

一般曲線座標系を用いた3次元非圧縮MHDコード

武本 行正 * 中島 徳嘉 **

*四日市大学 経済学部

**核融合科学研究所

トカマクやステラレータの炉心プラズマの非線形時間発展を解析する場合、任意の形状境界が可能な一般曲線座標系を用いると円筒座標系等に比べ自由度が大幅に増える。さらにこれは磁気面座標で記述された平衡解をも導入できるので将来の発展が可能である。このような利点があるので現在一般曲線座標系を用いた3次元非線形時間発展非圧縮MHDコードの開発を行っている。しかしながら、断面を円筒座標的にメッシュ分布させると中心の磁気軸近傍で計算誤差が大きくなっていく。これは通常の流体コードでは見られず、電磁流体で特有の性質である。そこで、中心付近は通常のXY座標的にメッシュ分布させる領域分割法の技法を採用し、2重化メッシュとしてこれを回避した。

Solutions of 3D Incompressible MHD Code
Using the Curvilinear Coordinate System

Yukimasa Takemoto * and Noriyoshi Nakajima

* Faculty of Economics, Yokkaichi University
Kayou-cho, Yokkaichi 512, Japan

** National Institute for Fusion Science
Furou-cho, Chikusa-ku, Nagoya 464, Japan

Recently, many time-dependent problems are newly brought forward as large Tokamaks and helical systems are operated.

In order to explain physical mechanisms of MHD phenomena including above ones, we are developing a 3D incompressible MHD code in the generalized coordinate system. The equations of time-dependent incompressible MHD code in the conservative nondimensional form are as follows:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}B - B\mathbf{v} + \frac{1}{s} ((\nabla B)^T - \nabla B)) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v}\mathbf{v} - B\mathbf{B} + I(\frac{B^2}{2} + p)) \\ \nabla^2 p &= \nabla \cdot ((\nabla \times B) \times B - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0 \end{aligned}$$

where B is the magnetic field, \mathbf{v} is the velocity, p is the pressure, and s is the Lundquist number.

The time development of the above equations is solved by the second-order Adams-Bashforth scheme and the fourth-order central differencing method for the space derivatives is used.

In order to check the calculation, we see that in the resulting toroidal equilibrium of a circular cross-section periodic cylinder, the flux surfaces are concentric circles.

1. はじめに

一般曲線座標系を用いた差分法による3次元非線形時間発展非圧縮電磁流体コードには以下のような利点がある。すなわち、

- ・外部境界すなわち壁の形状に合わせて座標系が設定されるので、複雑な形状のプラズマ閉じ込め装置についての解析が可能となる。
- ・メッシュの分布を変更できるので、解析したい磁気面の近傍に多くのメッシュを配置させることにより局所モードの解析が可能となる。
- ・磁気軸が動かないという仮定では解ける対象が限定されるため、軸が変動してもよいように2重化メッシュとして軸近傍はXY座標で表現し解析可能のようにした。

さて、今回は解析平衡解を初期条件とした諸量の分布を与え、これが時間発展しても解を安定に保持するかを検討した。

2. 基礎方程式について

周囲が完全導体壁で、Z方向に $2\pi R$ の周期性をもつ円筒容器に囲まれた非圧縮性のプラズマを仮想すると、基礎方程式は以下で記述される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left[\mathbf{v} B - B \mathbf{v} + \frac{1}{s} \left((\nabla B)^\tau - \nabla B \right) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= -\nabla \cdot \left[\mathbf{v} \mathbf{v} - B \mathbf{B} + I \left(\frac{B^2}{2} + p \right) \right] \\ \nabla^2 p &= \nabla \cdot \left[(\nabla \times B) \times B - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \nabla \cdot B &= 0\end{aligned}$$

ここで B は磁場、 \mathbf{v} は流体の速度、 p は圧力、 s は Lundquist 数で τ_D / τ_A で定義され τ_D は磁場の抵抗性拡散時間、 τ_A は Alfvén 時間である。上式は小半径 a 、初期平衡のトロイダル磁場の磁気軸上での値 B_z 、質量密度 ρ_0 、Alfvén 速度 v_A で normalize されている。

3. 差分の展開法と時間積分法について

基礎式を3次元の一般化座標展開（展開した式は略す）して差分近似する。流速および磁場の運動方程式の移流項部分には4次の中心差分を用いた。なお、高波数成分をダンピングさせるために4階のダンピング項を両運動方程式に添加してある。さらに流速の運動方程式には2階の粘性項を添加しそのレイノルズ数は $Re=1000$ を仮定した。

時間積分法は時間2次精度のAdams-Bashforth schemeを採用し、さらに流速の運動方程式は非圧縮なので圧力との調節のため2Stepに分割しはじめのStepで陽的に仮流速 \tilde{v} を求めついで2Step目に \tilde{v} から v^{n+1} を求め同時にここで圧力 p のPoisson方程式をSOR法で解くようにした。すなわち、

$$\nabla^2 p = \nabla \cdot \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} \end{array} \right\} + \nabla \cdot \mathbf{v} / \delta t$$

ここに \mathbf{J} は : 電流

により圧力場を決定する。

4. 初期条件と境界条件

テストケースとして、初期平衡を与えてその平衡数値解が保持されるかどうかチェックしてみた。すなわち、

- ・外部境界形状は小半径 a が1で規格化されているので、アスペクト比 $R/a=3$ より $R=3$ として、 z 方向に $2\pi R$ の円筒部分を計算領域とした。
- ・平衡の分布は $\alpha=0.1$ として $B_z = 1$, $B_\theta = \alpha r$ で分布させ、圧力分布は p_0 を $p_0 = \alpha^2 (1 - r^2)$ で与えている。

今回のケースでは初期擾動は与えていない。

5. 結果について

まず最初に電磁場を計算しない流体コードとして、 r 方向20、 θ 方向40、 z 方向30のメッシュの非圧縮性流体を仮想した場合で Re 数1000のケースで曲がり円管での流入流出計算の無次元時刻 $T=1$ の結果を図1に示す。このケースでは非定常流れが良好にシミュレートされた（1重のメッシュでの計算）。

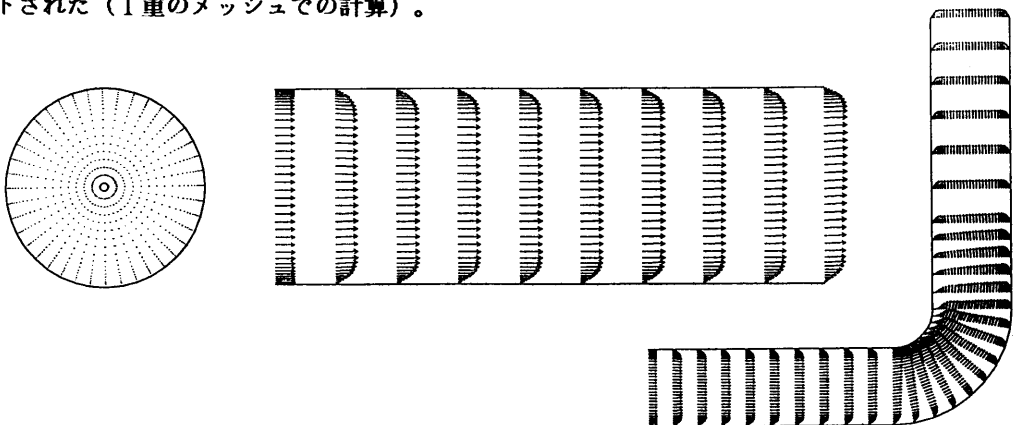


図1. $Re=1000$ の非圧縮性流体の流入流出計算（無次元時刻 $T=1$ ）

つぎに電磁流体コードとして4の初期・境界条件を用いて2重化メッシュを用いず中心軸近傍も単純に片側差分で計算したケースで、 r 方向10、 θ 方向20、 z 方向10のメッシュを用いて無次元時刻 $T=0.8$ まで計算した。本ケースではやはり時刻を経過すると磁気軸近傍から計算誤差が累積されるので現在2重化メッシュを用いた改良を実施しているところである(メッシュ配置は図3参照)。

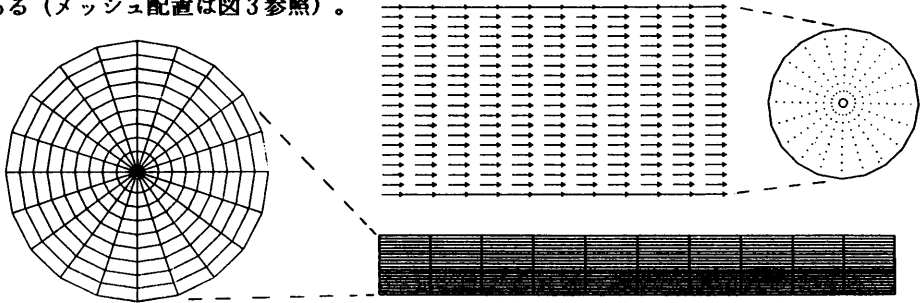


図2. 2重化メッシュを用いない摂動なしの平衡維持シミュレーション

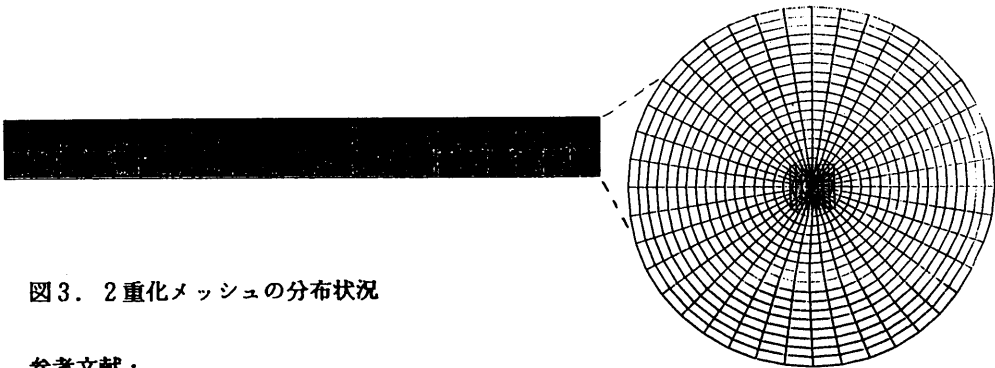


図3. 2重化メッシュの分布状況

参考文献:

- 1) 武本行正: 非圧縮性 Pipe Flowの数値シミュレーション, 核融合研究58-1, pp.50~57 (1987)
- 2) 武本, 中村, 山辺: ライブラリ・プログラムの紹介(77) - GGQ3D 一般化座標系 QUICK 法を用いた 3次元非圧縮性粘性流解析コード -, 京都大学大型計算機センター広報21-2, pp.67~81 (1988)
- 3) Y.Takemoto and Y.Nakamura: SOLUTIONS OF CIRCULAR-SECTIONED PIPE FLOWS USING A THREE-DIMENSIONAL GENERALIZED QUICK SCHEME, COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS, G.de Vahl Davis and C.Fletcher(Editors), Elsevier Science Publishers(North-Holland), pp.703 ~713 (1988)
- 4) N.Nakajima: Nonlinear Phenomena Due to an $m=1$ Non-Resonant Current-Driven Mode in RFP with Relatively High S Number, J.Phys.Soc.Jpn.56-5, pp.1738~1749 (1987)
- 5) R.Horiuchi and T.Sato: FULL MAGNETOHYDRODYNAMIC SIMULATION OF THE TILTING INSTABILITY IN A FIELD-REVERSED CONFIGURATION, HIFT-152, Institute for Fusion Theory, Hiroshima University (1988)
- 6) 鈴木, 林, 佐藤: 磁気面座標で記述された平衡を用いたヘリカル系の3次元シミュレーション, 核融合研究60-5, pp.357 ~365 (1988)