって、区間[a、b]の積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz \int_a^b \frac{dt}{z-t}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \log\left(\frac{z-a}{z-b}\right) f(z)\,dz \tag{2.2}$$

ここで、積分路Cは、積分区間[a,b]を囲むD内の閉曲線である。閉曲線として解析関数のパラメータ表示出来る曲線をとり、その閉曲線に沿って積分すれば、周回積分になる。

積分区間の端点で特異性を持つ場合、被積分関数は、

$$f(x) = w(x)\,g(x) \tag{2.3}$$

と表示出来る。ここで、w(x)は特異性を持つ部分、g(X)は領域Dで正則な部分である。w(x)とg(x)を選び方は一意性はないが、以下の議論ではどのようにとっても問題はない。g(x)は正則だから、Cauchyの積分表示から

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{z-t}\,dz \tag{2.4}$$

となる。(2.2)に相当する式は、

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b w(x)\,g(x)\,dx = \int_a^b w(x)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{z-x}\,dz\right\} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C g(z) \left[\int_a^b \frac{w(x)}{z-x} dx \right] dz \tag{2.5}$$

となる。(2.5)の[]で囲んだ部分は関数w(x)の有限Hilbert変換と呼ばれものである。有限Hilbert変換の例[4)]を表1に示す。

区間	関 数	Hilbert変換
[a,b]	1	log((z-a)/(z-b))
[0,1]	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{z}} \log\left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)$
[0,1]	$x^a(1-x)^b$	$\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)} \frac{1}{z} F(a+1, 1; a+b+2; \frac{1}{z})$
[0,1]	$\log x$	$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 z^k}$

表 1　有限Hilbert変換表
(ここで、Γ(X)はgamma関数、F(a,b;c;x)はGaussの超幾何関数である。)

(2.5)のように変形された積分では、積分区間の端点に於ける特異性は計算には現われなくなり、この段階で、この種の特異性は完全に除去出来たことになる。ここで問題になるのは、通常の積分法ではあまり問題とならない積分区間近くにある特異点である。

この積分法では、積分区間の端点に於ける特異性によって、有限Hilbert変換表を引き周回積分に変形する作業がある。この作業内容はGauss数値積分法と似たようなものなので、使い易さも同じ程度になるので、使用上大きな問題はないと思われる。

3　誤差解析

台形公式を使って周回積分の値を計算したときの誤差を求める。周回積分に変形された積分は次のような形で表わされる。

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz \tag{3.1}$$

ここで、f(x)は次のようにLaurent展開する。

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \tag{3.2}$$

(3.2)の第１項の積分Ｊは、原点を中心とした半径ｒの円を積分路にとり、Ｎ等分に分割し、台形公式を使って求めると

$$J_N = \frac{2\pi}{N} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+1} \left\{ \sum_{j=1}^{N} e^{i(n+1)hj} \right\} \quad \text{where} \quad h = \frac{2\pi}{N} \tag{3.3}$$

(3.3)の｛｝の中の和Ｓは、等比数列であることを利用して

$$S = \frac{e^{i(n+1)h} \{1 - e^{i(n+1)hN}\}}{1 - e^{i(n+1)h}} \tag{3.4}$$

(n+1)hが2πの倍数であるとき、(3.4)の意味を持たない。この場合(3.3)の定義式から直接計算出来てＳ＝Ｎとなる。それ以外の場合、(3.8)の分子がゼロとなる。したがって、(3.3)は

$$J_N = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} a_{nN-1} r^{nN} \tag{3.5}$$

ここで

$$a_{nN-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{nN}} dz \tag{3.6}$$

であるを利用すると、(3.5)は

$$J_N = \frac{1}{i} \int_C f(z) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{z}\right)^{nN} dz = \frac{1}{i} \int_C \frac{\left(\frac{r}{z}\right)^{n} f(z)}{1 - \left(\frac{r}{z}\right)^{N}} dz \tag{3.7}$$

元々(3.2)の第１項は正則関数だから、Cauchyの定理によってゼロである。したがって、(3.7)の式が(3.2)の第１項から生じる誤差となる。(3.7)の積分を評価するために、原点を中心とした半径Ｒの円周上での積分を考える。この円周上でのf(X)の最大値をM_fとしたとき、

$$E_N = J_N \leqq \frac{2\pi \left(\frac{r}{R}\right)^N}{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^N} M_f < 2\pi M_f \left(\frac{r}{R}\right)^N \tag{3.8}$$

(3.8)の半径Rは、(3.6)の条件を満たすものであるならばどのようにも選ぶことが出来る。(3.8)の式をみるとRは出来るだけ大きくとるようにしたほうがよりよい良い誤差評価式となる。Rの最大値は(3.6)から、f(Z)の原点に最も近い特異点までの距離となる。

(3.2)の第2項についても同様な方法で誤差評価が可能である。上と同様にして、半径r上でのN等分し台形公式を適用する。(3.7)のような式が出来るから、これを半径1/Rの円周上で評価する。このとき、誤差は

$$\mathrm{Error} \leqq 2\pi M_f \left(\frac{R}{r}\right)^N \tag{3.9}$$

の様になる。ここで、M_fは1/Rの半径を持つ円周上でのf(Z)/Z^2の最大値である。(3.8)の場合と同様にRを大きくとれば(3.9)の誤差評価式はより良いものとなる。このRを制限するのは積分区間の大きさである。(3.8)と(3.9)から全体の誤差評価が得られる。

$$\mathrm{Error} \leqq 2\pi M_{f1}\left(\frac{r}{R_1}\right)^N + 2\pi M_{f2}\left(\frac{R_2}{r}\right)^N \tag{3.10}$$

(3.10)では、サフィックスに1、2によってそれぞれどの項からの影響であるかを示した。(3.10)から誤差が最小値となるのは

$$\frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{r} \qquad r^2 = R_1 R_2 \tag{3.11}$$

のときである。すなわち、積分区間を含む最も小さい半径とf(X)の最も原点に近い特異点までの距離の相乗平均を半径としてとれば最も効率の良い計算法となる。このとき、誤差は

$$\mathrm{Error} \leqq A\left(\frac{r}{R}\right)^N \quad (A = 2\pi M_{f1} + 2\pi M_{f2}\ ,\ R = R_1) \tag{3.12}$$

となる。逆に、積分区間が短くて被積分関数の特異点が原点から十分遠くに有るならばその積分はいい性質をもつ関数の積分だと言える。また、この誤差評価式には、積分区間の端点に於ける特異性はまったくでて来ない点に注意しなければならない。

4 数値例

4.1 数値微分

y=tan X としたとき X=1 における微分係数を求める。

Goursatの導関数の積分表示を利用して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\tan Z}{(Z-1)^2}\,dZ \tag{4.1.1}$$

tan Z は X=1 のまわりで、次のようにLaurent展開できる。

$$\frac{\tan Z}{(Z-1)^2} = \sum_{K=-1}^{\infty} a_K (Z-1)^K \tag{4.1.2}$$

この例の場合、誤差は(3.2)の第1項に相当する部分から生じるから、積分路の半径rを出来るだけ小さくとれば高精度の結果が期待できる。表2に分割数N=4の場合の結果を示す。

これから分かるように、半径rを小さくしていけば、いくらでも良い近似値を得る事が出来る。これは、数値微分の定義式

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad (4.1.3)$$

で、hを小さくすればいくらでも良い近似値を得られることに相当する。

半径r	誤差
0.1	0.29×10^{-2}
0.001	0.29×10^{-10}
0.00001	0.29×10^{-18}

表２　半径rを変化させた時の積分の誤差

表３には、半径rを0.001に固定し分割数Nを変化させた場合の結果を示す。

分割数　N	誤差　E_N	E_N / E_{N-1}
1	0.16×10^{4}	
2	0.95×10^{-5}	0.59×10^{-8}
3	0.16×10^{-7}	0.18×10^{-2}
4	0.29×10^{-10}	0.18×10^{-2}
5	0.51×10^{-13}	0.18×10^{-2}
6	0.89×10^{-16}	0.17×10^{-2}
7	0.16×10^{-18}	0.18×10^{-2}
8	0.27×10^{-21}	0.17×10^{-2}
9	0.48×10^{-24}	0.18×10^{-2}
10	0.67×10^{-27}	0.14×10^{-2}

表３　分割数を変化させた時の積分の誤差

これか容易に分かるように、分割数が増加するとともに誤差が指数関数的に減少することがわかる。またその減少比率をほぼ一定である。この結果から(3.8)を利用してRを求める

$$R = \frac{0.1 \times 10^{-2}}{0.18 \times 10^{-2}} = 0.56 \qquad (4.1.4)$$

となる。この数値はtan xの極と微係数を求めている位置X = 1の距離(π/2-1)にほぼ一致する。

4. 2　良い性質を持つ積分

次のような積分を求める。

$$I = \int_0^1 \log x \, dx \qquad (4.2.1)$$

この積分は次のような積分に変形出来る。

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \Phi(z) \, dz \qquad (4.2.2)$$

ここで、Φ(Z)はlog zのHilbert変換である。これは、Hilbertの変換表からもわかるように、(3.2)の第2項だけからなる型である。この場合積分路rは出来るだけ大きくとれば良い結果が得られることは、(3.10)から容易に分かる。この結果を以下の表4に示す。分割数N＝1でも積分値がえられることは、実用的には問題があるとしてもたいへん興味深いものである。

半径 r	分割数 N	誤差 E_N	E_N / E_{N-1}
10	1	0.24×10^{-1}	
	2	0.11×10^{-2}	0.46×10^{-1}
	3	0.42×10^{-4}	0.38×10^{-1}
	4	0.19×10^{-5}	0.45×10^{-1}
	5	0.80×10^{-7}	0.42×10^{-1}
	6	0.37×10^{-8}	0.46×10^{-1}
	7	0.16×10^{-9}	0.43×10^{-1}
	8	0.78×10^{-11}	0.49×10^{-1}
	9	0.35×10^{-12}	0.49×10^{-1}
	10	0.17×10^{-13}	0.49×10^{-1}
1000	1	0.25×10^{-3}	
	2	0.11×10^{-6}	0.44×10^{-3}
	3	0.42×10^{-10}	0.38×10^{-3}
	4	0.19×10^{-13}	0.45×10^{-3}
	5	0.80×10^{-17}	0.42×10^{-3}
	6	0.37×10^{-20}	0.46×10^{-3}
	7	0.16×10^{-23}	0.43×10^{-3}
	8	0.77×10^{-27}	0.48×10^{-3}
	9	0.35×10^{-30}	0.45×10^{-3}
	10	0.60×10^{-32}	0.17×10^{-3}
100000	1	0.25×10^{-5}	
	2	0.11×10^{-10}	0.44×10^{-5}
	3	0.42×10^{-16}	0.38×10^{-5}
	4	0.19×10^{-21}	0.45×10^{-5}
	5	0.80×10^{-27}	0.42×10^{-5}
	6	0.0	

表4　log X の区間[0,1]に渡る積分の誤差

4．3　他の積分公式との比較

他の積分公式と比較するために、[5],[6]で扱っている積分を使ってこの積分と比較を行なった。それを表5に示す。この表から今回の方法は、ほぼ最高の成績があげる事が出来た。積分路を円にとれない場合、Joukowski変換によって円にとれるように変形した。

	今の方法	DE	IMT	DAQN9	QUAD	CADRE
$\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$	1.0×10^{-12} 14	3.3×10^{-12} 44	4.9×10^{-13} 127	2.5×10^{-12} 161	2.2×10^{-10} 361	1.2×10^{-10} 129
$\int_0^1 \frac{2dx}{2+\sin 10\pi x}$	7.3×10^{-13} 320	1.4×10^{-10} 387	2.2×10^{-12} 509	1.9×10^{-12} 441	3.3×10^{-13} 757	8.4×10^{-12} 785
$\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^x-1}$	3.1×10^{-20} 14	3.4×10^{-12} 48	6.6×10^{-13} 127	2.2×10^{-18} 21	2.1×10^{-14} 37	2.2×10^{-12} 17
$\int_0^{10} \frac{50dx}{\pi(2500x^2+1)}$	2.9×10^{-13} 154	1.0×10^{-12} 211	1.5×10^{-11} 255	4.8×10^{-12} 211	3.3×10^{-12} 343	1.3×10^{-11} 337
$\int_0^1 \log x\,dx$	0.42×10^{-16} 3	3.9×10^{-13} 44	2.0×10^{-11} 127	2.9×10^{-12} 201	5.7×10^{-7} 415	4.5×10^{-9} 369

表５　いろいろな積分法との比較（誤差と分割数）

５　結論

今回提案した周期関数に変換する方法は、他の有力な方法以上の性能を発揮することがわかった。特に積分区間の端点における特異性はこの様な変換によって完全に除去出来ることがわかった。

数値計算の例は幾徳工業大学計算センターのＭ－１７０Ｆで４倍精度でおこなった。

参考文献

１）　篠原　能材　：　数値解析の基礎，日新出版（１９７８）

２）　P.J.Davis, P.Rabinowitz : METHODS OF NUMERICAL INTEGRATION, ACADEMIC PRESS(1975)

３）　H.Takahashi, M.Mori : Error Estimation in the Numerical Integretion of Analytic Function, Rep. Compt. Centre. Univ. Tokyo, 3 (1970) 41-108

４）　今井　功　：　応用超関数論　Ｉ，ＩＩ，サイエンス社（１９８１）

５）　戸田、小野：　京都大学数理解析研究所講究録，No.339(1978)P.74

６）　二宮　：　情報処理、Vol.21 No.5 (1980) P.504