

数値等角写像における Theodorsen の方程式の解法

宋殷志，杉浦洋 櫻井鉄也
名古屋大学 工学部 情報工学科

単位円から Jordan 領域への等角写像の決定は境界関数に関する非線形方程式である Theodorsen 方程式を解くことに帰着される。Theodorsen 方程式に関しては多くの数値解法が提案されてゐるが、中にはその中から Niethammer, Vertgerm, そして Wegmann の方法を紹介する。Niethammer の方法は SOR 的な方法であるが、後者の 2 つは Newton 法的な解法である。上の 3 つの方法を計算機上に実現して数値実験を行ひ、その有効性を比較した。数値実験により Wegmann の方法の不安定性が明らかになったので、その改良についても述べる。

Methods for solving Theodorsen's equation in
Numerical Conformal Mapping

Enjee Song, Hirosi Sugiura and Tetsuya Sakurai
Department of Information Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University
Furo-cho, chikusa-ku Nagoya 464, Japan

Determinations of conformal maps from unit disk onto a Jordan region are reduced to solving the Theodorsen's equation which is integral equation for the boundary correspondence function. Various methods for solving Theodorsen's equation are proposed by many authors. In this paper, we introduce three numerical methods by Niethammer, Vertgeim and Wegmann. Niethammer's one is a SOR-like method and latter two methods are Newton-like methods. We implement these three methods and report their numerical experiments. We found the instability of Wegmann's method by numerical experiments and propose a improvement of this method.

1. はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであるがこの写像を求めることは一般的には数値的にのみ可能である。数値等角写像の目的は速く、正確で適用範囲の広い計算法の研究である。

数値等角写像では①単位円から半連結領域への写像と②半連結領域から単位円への写像が独立的に研究されていく。今回は①単位円からJordan領域への写像 g を求める方法のいくつかを比較、分析した。

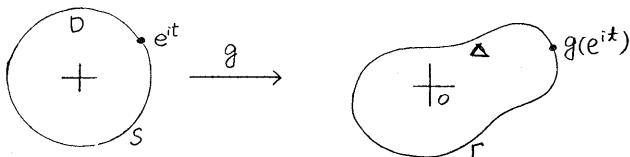


図1 等角写像 g

ここで S : 単位円, D : 単位円の内部, Γ : Jordan閉曲線, Δ : Γ で曲まねた領域

g : 正規化条件 $g(0) = 0, g'(0) > 0$

$$\Gamma := \{\gamma(t) : t \in T\}, T := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad (1)$$

$$g(e^{it}) = \gamma(\theta(t)) = \gamma(\tau(t)+t), \theta(t) = \tau(t)+t, \tau(t) \in C(T) \quad (2)$$

γ は Jordan閉曲線 Γ をパラメタ表現する周期 2π の連続関数である。(2)式のように円周上で $g(e^{it})$ は周期連続関数 $\tau(t)$ を使って書ける。 g は解析的関数であるので円周上で計算出来れば内部でも計算出来る。したがって γ が与えられてを求めることが問題である。(2)式の $\tau(t)$ を求めるための Theodorsen の方程式を次に説明する。

2. Theodorsen の方程式

(定義)

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e^{ikt}, \hat{f}_k: f \text{ の } k \text{ 番目の Fourier 係数} \quad (3)$$

(3) のように f が Fourier 展開されてみるとするととき

$$Kf \sim -i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \text{sign}(k) \hat{f}_k e^{ikt} \quad (4)$$

で定義される K を共役作用素と呼ぶ。

(定理 1.)

$$h: \bar{D} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\bar{D}: \text{単位閉円板}, \mathbb{C}: \text{複素平面})$$

なる h が S 上で連続で $h(e^{it}) = \xi(t) + i\eta(t)$ とする。 h が \bar{D} で連続で D で解析的となるための必要十分条件は $\eta(t) - \hat{\eta}_0 = K\xi(t)$ である。ここで $\hat{\eta}_0$ は η の 0 次 Fourier 係数である。

次は上で述べた等角写像 g の正規化条件をうまく満たすための補助関数 h を導入する。

$$g(z) = z e^{h(z)} \quad (h(z) = \log g(z)/z) \quad (5)$$

とすると $g(0) = 0$ となって一つの正規化条件はすぐ満たす。 $g'(0) = e^{h(0)}$ であるから $\text{Im } h(0) = 0$ なる条件の下で $g'(0) > 0$ とあって正規化条件を満足する。そして、作用素 $G: C(T) \longrightarrow C(T)$ を次のように定義する。

$$Gy(t) := \log r(y(t)+t)/e^{it} \quad (6)$$

これよりたゞちに

$$h(e^{it}) = \log g(e^{it})/e^{it} = \log r(\tau(t)+t)/e^{it} = G\tau(t) \quad (7)$$

(7)式で $G\tau(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ とおくと $G\tau(t)$ が D で解析的関数であるから定理1より $\eta(t) = K\xi(t)$ ($\operatorname{Im} h(0) = 0$, $\hat{\eta}_0 = 0$) になる。ここでまた Ψ という作用素を導入して次のように定義する。

$$\Psi\tau := \eta - K\xi = \operatorname{Im}(G\tau) - K\operatorname{Re}(G\tau) = 0 \quad (8)$$

(8)式が Theodorsenの方程式である。

(定理2)

y が $\Psi y = 0$ を満たす連続関数であるならば y は (2)式の τ と等しい。

結局定理2より (8)式の $\Psi\tau = 0$ を解けば良い事になる。領域が starlike の場合、極座標で表わして $r(t) = p(t)e^{it}$ とすると (7)式は

$$G\tau(t) = \log p(\tau(t)+t) + i\tau(t) \quad (9)$$

となり

$$\Psi\tau(t) = \tau(t) - K[\log p(\tau(t)+t)](t) = 0 \quad (10)$$

$$\tau(t) = K[\log p(\tau(t)+t)] = 0 \quad (11)$$

と不動点を求める形式に変形出来る。

3. 数値解法

数値実験のために離散化をする。後の都合のため過数の標本点 $N = 2n$ を使って $t_k = 2\pi k/N$, $0 \leq k \leq N-1$ とする。 y を t_k 上で標本化して並べたものを \mathbf{y} とする。

$$\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_{N-1})^T, \mathbf{y}_k = y(t_k), \mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})^T$$

N 点離散型 Fourier 変換 F_N により, K の離散化

$K_N : \mathbf{y} \mapsto \mathbf{z}$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{y} & \xrightarrow{F_N} & (a_0, \dots, a_n; b_1, \dots, b_{n-1})^T & \begin{array}{l} a_i : \text{cosine 係数} \\ b_i : \text{sin 係数} \end{array} \\ & & \downarrow K_N & \\ \mathbf{z} & \xleftarrow{F_N^{-1}} & (0, -b_1, \dots, -b_{n-1}, 0; a_1, \dots, a_{n-1})^T & \end{array}$$

$$K_N := F_N^{-1} K_N F_N \quad (2)$$

(2)は Wittich 行列として知られてるが各要素は次のように左る。

$$(K_{2n})_{ij} = \begin{cases} 0 & : j-l \text{ が偶数} \\ \frac{1}{n} \cot \frac{(l-j)\pi}{2n} & : j-l \text{ が奇数 } (j, l = 0, 1, \dots, 2n-1) \end{cases} \quad (3)$$

K_N を使って (11)式が次のように離散化出来る。

$$\mathbf{y} = K_N \log p(\mathbf{y} + \mathbf{t}) \quad (4)$$

次に (4)式を解く方法として SOR 法と NEWTON 法を説明する。

(1) SOR 法 (Niethammer [2] 1966年)

x' を奇数番目の標本点, x'' を偶数番目の標本点とする。すなわち,

$$x' := (x_1, x_3, \dots, x_{2n-1})^T, \quad x'' := (x_0, x_2, \dots, x_{2n-2})^T$$

$P_{2n} x = \begin{pmatrix} x'' \\ x' \end{pmatrix}$ の並べ方により

$$P_{2n} K_{2n} P_{2n}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & L_n^T \\ L_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (L_n)_{kj} = \frac{1}{n} \cot \frac{(2k-2j+1)\pi}{2n} \quad (k, j = 0, 1, \dots, n-1) \quad (15)$$

になる。したがって離散化した方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} y'' = -L^T \log P(y' + t') \\ y' = L \log P(y'' + t'') \end{cases} \quad (16)$$

(6)に SOR 法を適用して次のような反復解法を得る。

$$\begin{cases} y''_{m+1} := -\omega L^T \log P(y'_m + t') + (1-\omega) y''_m \\ y'_m := \omega L \log P(y''_{m+1} + t'') + (1-\omega) y'_m \end{cases} \quad (17)$$

(ω : 緩和係数, $0 < \omega \leq 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$)

L, L^T の作用はまた FFT を利用して効率的に計算出来る。

(2) NEWTON 法

$\Psi_N y = y - K_N \log(y+t) = 0$ に直接 NEWTON 法を適用して Jacobian 行列を作っても計算出来るが $N^3/3$ の計算量と Jacobian 行列を格納するために N^2 の記憶容量が必要である。これらを減らすための2つの方法を説明する。

(2-1) Vergeim [3] の方法 1958年

まず、元の連続問題で考える。

$$\Psi_y y + \Psi_y \delta_m = 0$$

$$y_{m+1} = y_m + \delta_m, \quad \Psi_y: \Psi \text{ の Fréchet-derivative} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

Theodorsen 方程式 (4) より $\Psi_y y(t) = y(t) - K \log P(y(t)+t)$ だから δ に Ψ の Fréchet-derivative を作用させると $\Psi_y \delta(t) = \delta(t) I m \zeta(t) - K[\delta \operatorname{Re} \zeta](t)$, $\zeta(t) := P'(y(t)+t)/P(y(t)+t) + i$ となる。(たがって,

$$\Psi_y \delta + \Psi_y y = \delta I m \zeta - K(\delta \operatorname{Re} \zeta) + \Psi_y y \quad (18)$$

(8) より $\Psi_y y + \delta I m \zeta = K(\delta \operatorname{Re} \zeta)$ になって定理 1 から

$$f(e^{it}) := \zeta(t) \delta(t) + i \Psi_y y(t) \quad (19)$$

で定義される f は D で解析的である。 (19) 式を変形すると

$$\operatorname{Re} f(e^{it}) = -\Psi_y \operatorname{Re} \zeta(t) \quad (20)$$

となり、(20)式は D における解析的関数 f を求めること Riemann-Hilbert 問題 である。

解 f は次のように陽的に求まる。

$$f(e^{it}) = [i \hat{\phi} + \sigma(t) + i K \phi(t)] \exp(-K \phi(t) + i \phi(t)) \quad (21)$$

$$\phi(t) = \arctan \left(\frac{P'(y+t)}{P(y+t)} \right) - \frac{\pi}{2}, \quad \sigma(t) = \Psi y \sin(\phi(t)) \exp(K \phi(t))$$

$$\hat{\phi} = -\hat{\sigma}_0 \tan \hat{\phi} \quad \left(\begin{array}{l} \hat{\sigma}_0: \sigma(t) \text{ の } 0 \text{ 次 Fourier 係数} \\ \hat{\phi}: \phi(t) \text{ の } 0 \text{ 次 Fourier 係数} \end{array} \right)$$

$$\delta(t) = \frac{f(e^{it}) - i \Psi_y y(t)}{\zeta(t)} \quad (22)$$

離散化された方程式における NEWTON 法の修正量 $\delta_m^{(n)}$ を (21), (22) 式を離散化して求めたもので代用する。

(2-2) Wegmann [4] の方法 1978年

やはり元の連続問題で考えて Vertgeim の方法での $\Psi t=0$ の代わりに (6) 式で定義した作用素 G を直接的に線形化して

$$G(y+\delta) \approx Gy + G_y\delta, \quad G_y: G の Fréchet - derivative \quad (23)$$

が解析的である事を条件にして修正量 δ を求める。

$$Gy = \log p(y+t) + iy, \quad G_y\delta = \zeta\delta, \quad \zeta(t) := P'(y(t)+t)/P(y(t)+t) + i \quad (24)$$

になる。したがって D で解析的な関数 h を次のように定義出来る。

$$h(e^{it}) := \zeta(t)\delta(t) + Gy(t), \quad \operatorname{Im} h(0) = 0 \quad (25)$$

(25)式を変形すると

$$\operatorname{Re}\{\zeta(t)h(e^{it})\} = -\operatorname{Im}\{\overline{\zeta(t)}Gy(t)\} \quad (26)$$

になって (26) 式は D で解析的関数 h を求める Riemann-Hilbert 問題である。解 h は次のように陽的に求まる。

$$h(e^{it}) = [i\phi + \sigma(t) + iK\sigma(t)] \exp(-K\phi(t) + i\phi(t)) \quad (27)$$

$$\phi(t) = \arctan\left(\frac{P'(y+t)}{P(y+t)}\right) - \frac{\pi}{2}, \quad \sigma(t) = \operatorname{Re}\{Gy \exp(-i\phi(t))\} \exp(K\phi(t))$$

$$\delta = -\hat{\phi}_0 \tan \hat{\phi}_0 \quad \left(\begin{array}{l} \hat{\phi}_0: \sigma(t) の 0 次 Fourier 係数 \\ \hat{\phi}_0: \phi(t) の 0 次 Fourier 係数 \end{array} \right)$$

$$\delta(t) = \frac{h(e^{it}) - Gy(t)}{\zeta(t)} \quad (28)$$

離散化された問題における δ は (27), (28) を離散化して求める。この方法は Ψy の計算の必要がないので前の Vertgeim の方法より共役作用素 K の計算が 1 回少なくて利点がある。しかし修正量の計算が $\delta(t) = \frac{h(e^{it}) - Gy(t)}{\zeta(t)}$ であるから Vertgeim の修正量

$$\delta(t) = f(e^{it}) - i\Psi y(t)$$

$\delta(t)$ と比べると丸め誤差の影響が大きいだろうと思われる。

今まで説明した SOR 法と NEWTON 法の Vertgeim の方法と Wegmann の方法で数値実験を次のように行った。

4. 数値実験

円と cassini の楕形の領域に対して数値実験を行った。円と cassini の楕形を実験対象にしたのは解がわかっていて、事と難易度がパラメタによって変えられるからである。次の図 2 の円と cassini の楕形の式は次のようにある。

<円の場合> 解の式: $g(e^{it}) = e^{it}(r^2 - 1)/(e^{it}r - 1) \quad r: パラメタ$

与えられた式: $P(\theta) = r \cos \theta + \sqrt{1 + r^2 \sin^2 \theta}$

方程式: $y(t) = K[\log p(y(t) + t)]$

< cassini の楕形の場合>

解の式: $g(e^{it}) = e^{it}\sqrt{1/(r - e^{2it})}$

与えられた式: $P(\theta) = \left(\frac{\cos 2\theta + (\cos^2 2\theta + r^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{r^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$

方程式: $y(t) = K[\log p(y(t) + t)]$

次の図 2 からわかるように円はパラメタ r が 1 に向かって大きくなるほど、cassini の楕形は 1 に向かって小さくなるほど問題が難しくなる。それぞれ SOR 法と NEWTON 法で実験を行った。

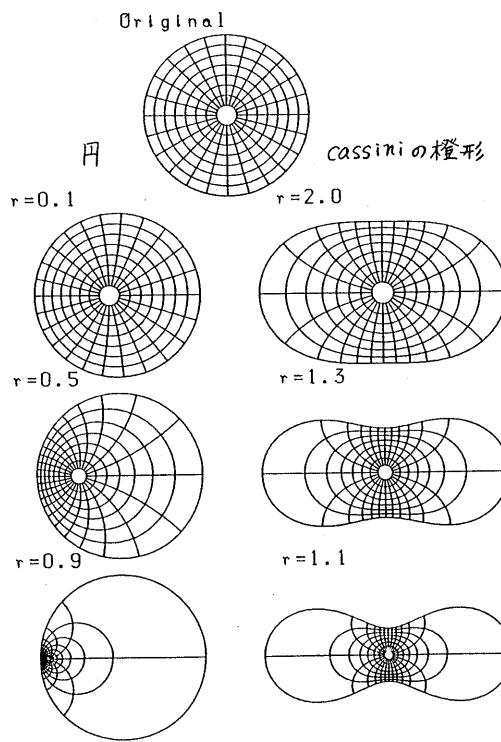


図2 円と cassini の 橢形への等角写像

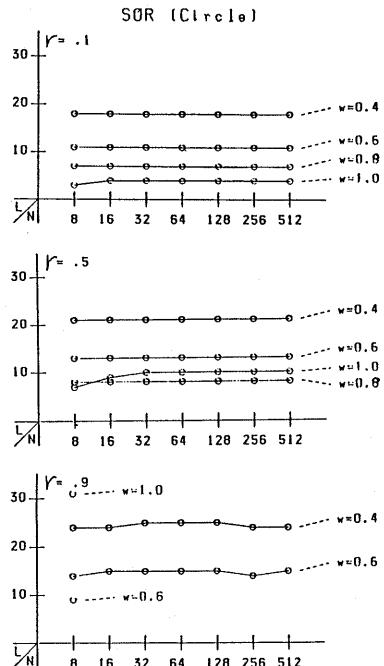


図3 SOR法(円)

実験は FACOM M 382 と FACOM N 780 に
より FORTRAN 77 の倍精度で行つた。

(1) SOR 法

初期値は $y_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$, 要求精度
は $\|y_m - y_{m+1}\|_2 < 10^{-5}$ とした。

R: パラメタ, N: 離散化した点数
L: 反復回数, ω : 細和係数

ω は 0.4~1.0 の間 0.2 のきざみで変化させたが図3 から ω を一定した時の反復回数は N によらず左く問題による事が推定出来る。反復回数が最も少ないのが理相的であるから例えは "r=0.1 の時には最適緩和係数 $\omega=1.0$ であるが $r=0.9$ の時には最適緩和係数 $\omega=0.6$ である。同じ事が図4 から cassini の 橢形の場合もいえる。最適緩和係数は問題に依存して、N には大きく依存しない傾向がある。特に問題が難しくなるにつれて最適緩和係数が小さくなる傾向がある。

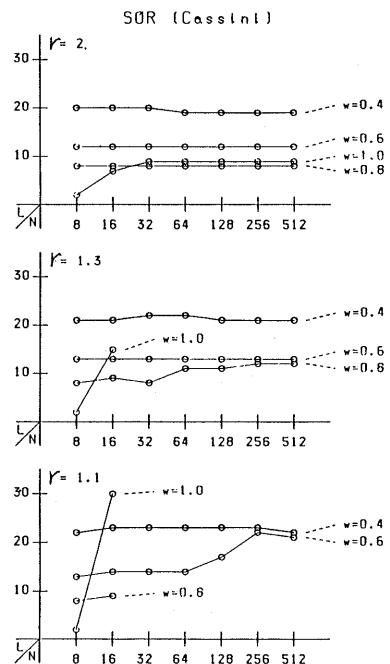


図4 SOR法(cassiniの椭形)

(2) NEWTON 法

(2-1) Vertegeim の方法

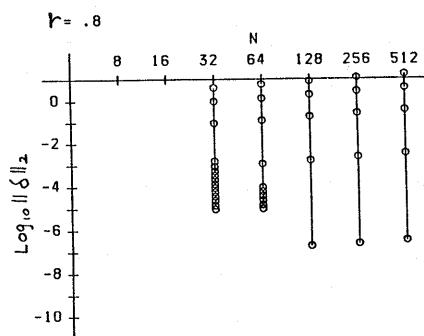
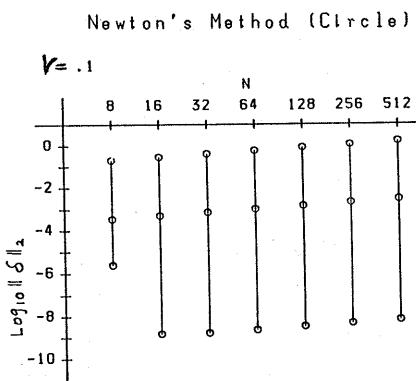


図 5 Vertegeim (円)

図 5, 6 からは問題が易しい時にはすぐ 2 次収束するが問題が難しくなると小さな N では 2 次収束しない事がわかる。 N が大きくなると 2 次収束するが問題が難しくなると小さな N では 2 次収束しない。原因は離散誤差のためであると思われる。

表 1 SOR 法と NEWTON 法 (円)

r	N	SOR 法の 反復回数	NEWTON 法の 反復回数
0.1	32	4	3
	64	4	3
	128	4	3
	256	4	3
	512	4	3
0.5	32	8	4
	64	8	4
	128	8	4
	256	8	4
	512	8	4
0.9	32	14	45
	64	15	38
	128	15	16
	256	14	6
	512	15	6

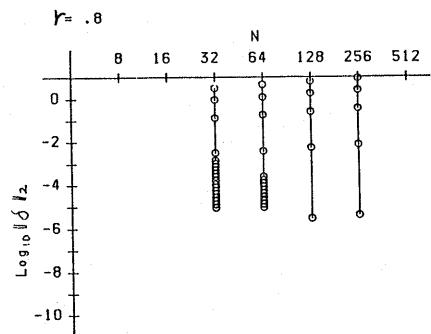
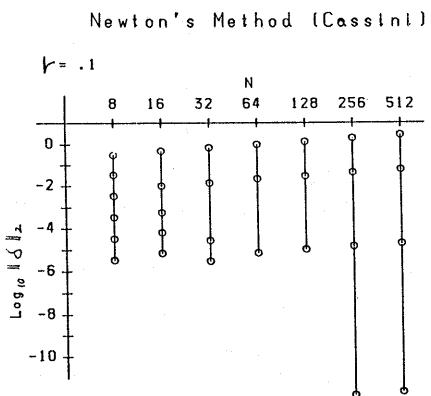


図 6 Vertegeim (cassini の楕形)

表 1 は前の SOR 法と今の Vertegeim の方法を比較した表であるが難しく問題の場合で N が大きい時には NEWTON 法が有効であることがわかる。

(2-2) Wegmann の方法

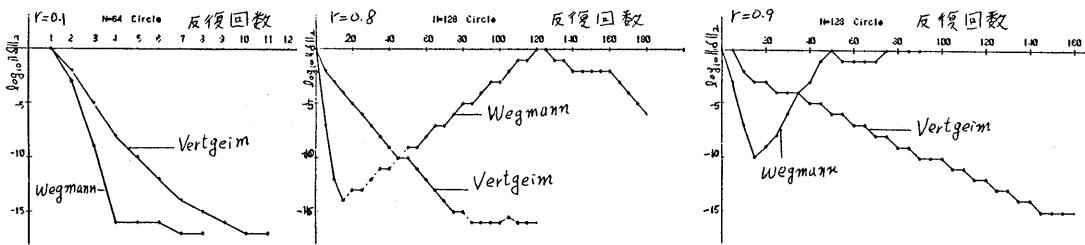


図 7 Wegmann と Vertgeim の方法の収束(円)

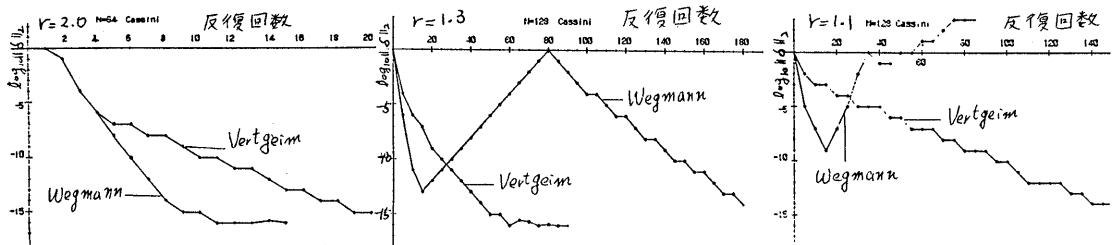


図 8 Wegmann と Vertgeim の方法の収束(cassiniの楕形)

- i) Wegmann の方法は Vertgeim と比べると共役作用素 K の 1 回の計算が減るので 1 回反復あたりの計算量が Vertgeim の約 $\frac{1}{2}$ になる。
- ii) 図 7, 8 から Vertgeim より Wegmann の方法の収束が速いことがわかる。

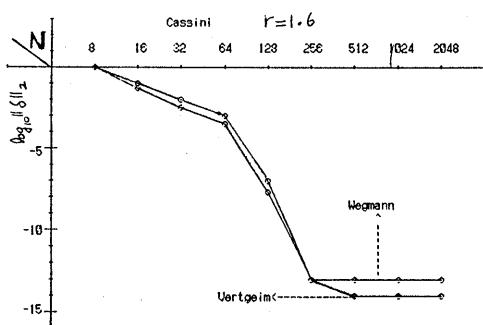


図 9 数値解の数度

- iii) 図 9 から丸め誤差の影響が Vertgeim より Wegmann の方法が大きいことがわかる。
- iv) 図 7, 8 からわかるように問題が難しくなると一旦、収束したじめた解から反復解が離れてしまって現象がみられる。その原因として解の近傍で離散化した反復法の Jacobian 行列のスペクトル半径が 1 より大きくなつて不安定になるからだと思われる。

Wegmann の方法は上の i), ii) のような利点がある反面 iii), iv) のような問題点がある。

特に iv) は非常に大きな問題である。この Wegmann の方法の不安定性について指摘している文献はまだないようだ。

次の図 10 は 4 倍精度計算における収束のふるまつである。相(2)における修正量のノルムの増大がほぼ正確に等比的であることから、一旦真の離散解に近付いてから(相(1)) 反復法の安定性から途々にその解から離れてゆき(相(2))別の安定な解に収束

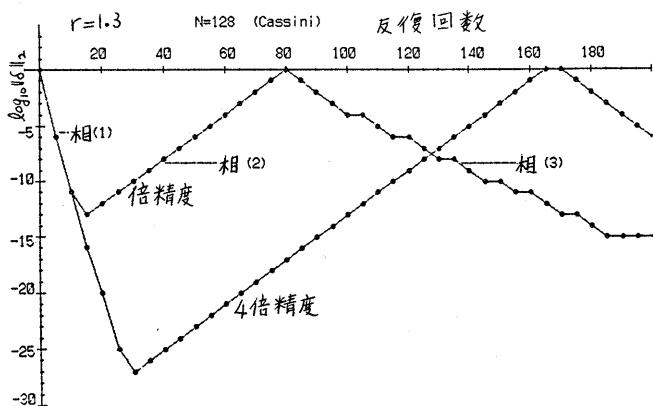


図10 Wegmannの方法の収束

問題では1以上で相(2)における修正量のノルムの増大比とほぼ等しがた。(表2)

表2 スベクトル半径

	r	スベクトル半径
円	0.1	0.0107
	0.8	1.3589
	0.9	2.1793
Cassini 橢形	2.0	0.4858
	1.3	1.5901
	1.1	2.9303

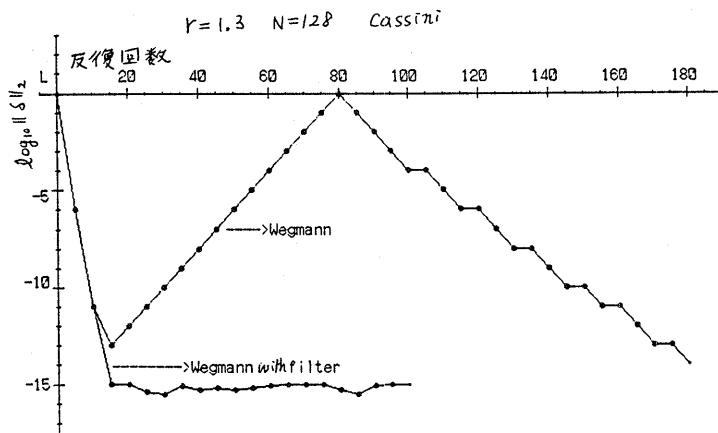


図11 filterによるWegmannの収束

② $H^{(M)}$ の Jacobian $H_r^{(M)}(\pi^{(M)})$ の最大固有値に対応する固有ベクトルの離散型 Fourier 係数は高周波成分を多く含むことが実験的にわかった。

③ 低周波 filterによる安定化

$$\text{低周波数値 filter } D^{(M)} \left(D^{(M)} e^{ik\theta} = \begin{cases} 0 & |k| > M \\ e^{ik\theta} & |k| \leq M \end{cases} \right) \text{により (29) を}$$

$$\pi_{k+1}^{(M)} = D^{(M)} H^{(M)} \pi_k^{(M)}$$

(30)

と変形することにより安定化する事ができた。問題によって M が異なった事を実験的にわかっている。問題に最適な filter の設計もこれから研究課題である。

Reference

- 1 Martin H. Gutknecht, Numerical conformal mapping methods based on function conjugation, J. Comput. Appl. Math. 14 (1986) 31-77.
- 2 W. Niethammer, Iterationsverfahren bei der konformen Abbildung, Computing 1 (1966).
- 3 B.A. Vertgeim, Approximate construction of some conformal mappings (Russian), Doklady Akad. Nauk SSSR 119 (1958) 12-14.
- 4 R. Wegmann, Ein Iterationsverfahren zur konformen Abbildung, Numer. Math. 30 (1978) 453-466.

してやく(相(3)) ものと推定される。

この現象は純粹な NEWTON 法では起らなから離散化の影響であると思われる。

前章で述べた反復法を簡単に次のように書いて分析する。

$$\pi_{k+1}^{(M)} = H^{(M)} \pi_k^{(M)}, \pi^{(M)} \in \mathbb{R}^N \quad (29)$$

① 修正量が極小になった $\pi^{(M)}$ が $H^{(M)}$ の Jacobian 行列のスペクトル半径をしらべてみた。

相(2)をもたない問題では1上り小である。相(2)をもつ