

NSGソフトウェア Mathematica™について

野寺 隆

慶應義塾大学理工学部数理科学科

Mathematica™は、数値計算、記号計算、グラフィックという3種類の計算を相互に使えるソフトウェアシステムである。これは、数値解析だけでなく、代数学、微分積分学、幾何学などの他の数学の分野でも利用できるように設計されている。また、

Mathematica™は、カラー、濃淡、および明暗の効果を用いて2次元および3次元の図形を生成することができる。さらに、このシステムはパソコン、ワーク・ステーションやスーパーコンピュータを含む多くのコンピュータで利用することができる。本報告ではいろいろな実例を示すことによって、Mathematica™の有効性について述べることにする。

NSG SOFTWARE UNDER THE NAME OF Mathematica™

Takashi NODERA

Department of Mathematics

Faculty of Science and Technology

Keio University

3-14-1 Hiyoshi Kohoku Yokohama 223, Japan

Mathematica™ is an interactive software system that performs three basic kinds of computation: numerical, symbolic and graphical. It is designed to use not only numerical analysis but also algebra, calculus, geometry, and other areas of mathematics. Mathematica™ is also able to produce 2-D and 3-D graphics including color, shading and lighting effects. Moreover, this system can be used with many kinds of computers, including personal computers, work-stations and supercomputers. In this report, We demonstrate and discuss the effectiveness of Mathematica™ in a variety of experiments.

1. はじめに

電子計算機（コンピュータ）のハードウェアの発展はめざましく、特にクレイ（CRAY-II, CRAY-X/MP）に代表される超高速な演算を実現したスーパーコンピュータから、オフィス用のSUN 3, SUN 4 やSONYが開発したNEWSなどに代表されるワークステーション、また国産では、もっとも人気の高い NECのPC9800シリーズのパーソナル・コンピュータや、今や一家に一台となりつつある日本語ワープロ、さらにファミコンに代表されるゲーム・コンピュータなど、その普及には驚くべきものがある。

最近のコンピュータの特徴として上げられるのが、その入出力にビットマップ表示のディスプレイ装置と、マウスと言われるポインティング・デバイスを標準装備していることである。特に、ビットマップ・ディスプレイを採用したコンピュータシステムでは画面上のいたる所に、ウィンドウをいくつも開くことが可能であり、例えば、TeX のソースファイルと同じ画面上で、それをタイプセットした dviファイルをプリビューアで同時に出力することが可能で、印刷する前にそのでき上がり具合を見ることができるのだ。近年、実務家の間では、このようなデバイスを標準装備したパーソナル・コンピュータ、特に、米国 APPLE社が開発したマッキントッシュのシリーズ機（Mac Plus, Mac SE, Mac II, Mac Iix）の人気の高いようである。その原因の一つには、マックの使い安さがあげられるのではないと思われる。

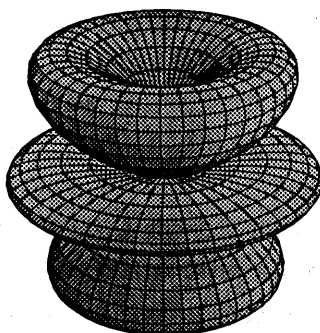
数値計算の分野でも従来から使われてきたソフトウェアを使いこなすだけでなく、関数やデータをグラフにプロットすることや3次元の図形を簡単に描いたりするためのグラフィックシステムなどと融合したものものがある。しかし、最近の傾向として、それだけの機能でなく、数式処理システムとの融合をも考慮した数値計算、記号計算、グラフィックスの三位一体のシステムがいくつも現れてきている。その代表的なものは、Textronix が開発したMathScribeやWolfram Researchが開発した Mathematica™などである。さらに、その詳細はさだかでないが、MathSoft Inc.が開発したMathStation というソフトウェアもある。

上記のソフトウェアの中で、Textronix が開発したMathScribeは、Interactive Symbolic Computation Software と名づけられているもので、記号計算のソフトウェアではかなり人気の高いREDUCEを中核としており、その使い勝手ではかなりよく、入出力に関してもREDUCEとは比較にならないほど簡単のように思われる。さらに、計算した数式の区間を指定することで、2次元、3次元の図形を簡単な操作で描くグラフィックソフトウェアを兼ね備えている。また、ウィンドー環境は、X-windowを標準に想定しており、おのおのの処理はマウスを使ってコントロールパネルのアイコン操作で行えるようになっている。このソフトウェアの詳細については、参考文献を参照してもらいたい。

Mathematica™は、当年、28歳のStephen Wolfram と彼の仲間たちによって開発された数学や物理学の研究をするためツールであり、数値計算、記号計算、さらにグラフをプロットするグラフィックス機能に関連した3つの計算を簡単な操作で相互に行えるように工夫したソフトウェアでもある。その特徴の一つは、数学のあらゆる分野で必要とされる計算を従来の数値計算だけに頼ることなく、記号計算で行える所はそれを利用し、中間結果や最終結果をグラフィック処理して出力する、いわゆる視覚に訴える能力を兼ね備えている点にある。また、各ルーチンは、従

```
<< ParametricPlot3D.m
```

```
SphericalPlot3D[Abs[SphericalHarmonicY[3,1,theta,  
phi]],{theta, 0, Pi, Pi/50},{phi, 0, 2 Pi, Pi/20},  
Boxed->False]
```



-Graphics3D-

来からあるソフトウェアで人気が高く、かつ使い易いソフトウェアの形態を維持するようにつとめており、数学でよく使う関数（ベッセル関数，超幾何関数，etc.）や楕円積分等を標準装備している。さらに，数値計算のアルゴリズムも厳選されたものが使用されている。

一言でこの Mathematica™を評価すると，クオリティは別物としても，数値解析や数値計算の分野の人々だけでなく，数学や物理学の分野で働く人々にとっても，究極のソフトウェアと言うに相応しい，いたれりつくせりの機能を持ったソフトウェアである。

そこで，以下順をおって Mathematica™の特徴について述べることにする。

2. Mathematica™

NeXT コンピュータの開発者であるSteven Jobs によって命名された Mathematica™は，インタラクティブに使用可能な高水準言語と合体したソフトウェアである。特に，このソフトウェアは下は小学生から上は大学院生というように広範囲なレベルに属する生徒，学生の教育に，さらに，大学，政府，企業の研究機関での研究の支援システムとして，また，工学，統計やモデリン

グを含むビジネスの解析の手段に利用することを目的として開発されたのである。

このソフトウェアの基本的な特徴は、(1) 数値計算、(2) 記号計算、(3) グラフィックスの計算がすべて Mathematica™という1つのソフトウェアの中で行えるように設計されている点にある。例えば、計算桁数に関しても電卓やFortran のような標準的な言語を使って計算を有限桁で行うのではなく任意の桁数で計算を行うことができるので、ある問題では数値的な丸め誤差の影響をまったくうけない計算も可能である。

Mathematica™は、数学で頻繁に使用する関数をほぼ完全に利用できるように作られている。例えば、標準的な指数関数や三角関数は言うにおよばず、Bessel関数、超幾何関数、楕円関数、Legendre 関数などを簡単な操作で利用できる。

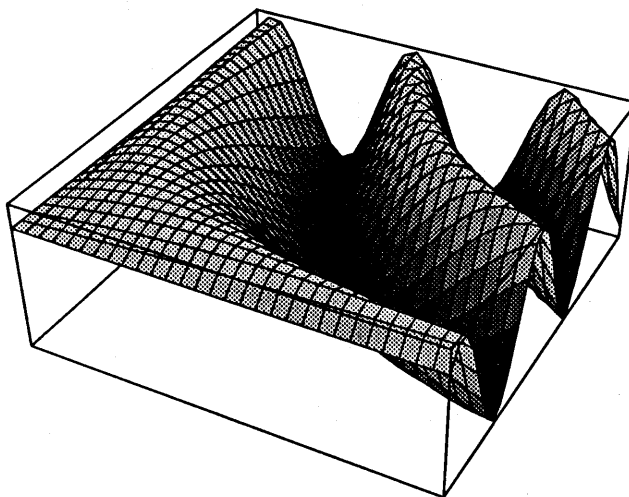
数値計算に関しても、行列計算、数値積分、代数方程式の解法の中で、現在もっとも有力なアルゴリズムが使用されている。また、行列計算においては、APL やMatlabの概念を取り入れているので、ベクトルと行列の演算を定義することができ、煩わしいプログラムを書く必要はないのだ。さらに、方程式の解法には、TK!Solver やBorland のEurekaの概念を取り入れているので、Solve [方程式] の形式で一般解を構成し、近似解を求める設計になっている。

Mathematica™では、数値計算だけでなく、代数式の計算というような記号計算も行うことができる。即ち、Reduce, Macsyma, Maple やSMP では当然可能なことではあるが、代数の基本演算や記号微分や記号積分などと同様に多項式の因数分解も行える。Stephen Wolframは、1980年～81年に SMPの設計と製作に携わっているので、Mathematica™はこれらの処理系の中では、特に、SMP の影響を受けていると思われる。また、記号計算に Mathematica™を利用することによって、数値的に結果を導き出すことよりも、むしろ方程式に対する解の明確な式を導き出すことを可能にしている。このことは、従来、数値計算にのみ頼ってきた所に数学的な計算領域を広げる可能性を作りだし、利用者にとっても解の完全な構成を理解する上で重要な要因を与えていると思われる。

Mathematica™の第3の特徴は、グラフをプロットするためのグラフィックス機能にある。即ち、Mathematica™は、関数やデータを2-D(2次元) および3-D(3次元) の白黒のディスプレイ装置にだけプロットできるのではなく、カラー・ディスプレイ装置にも自動的にカラーで図形を表示することができる。また、記号で記述された物体も、3次元のカラー図形に表示することが可能である。例えば、Mathematica™の記号計算と数値処理の能力を使って複雑な多面体のいくつかの面を作りだし、そのグラフィックス機能を使って隠れ面の消去を行った3次元多面体の図形を生成することができるのである。また、Mathematica™のグラフィック出力は、すべて解像度に依存しないPostScriptで出力されるように設定されている。

Mathematica™には 700以上の機能を備えており、その上、利用者によって必要とされる機能の追加は、随時、高水準言語によってプログラムすることで可能となる。特に、これはC言語やPascal言語のような構造化プログラミングだけでなく、APL のようなfunctionalプログラミングを含んだ数種類のプログラミングをも支援している。さらに、Mathematica™では、利用者にとって複雑なプログラムと思われるものを簡単に生成できることがあげられるのである。それは、Mathematica™によって与えられている基本的な機能が数学の基本演算に直接対応しているから

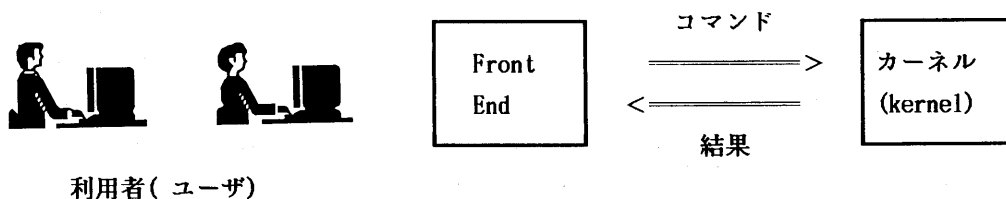
```
Plot3D[Sin[x y] + Cos[x y], {x, 0, 4}, {y, 0, 4},
PlotPoints->30]
```



-SurfaceGraphics-

である。

Mathematica™のシステムは、次のようなカーネル(kernel)とフロント・エンド(Front End)という2つの部分から構成されている。



ここでもうおわかりのことと思うのだが、カーネルでは数学的な演算を行い、フロントエンドでは、利用者と Mathematica™のカーネルとの相互作用を管理している。即ち、カーネルはいかなる種類のコンピュータでも同じ動作をするように作られているが、フロント・エンドはおのおの

のコンピュータの能力、例えば、グラフィックス機能の違いなどを考慮して設計されている。当然のことながら、フロント・エンドとカーネルは同じコンピュータの上で動いている必要はない。例えば、フロント・エンドは、家庭用の小さなパーソナル・コンピュータ（例えば、マッキントッシュ）を使いながら、一方、カーネルは電話回線やネットワークで接続されたスーパーコンピュータ上で動いているものを使用することもできるのである。さらに、製作元のWolfram Researchは、Mathematica™のカーネルとフロント・エンドとの間のMathTalkと呼ばれているコミュニケーション用のプロトコルを公開しているの、一般のソフトハウスがMathematica™に対する独自のフロント・エンドを作り出すことも可能である。これは、Mathematica™の環境上でいろいろな特色を持ったフロント・エンドを作り出せる利点があることを示している。

Mathematica™は、外部のプログラムとスムーズにインターフェイスがとれるように設計されており、内部で計算した数式などをC言語やFortran言語で出力可能なように作られている。よって、おのおののプログラムのソーステキストの適切な場所にMathematica™で計算した数式などを簡単に埋め込むことができる。さらに、数式に関しても、TeXForm[...]とコマンド入力することで、TeXのソース形式にも出力することができるので、TeXの文章として印刷することも可能である。

Mathematica™のカーネルは、Wolfram Researchによって開発されたオブジェクト指向型の（多少、拡張されているが）C言語によって記述されている。C言語で書かれたソースプログラムの行数は、ほぼ150,000行である。また、現在Mathematica™がもっともよく使われているマッキントッシュ版のフロント・エンドは、Theodore Grayによって記述されたもので、そのプログラムの長さは、ほぼ50,000行である。

Mathematica™は、その機能の豊富さに比較すると非常にポータブルなプログラムであるが、ただ一つの制約は最低2メガバイトのアドレス可能なメモリーを実装していなければならないことである。現在、Mathematica™が使用可能なパーソナル・コンピュータは、マッキントッシュのシリーズ機（Mac SE, Mac II, Mac IIfx）に属するものであるが、最低2メガバイトのメモリーを実装していなければならない。また、今年の10月の中旬に発表になったSteven Jobsが開発を担当した次期世代の教育用パーソナル・コンピュータと言われるNeXTにも移植され、標準装備されることになっている。また、Unixの環境でも動く版もあり、SUN 3やSUN 4でも稼働しているようだ。

Mathematica™は、現在、下記の多数のコンピュータに移植が予定されている。ただし、このリストの中にはすでに移植が終了し、稼働しているものもある。

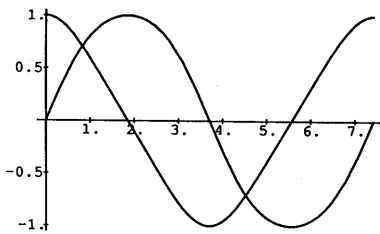
- | | | |
|---|------------------------------------|----------------------|
| (1) Alliant | (2) Apple Macintosh (Mac OS, A/UX) | (3) Apollo domain |
| (4) Ardent | (5) Atari | (6) AT&T Unix PC |
| (7) Commodore | | |
| (8) Convex | (9) Cray | (10) DEC (UNIX, VMS) |
| (11) ETA | | |
| (12) IBM (386-based clones, OS/2, Unix/Xenix, PC add-on card, PC/XT, Mainframe) | | |
| (13) Meiko | (14) Multiflow | (15) NeXT |
| (16) Sequent | | |
| (17) Silicon Graphics | (18) Sony | (19) Stellar |
| (20) Sun | | |

将来、Mathematica™がNECのPC9800シリーズに移植されれば、わが国でのこのソフトウェア

```
Plot[{JacobiSN[u, 1/2], JacobiCN[u, 1/2]},
{u, 0, 4 EllipticK[1/2]}]
```

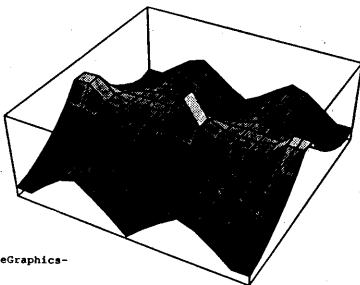
Plot::notnum:

```
JacobiSN[u, -] does not evaluate to a real
number at u=0..
```



-Graphics-

```
Plot3D[Abs[JacobiAmplitude[ux + I uy, 1/2]],
{ux, -4, 4}, {uy, 0, 4}]
```



-SurfaceGraphics-

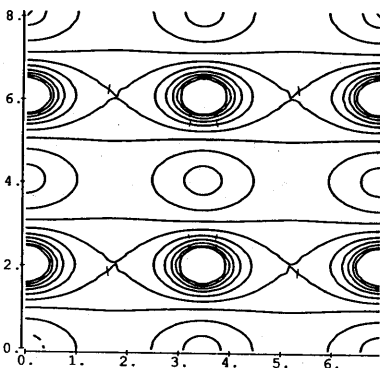
```
ContourPlot[Abs[JacobiSN[ux + I uy, 1/3]],
{ux, 0, 4 EllipticK[1/3]},
{uy, 0, 4 EllipticK[2/3]},
PlotPoints -> 40]
```

Graphics3D::numval:

```
Abs[JacobiSN[ux + I uy, -] is not a number at
ux=0., uy=0..
```

ContourGraphics::notnum:

```
Entry Abs[EllipticPrivate`JacobiFunctionRatio[
complexInfinity]] is not a number.
```



-ContourGraphics-

```
Integrate[1/(x^5-1), x]
```

$$\frac{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \log\left(1+x^2+2x\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)}{5} - \frac{\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \log\left(1+x^2+2x\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)\right)}{5}}{5} - \frac{2 \arctan\left(\frac{x + \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}{5}\right) \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{5} - \frac{2 \arctan\left(\frac{x + \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{5}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)}{5}$$

TeXForm[%]

```
((\log (1 - x))\over 5) -
((\cos ((\pi )\over 5))
 \log (1 + (x^2) +
 2 x \cos ((\pi )\over 5)))\over 5
) - ((\cos ((3 \pi )\over 5))
 \log (1 + (x^2) +
 2 x \cos ((3 \pi )\over 5)))\over
5) - ((2 \arctan ((x +
 \cos ((\pi )\over 5)))\over
 {\sin ((\pi )\over 5)}))
 \sin ((\pi )\over 5))\over 5) -
((2 \arctan ((x + \cos ((3 \pi )\over 5)))\over
 r {\sin ((3 \pi )\over 5)}))
 \sin ((3 \pi )\over 5))\over 5)
```

```
Solve[x^7==1, x]
```

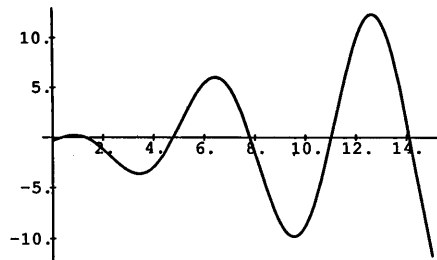
$$\left\{ \begin{aligned} & \left\{ x \rightarrow 1, \left\{ x \rightarrow E^{\frac{2 I \pi}{7}}, \left\{ x \rightarrow E^{\frac{4 I \pi}{7}}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left\{ x \rightarrow E^{\frac{6 I \pi}{7}}, \left\{ x \rightarrow E^{\frac{8 I \pi}{7}}, \left\{ x \rightarrow E^{\frac{10 I \pi}{7}}, \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left\{ x \rightarrow E^{\frac{12 I \pi}{7}} \right\} \right\} \right\} \end{aligned} \right\}$$

N[%]

```
{(x -> 1.), (x -> 0.62349 + 0.781831 I),
(x -> -0.222521 + 0.974928 I),
(x -> -0.900969 + 0.433884 I),
(x -> -0.900969 - 0.433884 I),
(x -> -0.222521 - 0.974928 I),
(x -> 0.62349 - 0.781831 I)}
```

```
FindRoot[x Cos[x] -1/3 ==0, {x,1}]  
(x -> 1.31439)
```

```
Plot[x Cos[x] -1/3, {x,0, 15}]
```



-Graphics-

の利用者は一段と増えるものと思われるけれども、移植に関連する問題点はかなり多いように思われる。

ちなみに、APPLE社の Macintosh用の Mathematica™の価格は下記の通りである。

(i) Mac SE用 \$495.00 (ii) Mac II用 \$795.00

3. おわりに

数値計算、記号計算、グラフィックと、3拍子そろった総合的に利用可能な数学ソフトウェア Mathematica™について簡単な解説をした。このソフトウェアの利用法は、とても簡単であり、かつ、いろいろな関数や機能も豊富に揃っているのでノート代わりに使うと大変便利である。また、3-D グラフィックスに関しても、隠れ面の消去を行ったものであり、解像度に依存しない PostScriptで出力されるので、できあがった図形の品質も高いように思われる。また、このソフトウェアのちょっと変わった使い形として、TeX の数式エディタとしても使用可能なので、TeX による複雑な数式のソーステキストを出力するときには利用価値が高い。

しかし、残念ながら、Mathematica™はいいとこづくめばかりとは言えないのである。これはこのソフトウェアの使用経験がないとわからないことだが、例えば、3-D グラフィックスに関して、その図形を生成するまでに必要となる計算時間が少し多めにかかりすぎる点にある。さらに、数式の入力やコマンド形式についても、その使用方法に多少熟練を要する所があるように思われる。しかし、現在のソフトウェアに改良を加えることで、将来、数学の研究や教育には欠かせないものとなるのではないかとと思われる。

〔参考文献〕

- [1] S. Wolfram, Mathematica™, Addison-Wesley Publishing Company (1988).
- [2] W. Leler and N. Soiffer, An Interactive Graphical Interface For Reduce, SIGSAM Vol.19 No.3, pp.17-23 (1985).