数 値 解 析 22－1
（1987. 9. 19）

代数方程式に対する根の重複度検出について

都 田 艶 子
（大阪大学 工学部）

本報告では、代数方程式の根の分離とその根に対応する重複度の計算について述べる。 一般に、重度の高い根は、数値計算上、精度よく分離することがむずかしい。 この報告の目的の１つは、重複度の高い根をもつような場合に有効な代数方程式の解法に寄与することであり、 そのために重複度の検出に注目、 その数値例を報告する。

On the Detection of the Multiplicities of Zeros of a Polynomial Equation

Tsuyako MIYAKODA
Department of Applied physics, Faculty of Endineering,
Osaka University
Yamada-Oka, 2-1, Suita, Osaka 565, JAPAN

In this paper, we describe a numerical method to find roots of a polynomial equation and their multiplicities. In general, it is difficult to find a zero of high multiplicity in a good accuracy by a numerical method. We purpose to contribute to develop a numerical method for a polynomial equation in the case of zeros of high multiplicities. We compute the multiplicities of roots of a polynomia equation and show some numerical results.

1．はじめに

代数方程式の数値解法についての問題点は、おおよそ次のようなところにあると考えられる。

1）近接根の分離がむずかしい

2）重複度の高い根については精度よく求めることがむずかしい

3）絶対値の大きさが極端に異なる根が混在している場合には、計算誤差が入りやすく、誤差の伝播による数値の荒れがしょうじる

4）全部の根が同じ程度の精度で求められるか

5）求めた近似根の信頼度をどのようにして測るか

今、ここでは2）に注目する。全根の分離とともにその重複度の計算を試みる。近似解を求めるための反復法は文献1）に依存する。　適当な初期値からはじめて近似列を構成するときに同時に多重度の検出もおこなう。　アルゴリズムのの実現のしかたによって得られる数値結果は同一でない。

2．反復法

与えられたn次代数方程式を

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n = \prod_{i=1}^{m}(z-\xi_i)^{\mu_i} = 0 \qquad (1)$$

とする。　根は　$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$，それぞれの根の重複度を$\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$とする。　$\Sigma\mu_i=n$　である。

$f(z)=0$の根をみいだすために、今　$\log(f(z))$の微係数を考える。　これを$e(z)$とおくと

$$e(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i}{(z-\xi_i)} \qquad (2)$$

そして

$$\begin{aligned}
e'(z)&=\frac{f''(z)}{f(z)}-\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2\\
e''(z)&=\frac{f'''(z)}{f(z)}-3\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{f''(z)}{f(z)}+2\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2 \qquad (3)\\
e'''(z)&=\frac{f^{(4)}(z)}{f(z)}-4\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{f''(z)}{f(z)}-3\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\right)^2\\
&\quad+12\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2\left(\frac{f''(z)}{f(z)}\right)-6\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^4
\end{aligned}$$

である。　f（z）のある近似根をz_0としたとき、　z_0のまわりでf（z）をある多項式Q（z）で近似することを考える。　このQ（z）はf（z）より小さい次数の多項式でその根はα_1とα_2であり、それらの多重度はμ_1，μ_2のものであるとする。　すなわち

$$Q(z) = (z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2} \tag{4}$$

なる形のものであるとする。これにより

$$\tilde{e}(z) = (\log(Q(z)))' \tag{5}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(z) &= \frac{\mu_1}{z-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{z-\alpha_2} \\
\tilde{e}'(z) &= \frac{-\mu_1}{(z-\alpha_1)^2} + \frac{-\mu_2}{(z-\alpha_2)^2} \\
\tilde{e}''(z) &= \frac{2\mu_1}{(z-\alpha_1)^3} + \frac{2\mu_2}{(z-\alpha_2)^3} \\
\tilde{e}'''(z) &= \frac{-6\mu_1}{(z-\alpha_1)^4} + \frac{-6\mu_2}{(z-\alpha_2)^4}
\end{aligned} \tag{6}$$

である。　Q（z）は、次の条件を満たすものとする。

$$\begin{aligned}
&\tilde{e}(z_0) = e(z_0), \quad \tilde{e}'(z_0) = e'(z_0) \\
&\tilde{e}''(z_0) = e''(z_0), \quad \tilde{e}'''(z_0) = e'''(z_0).
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで、　$d_1 = z_0 - \alpha_1$，　$d_2 = z_0 - \alpha_2$　とし、

$$\begin{aligned}
&c_1 = e(z_0), \quad c_2 = -e'(z_0) \\
&c_3 \quad \frac{e''(z_0)}{2}, \quad c_4 = -\frac{e'''(z_0)}{6}
\end{aligned} \tag{8}$$

とおくと、次のような関係式がなりたつ。

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_1}{d_1} + \frac{\mu_2}{d_2} &= c_1 \\
\frac{\mu_1}{d_1^2} + \frac{\mu_2}{d_2^2} &= c_2 \\
\frac{\mu_1}{d_1^3} + \frac{\mu_2}{d_2^3} &= c_3 \\
\frac{\mu_1}{d_1^4} + \frac{\mu_2}{d_2^4} &= c_4
\end{aligned} \tag{9}$$

これらの関係式から、d_1とd_2の満たすべき2次方程式は

$$(c_3^2 - c_2 c_4)\, d^2 + (c_1 c_4 - c_2 c_3)\, d + (c_2^2 - c_1 c_3) = 0 \tag{10}$$

となる。　この2次方程式を解いてz_0に近い方の根を$f(z)=0$に対する近似解とする。　これをα_1とすると、　α_1をあらためてz_0とおき、同様の操作をくりかえすことにより近似値の列をつくることができる。　簡単のために、$\mu_1 = \mu_2 = 1$の場合を考えると、　d_1とd_2が満たすべき式は、$f(z)$をz_0のまわりでTaylor展開し近似式として2次式まで採ったものと一致する。　$Q(z)$として1次式を考えると、これはNewton法に一致する。

次に収束性について述べるために、

$$F(z) = \frac{1}{e(z)} \quad ,\ G(z) = \frac{1}{\tilde{e}(z)} \tag{11}$$

とおく。　すると

$$G(z) = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{\mu_1(z-\alpha_2) + \mu_2(z-\alpha_1)}$$

である。　$F(\alpha_1)$と$G(\alpha_2)$をz_0のまわりでTaylor展開することにより、次式が得られる。

$$F(\alpha 1) - G(\alpha_1) = \frac{1}{4\,!}\left(F^{(4)}(z_0) - G^{(4)}(z_0)\right)(\alpha_1 - z_0)^4 + \cdots.$$

$G(\alpha_1)=0$であるから、　$(\alpha_1 - z_0)^4$の係数をCとおいて、

$$F(\alpha_1) \fallingdotseq C\,(\alpha_1 - z_0)^4$$

ここで真の解α_tとし、　$F(z)$をα_tのまわりで展開することにより

$$F(\alpha_1) \fallingdotseq F(\alpha_t) + F'(\alpha_t)(\alpha_1 - \alpha_t)$$

であるから、　次式が得られる。

$$\alpha_1 - \alpha_t = \frac{C}{F'(\alpha_t)}(\alpha_1 - z_0)^4 \tag{12}$$

よって、ある近傍で根への収束は4次のorderであることがわかる。

α_1が真値に近ずけば近ずくほど　$|z_0 - \alpha_1|$は小さくなることから

$$|z_0-\alpha_1| << |z_0-\alpha_2|$$

を仮定し、　α_1にたいする多重度μ_1は次式により求める。

$$\mu_1 \fallingdotseq c_1 d_1. \tag{13}$$

さらに、c_1, c_2, d_2を用いてμ_1を求めると、

$$\mu_1 = \frac{d_1{}^2}{d_1-d_2} c^1 - \frac{d_1{}^2 d_2}{d_1-d_2} c_2 \tag{14}$$

となる。

3．アルゴリズムの実現

　ある点zにおける多項式と4次までの微係数の値を求めるのには、　組立除法をもちいる。　近似列の収束判定には根の誤差限界$\varepsilon(z)$を計算して用い、$|f(z_0)| \leqq \varepsilon(z_0)$ を満たすz_0を求める近似根とする。

（1）割り算による減次

　1根がもとまった後に、組立除法による操作をそのまま用いて、次数を1次さげた 多項式をあらためて$f(z)$として反復をくりかえす。

（2）引算による減次

　求まった1根αとすると、減次した新しい多項式$g(z)$は

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha} \tag{15}$$

であるからこれにたいする対数の微分を行うと

$$\tilde{\tilde{e}}(z) = e(z) - \frac{1}{z-\alpha}$$

$$\tilde{\tilde{e}}'(z) = e'(z) + \frac{1}{(z-\alpha)^2}$$

$$\tilde{\tilde{e}}''(z) = e''(z) - \frac{2}{(z-\alpha)^3}$$

$$\tilde{\tilde{e}}'''(z) = e'''(z) + \frac{6}{(z-\alpha)^4}$$

となり、　$f(z)$は与えられた形のまま、減次されていく多項式の値、微係数の値を求めることができる。そこで、$b_1=\tilde{\tilde{e}}(z)$, $b_2=\tilde{\tilde{e}}'(z)$, $b_3=\tilde{\tilde{e}}''(z)$, $b_4=\tilde{\tilde{e}}'''(z)$ とおくと、　これらはk個の近似根がもとまった場合には、

$$b_1 = e(z) - \sum^{k} \frac{1}{z-\alpha_i}$$

$$b_2 = e(z) + \sum^{k} \frac{1}{(z-\alpha_i)^2}$$

$$b_3 = e(z) - 2\sum^{k} \frac{1}{(z-\alpha_i)^3} \qquad (16)$$

$$b_4 = e(z) + 6\sum^{k} \frac{1}{(z-\alpha_i)^4}$$

としてもとまり、 $c_1 = b_1$, $c_2 = -b_2$, $c_3 = b_3/2$, $c_4 = -b_4/6$とおくことにより、反復公式のなかにくみこむことができる。

4．数値例

計算される多重度が信頼できるものであれば、減次を行う時に多重度分だけ一度にすることができるので、好都合である。 それがどの程度実現可能かを見るために、減次は１次ずつおこなうプログラムを作成した。そして、多重度がたしかに減次に応じて減っていくかどうかを調べた。 例題の方程式の次数はn＝１０に固定する。 根は［-10，10］に分布するものとする。

例１．根の分布

０．５，　１．０；３重根，　４．０，
５．０，　７．０；３重根，　８．０

例２．根の分布

－１０．０，　－０．５；２重根
１．０；４重根，　９．０；３重根

（表．１）　例．１　減次方法（１）

	反復回数	近似解	μ（式13）	μ（式14）
1	3	0.5000000000	0．999	1．00
2	2	0．1000038621×10	3．450	5．59
3	2	0．9999810202	1．874	1．99
4	2	0．9999803604	0．999	1．00
5	4	0．3999999979×10	0．999	1．00
6	3	0．5000000053×10	0．997	0．999
7	2	0．6999999185×10	3．655	1．00
8	2	0．7000004587×10	1．888	1．99
9	2	0．6999996145×10	0．888	1．00
10	－	0．8000000000×10	－	－

（表．２）　例．２　　減次方法（１）

	反復回数	近似解	μ（式13）	μ（式14）
1	3	-0．4999999998	1．96	1．99
2	2	-0．5000000002	0．99	1．00
3	3	0．9999999999	4．00	1．45
4	2	0．9999973586	2．94	3．00
5	2	0．9999973588	1．94	2．00
6	2	0．1000005283×10	1．00	1．46
7	2	0．9000000000×10	2．30	1．00
8	2	0．9000000000×10	2．01	1．99
9	2	0．9000000000×10	1．01	1．00
10	−	-0．1000000000×10^2	−	−

（表．３）　例．２　　減次方法（２）

	反復回数	近似解	μ（式13）
1	3	-0．4999999998	1．969
2	3	-0．5000000002	0．999
3	3	0．9999999999	4．005
4	2	0．9999973586	2．940
5	2	0．9999973588	1．940
6	2	0．9999973588	0．940
7	2	0．9999973575	-0．059
8	2	0．9999973575	-1．059
9	2	0．9999973575	-2．059
10	2	0．9999973575	-3．059

表１，表２は減次方法（１）を用いたものであり、表３は例題２にたいし減次方法（２）を用いたプログラムでの結果である。

多重度は反復の途中結果のものを検出しているため、結果としては不明確なところがあるが、おおよその傾向をみる目安とすることができる。　減次方法（２）

では、初期値により収束状況が異なるが、ここではもとまった近似根を少しずらした点（表３の例では0.1きざみ）を初期値に採った。　この例において、根の個数以上に同じ根に収束するふるまいがみられる。仮想の根になった場合、重複度は０に近くなり、そのあと１ずつ減って負数になる。　これをものさしとして、初期値の設定を変更するなり、また、初期設定として根の粗い近傍探索を付加するなりすれば、減次方法（２）も有用になるのではないかとかんがえる。

２つの式による重複度の計算については、明確な違いはいまのところみられない。重複度が高ければどちらの計算によってもあやしくなる。　いますこし、検討が必要である。

５．参考文献

１）　桜井鉄也,鳥居達生,杉浦洋，”正電場的解釈による代数方程式の解法，”情報処理学会第３３回全国大会講演論文集，pp1849-1950、1986.

２）　伊理正夫，”数値計算，”朝倉書店，1981.