

デ ジ タ ル マ ッ プ ・ シ ス テ ム (震 研 地 図 シ ス テ ム) 作 成
に 於 ける 数 値 計 算 上 の 諸 問 題

松 山 澄 子

東 京 大 学 地 震 研 究 所

数値データにによる地図システムを作成してわかった次の2件についてのべる。

- 1) UTM法または新日本座標でかかれている地図から、経緯度の地図データを作るには、平面直角座標から、経緯度座標への変換が必要になる。この変換式の漸近展開式の打ち切り誤差を評価した結果、 $0.01''$ までの精度を得るには、5次までの項を計算すれば十分である。
- 2) 地図データを経緯度で保有する場合、利用する地図の範囲に応じて上位桁を取り去り、有効桁数の多い形で整備すれば、種々の点で効率がよい。

Some Numerical Problems in Map Management System (in Japanese)

Sumiko Hiyama

Earthquake Research Institute, the University of Tokyo
Yayoi 1-1-1, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

During the employment of our map management system (Mapping Information System of Earthquake Research Institute), we found several problems to be solved. One is how to transform UTM coordinates into geodetic ones accurately. Error estimations were carried out and proved that we could neglect terms of more than degree 6 in their asymptotic expansion series within the error of $0.01''$. Another is how to keep position data in latitude and longitude. In usual case, considering area is not so large and first some digits of the data are same. So, the most effective way is to keep them in the form in which first useless digits are omitted and add significant digits in the end.

1. はじめに

近年地図情報システムの研究がさかんになされている。しかし、データ作成が容易であるため、それらの多くは地図データを画像情報の形で持っていることが多い。

一方東大地震研究所で我々が開発した『震研地図システム』¹⁾では、地図データを経緯度といった形の数値情報で保有している。これは地図上に重ね描きをする利用者のデータ（例えば震源位置など）がすべて経緯度で表わされているためである。

このように地図情報を数値で保有することになると、データの重ね描きができること、好みの投影法で地図が描けることなどの利点があるが、半面データが浮動小数点であるため、画像情報だけのシステムとは異なった種々の問題が生じる。例えば、地図の移動、拡大、縮小に多量の演算が必要であるため、高速演算処理アルゴリズムを開発しなければならないこと、データ処理過程で遭遇する誤差をおさえることなどといった問題である。ここでは、こういった問題のうちいくつかについて述べる。

まずはじめに、地図データ作成上の問題を扱う。一般に地図データは、適当な地図から、たとえば海岸線などの位置をデジタイザーで読み取ることによって作成する。ところで、我々のシステムでは、地図データの数値を経緯度で統一している。したがって、読取データを経緯度(ϕ , λ)へ変換する計算が必要になる。

現在、国土地理院発行の1/10000 国土基本図や1/25000 地形図は新日本座標系と呼ばれる投影システムで作られている。この投影では、日本全土を経度 $1.5^\circ \sim 2.0^\circ$ ずつの範囲で17地域に分け、それぞれに座標原点を定め、またそれぞれの範囲の地図上の位置はガウス・クリューゲル法で投影している。

一方、1/50000 より小縮尺の地図は、昭和35年以降国際横メルカトール(UTM)法で整備されている。これは地球全体を経度 6° ずつ60ゾーンに分け、その各ゾーンで赤道上に原点をとり、ガウス・クリューゲル法で投影したものである。第二次世界大戦後、この投影法は日本だけでなく、多くの国で採用されている。

こうしたことから、読取座標を経緯度に変換するためには、ガウス・クリューゲル投影による平面座標(x, y)を経緯度(ϕ, λ)へ変換することが必要である。この方法を第2節で考察する。勿論、他の投影法で作られた地図もたくさんあるが、これらの場合はほとんど変換が簡単であり、地図データを整備する上で考える必要があるのは、ガウス・クリューゲル投影の場合だけである。

この変換の応用例として、ガウス・クリューゲル法で投影された1/10000 の諏訪湖の地図の等深線から経度 $11.25''$ 緯度 $7.5''$ ごとの格子点に対する水深を求めた場合について第3節で述べることにする。

つぎに高速演算アルゴリズムの開発と誤差をおさえる問題について述べる。上記の座標変換では、地球の赤道半径といった大きな数値($6 \times 10^6 \text{ m}$)も使用される一方、求める経緯度の精度は $1/100$ 秒、つまり 0.48×10^{-7} ラジアンという小さい値も同時に扱われる。そのため、 10^{-8} という小さな補正項も計算の対象となる。したがって、桁落ちなどが起こらないよう、演算上特別の注意が必要になる。さらに海岸線データなど数十万個という大量のデータを扱うので、効率のよい演算アルゴリズムが必要になる。また、データは有効桁を最大限に生かせるように整理されていなければならない。こういったことを第4節で扱う。

2. 座標変換の数値計算上の問題

第1節で述べたように、考えなければならない投影法は、ガウス・クリューゲル法である。これは地球を回転楕円体と見なしたとき、この楕円体面上に定義した緯度、経度(ϕ, λ)を平面直角座標(x, y)へ次の条件で投影したものである。

1) 等角投影であること。このとき原像と写像とが、微小部分では相似になる。言い換えれば、写像の原像に対する増大率が微小部分では、あらゆる方向に対して一定になる。

2) 平面座標の x 軸が、1つの経線の等距離投影になる。

この投影を考えるには、楕円体面上の緯度経度(ϕ, λ)からいきなり平面への写像を考えるより ϕ の代りに異性緯度 q を導入し、(q, λ)から平面(x, y)への等角写像を考えると都合がよい。 q は、増大率があらゆる方向に一定であることを示す中間パラメータである。楕円体面座標の ϕ と q との間には

$$q = \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \sin \phi}{1 + e \sin \phi} \right)^{e/2} \quad \dots (1)$$

の関係がある。

今(q, λ)から(x, y)への写像 f を考え

$$f(q + i\lambda) = x + iy \quad \dots (2)$$

とする。これはコーシー・リーマンの微分方程式を満たすので、等角写像である。次に条件2)を考える。 x 軸がひとつの経線の等距離投影であるということは x 軸の原点を赤道に置くとすれば、 x が q までの子午線弧長に等しくなることである。言い換えれば、図1で B を赤道からの子午線弧長とした時写像の式(2)で

$$x = f(q) = B \quad \dots (3)$$

が成り立つことである。

今、 $\Delta \lambda = 0$ として(2)式をTaylor展開し、実部 x 、虚部 y を関係式(1)、(3)を使って整理すると、(x, y) と (ϕ, λ) についての次の実用的な関係式を得る。

$$\begin{aligned} x &= B + (N/2)(\Delta \lambda)^2 \sin \phi \cos \phi + (N/24)(\Delta \lambda)^4 \sin \phi \cos^3 \phi (5 - t^2 + 9n^2 \\ &\quad + 4n^4) + (N/720)(\Delta \lambda)^6 \sin \phi \cos^5 \phi (61 - 58t^2 + t^4 + 270n^2 - 330 \\ &\quad \cdot n^2 t^2) + (N/40320)(\Delta \lambda)^8 \sin \phi \cos^7 \phi (1385 - 3111t^2 + 543t^4 - t^6) \\ y &= N \Delta \lambda \cos \phi + (N/6)(\Delta \lambda)^3 \cos^3 \phi (1 - t^2 + n^2) + (N/120)(\Delta \lambda)^5 \\ &\quad \cdot \cos^5 \phi (5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58n^2 t^2) + (N/5040)(\Delta \lambda)^7 \cos^7 \phi \\ &\quad \cdot (61 - 479t^2 + 179t^4 - t^6) \end{aligned} \quad \dots (4)$$

ただし、

$$t = \tan \phi$$

$$n = e' \cos \phi, e' = \sqrt{a^2 - b^2} / b$$

$$N = a / \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \quad (\text{東西線曲率半径})$$

$$a, b \quad (\text{楕円体の長・短半径})$$

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} / a \quad (\text{離心率})$$

式の導入は参考文献^{2), 3), 4)}に詳しい。

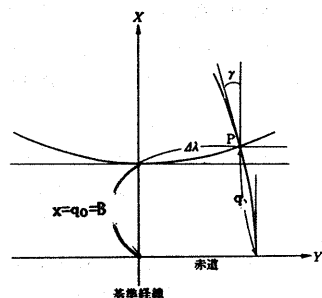


図1 ガウス・クリューゲル投影

さて、(4) 式の表現は文献により、 $\Delta\lambda$ の 7 次以上の項まで書いてあるものもあり、係数の n^4 、 n^2t^2 が書いてないものもある。どこまで計算すればどの程度の精度が得られるのかは、すぐには分らない。また、数十万の各点について計算するのだから、無意義な計算は避けるべきである。そこで、打切誤差の評価を行った。

取扱った範囲は、新日本座標系の場合
 $|\Delta\lambda| \leq 1.5^\circ, 30^\circ \leq \phi \leq 46^\circ$ 、また UTM 法の場合 $|\Delta\lambda| \leq 3^\circ$ である。各項について値を求めると表 1 のようになる。従って、0.01m までの精度を得るには、新日本座標系の場合 $\Delta\lambda$ の 5 次の項まででよく、UTM 法の場合には、(4) 式でアンダーラインを引いた部分は、計算しなくても十分な精度が得られる。

誤差・値	日本座標系	UTM 法
$0(\Delta\lambda^5)$	0.3×10^{-2}	
$0(\Delta\lambda^6)$	0.5×10^{-3}	$.33 \times 10^{-1}$
$0(\Delta\lambda^7)$		$.39 \times 10^{-3}$
n^2t^2	0.16×10^{-2}	
n^4	0.25×10^{-4}	

表 1 打切り誤差

平面座標(x,y)を経緯度座標(ϕ, λ)へ変換するには、(4) を逆に解けばよい。実際の計算には逐次近似法を使うのが便利であり、次式の結果が得られる。

$$\phi_1 - \phi = y^2 t_1 / (2R_1 N_1) - y^4 t_1 (5 + 3t_1^2 + n_1^2 - 9t_1^2 n_1^2) / (24R_1 N_1^3) + y^6 t_1 (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4) / (720R_1 N_1^5)$$

$$\Delta\lambda = y / (N_1 \cos \phi_1) - y^3 (1 + 2t_1^2 + n_1^2) / (6N_1^3 \cos \phi_1) + y^5 (5 + 28t_1^2 + 24t_1^4 + 6n_1^2 + 8n_1^2 t_1^2) / (120N_1^5 \cos \phi_1) - y^7 (61 + 662t_1^2 + 1320t_1^4 + 720t_1^6) / (5040N_1^7 \cos \phi_1) \dots\dots\dots (5)$$

ただし、 ϕ_1 は子午線弧長が x に等しい点の緯度の値、また添字 1 のついた N_1, t_1, n_1 はそれぞれ ϕ_1 に対する N, t, n の値である。文献^{2), 5)} では、 $\phi_1 - \phi$ の式で y^4 の項の係数が以下のように異なっている。

$$\phi_1 - \phi = y^2 t_1 (1 + n_1^2) / 2N_1^2 - y^4 t_1 (5 + 3t_1^2 + 6n_1^2 - 6n_1^2 t_1^2 - 3n_1^4) / 24N_1^4 + y^6 t_1 (61 + 90t_1^2 + 45t_1^4 + 107n_1^2 - 162n_1^2 t_1^2 - 45n_1^2 t_1^4) / 720N_1^6 + \dots\dots$$

この式は、 $R_1 = N_1 / (1 + n_1^2)$ の関係式を使えば、(5) の式と互いに等しいことが証明できる。従って、どちらの式を使ってもよい。導入過程での式のチェックや、上記の証明等は数式処理言語 REDUCE3 の好演算例になった。

さて、(4) 式に於て 0.001" まで計算するものとし、 $0.01'' = 0.485 \times 10^{-7}$ ラジアン
 の精度を得るためには、y の何次の項まで求めればよいかを考察すると、表 2 のようになる。

つまり新日本座標系では、扱う範囲が $30^{\circ} \leq \phi \leq 46^{\circ}$ であるから、 $|\Delta \lambda| \leq 1.5^{\circ}$ では $|y| \leq 5 \times 10^7$ になり、5次の項までで十分である。

UTM法の場合でも $|\Delta \phi| \leq 3^{\circ}$ 、 $|y| \leq 5 \times 10^8$ だから5次の項まででよい。実際国土地理院では新日本座標系の場合上述の精度を得るために y の5次までの項をとり、 n_1^2 を含む項を無視した計算式を採用している。

誤差・値	日本座標	UTM法
$0(y^6)$	$.92 \times 10^{-9}$	$.90 \times 10^{-9}$
$0(y^7)$	$.19 \times 10^{-15}$	$.84 \times 10^{-16}$
$0(y^8)$	$.27 \times 10^{-14}$	$.84 \times 10^{-17}$

表2 打切誤差

このような計算は、倍精度で行う必要があり、桁落ちをまぬがれるために、高次の項から和を取るといった手順をとることは、いうまでもない。

さて(5)式を使って与えられた平面直角座標から経緯度を出す場合には、『子午線弧長 $=x$ に相当する ϕ_1 』を前もって求めておく必要がある。(5)式では、 y について小数以下3桁以下の補正を行っているにすぎない。従ってあらかじめ ϕ_1 は、小数以下4-5桁まで正確に求める必要がある。

さて、 ϕ_1 と x の関係は

$$x = a(1 - e^2) \int_0^{\phi_1} (1 - e^2 \sin^2 \phi)^{-3/2} d\phi \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。この関係から、与えられた x に対する ϕ_1 の値を得ることは簡単ではない。一般にこの求め方には

- 1) 漸化式を使うものとして、Bailey法やNewton-Raphson法⁴⁾があり
- 2) 級数展開を使うものとして斉藤の式⁴⁾
- 3) チェビシェフ多項式で近似した石川の公式⁶⁾などがある。

Bailey法はNewton-Raphson法より収束は速いが、それでも初期値 $\phi_1 = 35^{\circ}$ から出発して、 $|\phi_{i+1} - \phi_i| < 2 \times 10^{-5}$ まで収束するまでには、最低2回の三角関数の計算、2回の平方根の計算、19回の乗除算が必要である。

一方、斉藤の式は5次までの $\sin x$ の多項式であり、5回三角関数を計算しなければならない。これらに比較し、石川の式は単なる x についての7次または9次の多項式であり、もっとも簡単である。これは次式で与えられる。

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^n C_i M^{2i-1} \quad (n=7,9)$$

ただし、 $M = x/Q$; $Q = 10000855.7658$ である。

文献⁶⁾では誤差の評価がされており、それによると $0^{\circ} \leq \phi \leq 50^{\circ}$ のとき $n=7$ を採用しても誤差は $0.0001''$ 以下になる。

$50^{\circ} \leq \phi \leq 90^{\circ}$ のときでも、 $n=9$ を使えば絶対誤差が $0.0003''$ でおさえられる。

n	7次式の C_i	9次式の C_i
1	1.578708909	1.578708908847
2	-0.01313066118	-0.013130661540
3	.006708947904	.006708984087
4	-.001796288634	-.001796898478
5	.000369611416	.000372749204
6	-.000075336651	-.0000811709202
7	0.000011148931	.00001390414031
8		.00000254941046
9		-.0000020393350

表3 近似多項式の係数

3. 応用例 (諏訪湖の深さを求める)

ここでは、第2節で論じた座標変換の具体例として、経緯度($138.5^{\circ}, 36^{\circ}$)を投影の原点とし、ガウス・クリューゲル法で描かれた1/10000の諏訪湖の地図に0.5mおきに等深線が書き入れてあるものが与えられている場合に、諏訪湖の深さを $\Delta\lambda=11.25''$, $\Delta\phi=7.5''$ の約250m毎の格子点上に求める場合を論じる。このように格子点を選んだ理由は、国土地理院の地形データが、この格子点上の値で整備されているからである。

ここでは、次のステップで作業を行った。

- 1) それぞれの等深線に沿って、デジタイザーで適当な間隔でその位置を読む。
読む間隔はかなり粗くとり、等深線により9~194点で、計567点とした。湖の周辺の点及び陸地部分にも適当な位置を選びその点も水深0として読み取った。
- 2) 位置のデータは、デジタイザーの単位(1/1000インチ)で読み取られているから、単位の変換をして、実際の長さに相当するm単位に直した。
読取の原点は地図の左下隅であったので、適当に平行移動を行ない、原点が投影の原点($138.5^{\circ}, 36^{\circ}$)に一致するようにした。こうすると諏訪湖の地図は、 $2500\text{m} \leq x \leq 7500\text{m}$, $-40500\text{m} \leq y \leq -33500\text{m}$ の範囲になる。
- 3) 水深を求める格子点は、 $\Delta\lambda=11.25''$, $\Delta\phi=7.5''$ ごとである。
つまり諏訪湖の範囲 $138^{\circ}3'11.25'' \leq \lambda \leq 138^{\circ}7'41.25''$ を24等分
 $36^{\circ}1'22.5'' \leq \phi \leq 36^{\circ}4'0''$ を21等分した点になり全部で550点でなる。
- 4) これらの格子点のそれぞれを式(4)を使って(ϕ, λ)座標から(x, y)座標に変換する。
- 5) (x, y)平面上で、読み取った

567点のデータをもとに、各格子点上の水深を求める。読み取ったデータは等間隔ではないので、スプライン補間等の一変数

補間法は適用できない。ここでは、名大ライブラリーNUMPAC^{7), 8)}にある『不規則分布2変数関数データに関する C^k 級補間法TRIPCK』を使った。こうして求めた格子点に対する深さは、図2に示す。

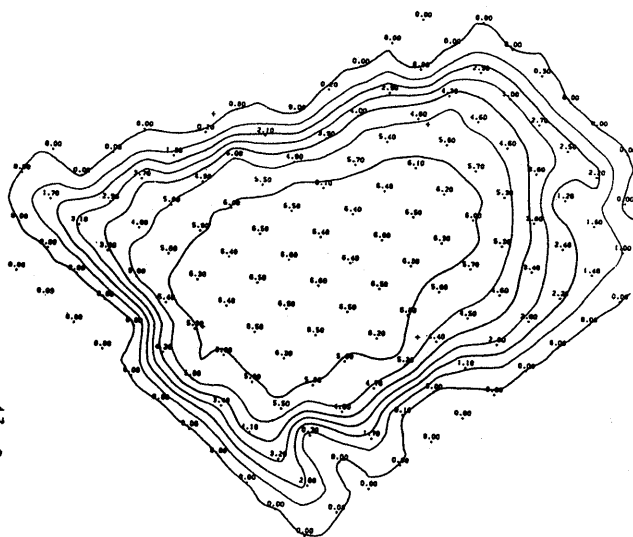


図2 諏訪湖の格子点上の水深(1点おき)

4. データを数値(ϕ , λ) 持つことの問題点

震研地図システムでは、地図上にユーザのデータを正確に重ね描きができるよう、地図データは全て経緯度によって与えられている。また地図の描画や、拡大・縮小、回転、投影法の変換等を行うプログラムは全てFortran 言語で書かれている。このプログラムは、変数を全て単精度で取り扱う。これは、何十万という大量のデータを取り扱うため、高速で処理できないと困るからである。

このシステムでは、各種データの解析等に利用するため、地図データの点数が非常に多い。これは、入り組んだ海岸線などを正確に描くためである。

そうすると、統計地図で塗りつぶしを行う場合に、図3 のように地図にヒゲが出て描かれる現象が起こることがある。

この現象は、同じポリゴン図であっても拡大・縮小、移動等の変換によって出たり出なかったりする。

このシステムでは、塗りつぶしをプログラムで行っているが、この現象はそのプログラムが、うまく働いていない事に他ならない。塗りつぶしとは、あるポリゴンにある幅の直線(パターン)を隙間なく並べて描く事で行っている。つまり図4 のように直線E1とポリゴン図形とが交わる点 P_1, P_2, P_3, P_4 などを求め、 P_1, P_3 では $SW=1$ (塗り始め) P_2, P_4 では、 $SW=0$ (塗り終り) というようにトリミングを行ない塗る範囲を決めているのである。

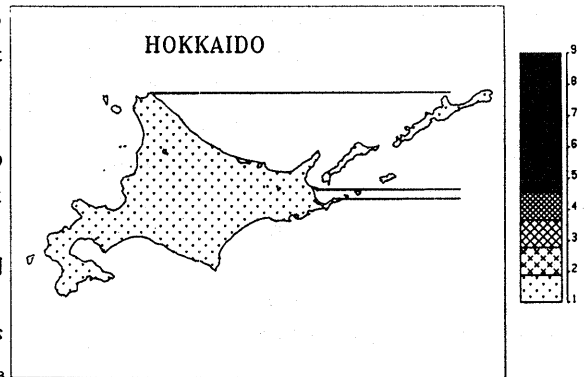


図3 塗りつぶしでヒゲが出る例

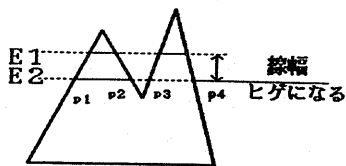


図4 塗りつぶしがうまく行かない例

そしてヒゲが出るのは、桁落ちや丸め誤差のため交点がうまく求まらず、 SW が逆転し $E2$ で示すように、 P_2, P_3 で $SW=0$, P_4 で $SW=1$ になったりする事による。こうした事は、閉じているべきポリゴンが、誤差によって閉じていない時にも起こる。

そこで誤差を小さくするように、前述のトリミングの演算、図形移動・回転を行うためのマトリックスの演算等48箇所だけを倍精度演算をするようにプログラムを書換えた。その結果ヒゲが出ることは無くなった。

しかしさらに解析してみると、前述の現象は地図データが経度・緯度で表されていることに起因することがわかった。このシステムでは、データは全てE13.6の形で表現するようにFormatが決められている。従って例えば、東京近辺のある1点のデータは、度単位で(1.397500E2, 3.566667E1) という7桁の数で表される。そしてその点から500m離れた隣の点は、(1.397556E2, 3.567500E1)である。これ等を比べてみると、小数以下2桁までは同じであり、それぞれの差は0.0056, 0.00833しかない。このことは、2点の差をとる計算を行うと桁落ちが起こり、有効な数が2桁程度しか残らないことを意味する。その結果誤差が大きくなり、トリミン

グの計算等が正しく行われなことになるのである。南西諸島や小笠原諸島を除くと、日本全国は $30^{\circ} \leq \phi \leq 46^{\circ}$, $129.5^{\circ} \leq \lambda \leq 146^{\circ}$ の範囲にあり、 λ の最初の1桁は無意味な情報である。このままだと、E13.6で位置を表す際の丸め誤差は、 $0.001^{\circ} =$ 約90mで、1/10000地図上で9mmにもなる。

しかし始めの無意味な1桁を省き、末尾に1桁多く表現すれば、誤差は 0.0001° つまり1/10000の地図上では0.9mmの誤差となり、読取誤差の範囲に入る。このように、1桁の情報が失われることは、重大な影響がある。そしてこのことは更に局所的な地図(例えば近畿地方の市町村地図)では、例えば、明石市の $\lambda = 135^{\circ}$ を基準にして表現すれば、更に1桁多く表現できるから、より良い描画ができることになる。

最初システムを作る際、重ね描きをする事にのみ主眼を置き、世界地図も局所的な日本の市町村地図も全て同一の(ϕ, λ)で統一しようとしたのであったが、今考えると、どだいこれは無理な事であった。そこでこのシステムでは運用を変更し、利用者に取り扱う地図の範囲を指定してもらうことにした。たとえば、世界地図の南半球のみとか、日本の伊豆地方だけとかいうようにである。それによって、重ね描きすべきユーザーのデータから、地図の中心の座標を引き去り、データの上位の数値を取去る加工処理をするプログラムを自動的に走らせるようにした。

その結果、一部倍精度の計算をしなくとも、ユーザーは自分の重ね描きするデータを緯度・経度の形でもってきさえすれば、ヒゲのない地図が描けるようになった。

4. おわりに

地図システムを実際に運用しているうちに、以上のような問題が次第に分ってきた。

この『震研地図システム』では、一旦カタログされた地図を拡大したり、種々の投影法で描いたりするといった、地図の操作部分のツールは整っているが、現状では、地図データを作る部分のツールは、まだ完全には整っていない。

データとして、国土地理院の国土数値情報に含まれているものは、それらを利用しているが、これとても加工なしでは使えない。またし、データの誤りのチェックにも、かなりのエネルギーを必要とする。まして、今回の諏訪湖の水深のように、国土数値情報にないデータを、地図から直接求めなければならないことも起こる。データをユーザーが使い易い形に加工整備して行くうえで、まだ問題点がいくつかあるので、今後はその辺をクリアにして、また論ずることにする。

最後に、貴重なご意見をいただき、また資料を提供下さった、都立大学の石川甲子男氏、筑波大学の名取亮氏、福井大学の佐藤義雄氏の各位に深く感謝する。

参考文献

- 1) 松山,小竹:地震研究所における地図情報処理,応用地質,第27巻,第2号
pp.30-38(昭和61年6月).
- 2) Joldan,Eggert,Kneissl:Handbuch der Vermessungskunde VI,Mathematische
Geodasie,J.B.Metzlersche, ZweiterBand,pp.1102-1110(1959).
- 3) 坪川,大森:測地学序説,山海堂,pp.197-208(昭和44年)
- 4) 坪川,他編:現代測量学 1,測量の数学的基礎,日本測量協会
pp.73-113(昭和56年).
- 5) 友田,鈴木,土屋編:地球観測ハンドブック,地球上の位置,東京大学出版会
pp.27-36(1985).
- 6) 石川甲子男:測地関数の多項式近似,測地学会誌,第14巻,第1号
pp.14-17(1969).
- 7) ライブラリー・プログラム利用の手引(数値計算編),名古屋大学大型計算
センター,pp.138-139(昭和57年6月).
- 8) 佐藤,二宮:不規則分布二変数関数データに対する C^k 級補間法,情報処理学
会誌,Vol.22,No.6,pp.581-588,(Nov.,1981).