

べき乗法による3次元配列の 外積展開の計算

村上 純 鄧 天波 田所嘉昭

豊橋技術科学大学・工学部・情報工学系

画像処理や信号処理の分野では、3次元配列として与えられたデータを1次元ベクトルの積の和の形に分解する必要がしばしば生じる。画像処理では、2次元の画像を多次元配列として表現し、1次元分解すると効率よく符号化ができる。信号処理では、3次元ディジタルフィルタの設計において、3次元配列の設計仕様を1次元分解すると、1次元フィルタの設計問題に帰着できる。このような分解でよく用いられる手法は3次元外積展開であるが、非線形最適化を行なうので、多大な計算時間を要する。我々は、べき乗法を応用して3次元外積展開の計算を高速に行なう手法を開発した。また、ベクトルの成分が非負となるような分解にも適用した。

Computation of Outer Product Expansion of 3-Dimensional Arrays by the Power Method

Jun MURAKAMI Tian-bo DENG Yoshiaki TADOKORO

Department of Information and Computer Sciences, Faculty of Engineering,
Toyohashi University of Technology

In multi-dimensional signal processing such as image processing, the decompositions of 3-dimensional(3-D) data arrays into 1-D ones are often required. As one of such decompositions, the outer product expansion exists at present. But it requires a large amount of computation, since it uses nonlinear optimization techniques. In the proposed method, the power method is applied and it results in a significant reduction of computation. Furthermore, it is also applied to the nonnegative decompositions of 3-D arrays.

1. はじめに

画像処理や信号処理の分野では、3次元の配列として与えられたデータを、1次元のベクトルの積の和に展開する必要がしばしば生じる。画像の符号化では、特異値分解による符号化¹⁾が知られているが、画像を多次元配列として表現し、この配列を1次元ベクトルの積和に展開すると圧縮率は向上する²⁾。3次元ディジタル信号処理では、3次元ディジタルフィルタが用いられるが、その設計法の1つとして、1次元ディジタルフィルタの設計問題に変換する方法が提案されている^{3), 4)}。具体的には、設計仕様として与えられた3次元の配列データを1次元ベクトルの積和形式で表現し、1次元の設計仕様に分解する。

3次元配列の1次元ベクトルの積による展開で、よく用いられているのは3次元外積展開と呼ばれる手法で、行列の特異値分解を3次元配列へ拡張したものである²⁾。しかし、その計算方法には非線形最適化を利用しているので、多大の計算時間を必要とする。我々は、べき乗法を応用して効率的に3次元外積展開を計算する手法を開発した。さらに、ディジタルフィルタの設計に必要な、1次元ベクトルの成分がすべて非負となるような展開にも応用を試みた。

2. 3次元配列の外積展開

2.1 行列の特異値分解

(m,n)行列Aの特異値分解は

$$A = \sum_{i=1}^R d_i (u_i \otimes v_i^\top) \quad (1)$$

で定義される。ここでRは行列Aのランク、 d_i は特異値で降順に並んでいるものとする。 u_i , v_i はそれぞれ d_i に対する左特異ベクトル、右特異ベクトルを表わしている。行列のノルムおよびベクトルのノルムを

$$\|A\| = \left\{ \sum_{i,j} A(i,j)^2 \right\}^{1/2} \quad (2)$$

$$\|a\| = \left\{ \sum_i a(i)^2 \right\}^{1/2} \quad (3)$$

と定義する。また、ランクk($k < R$)の(m,n)行列Bに対して $\|A - B\|$ の最小値を与えるBは式(1)の展開式のk項目までの和の行列であることが証明できる⁵⁾。したがって、特異値分解を数項で打ち切った行列は元の行列の近似として用いることができる。

2.2 3次元配列の外積展開

式(1)の特異値分解はベクトルの外積を用いて

$$A = \sum_{t=1}^R d_t (u_t \otimes v_t) \quad (4)$$

と表現することができる。ただし、外積 $u_t \otimes v_t$ は行列

$$[u_t \otimes v_t] (i, j) = u_t(i) v_t(j)$$

を意味している。3次元外積展開は式(4)を3次元に拡張したもので、3次元配列Aに対して

$$A = \sum_{t=1}^R d_t (u_t \otimes v_t \otimes w_t) \quad (5)$$

で定義される。ここで、外積 $u_t \otimes v_t \otimes w_t$ は3次元配列

$$[u_t \otimes v_t \otimes w_t] (i, j, k) = u_t(i) v_t(j) w_t(k)$$

を意味する。式(5)で d_t は降順に並んでおり、特異値分解にならって特異値と呼ぶことにする。ベクトル u_t , v_t , w_t はノルムが1に正規化されている。また、各外積項は $i \neq j$ のとき内積が0である。

$$(u_i \otimes v_i \otimes w_i) (u_j \otimes v_j \otimes w_j) = 0 \quad (6)$$

を満足する。ただし、3次元配列BとCの内積は

$$B \cdot C = \sum_{i,j,k} B(i,j,k) C(i,j,k) \quad (7)$$

で定義する。さらに、外積展開を数項で打ち切った3次元配列は元の配列の最小2乗近似となる。

斎藤らが文献2)で示した、3次元外積展開を計算するアルゴリズムは次の通りである。

(1) 3次元配列Aの最小2乗近似配列A₁を以下の手順(a)～(d)で求める。

(a) ベクトルu₁, v₁, w₁を初期設定する。

(b) ベクトルu₁に着目し、ベクトルv₁, w₁を固定としたときの、Aの最小2乗近似を与えるベクトルu_{1'}を求め、正規化して新たにu₁とする。この処理をベクトルv₁, w₁についても行なう。

(c) 各ベクトルの各要素の変化量が、十分小さくなるまで(b)の処理を繰り返す。

(d) 正規ベクトルu₁, v₁, w₁の外積によって生成される3次元配列u₁⊗v₁⊗w₁とAとの内積を求めd₁とする。A=d₁(u₁⊗v₁⊗w₁)と置く。

(2) AとA₁との差の配列に(1)の処理を施してu₂, v₂, w₂, d₂, A₂を求める。このように順次A₃, A₄等を求める。

3. べき乗法による3次元外積展開の計算

べき乗法は、任意の初期ベクトルに行列を繰り返し掛けて固有値と固有ベクトルを計算する方法である。特異値分解の計算を行なう場合は、2個の初期ベクトルに対して、行列自身とその転置とを交互に掛けばよい^{6), 7)}。サイズ(p, q, r)の3次元配列Aが与えられたとき、べき乗法を用いた3次元外積展開の計算アルゴリズムは次の通りである。

(1) 3次元配列Aの最小2乗近似配列A₁を以下の手順で求める。

(a) 成分数がそれぞれp, q, r個であるベクトルu₁, v₁, w₁に初期値を設定する。

(b) サイズがそれぞれ(p, q), (q, r), (r, p)の行列F, G, Hを

$$F = A w_1, \quad (10)$$

$$G = A^{(1)} u_1, \quad (11)$$

$$H = A^{(2)} v_1 \quad (12)$$

として構成する。ただし、A⁽¹⁾, A⁽²⁾は3次元配列Aの添字のローテーション

$$A^{(1)}(i, j, k) = A(k, i, j), \quad (13)$$

$$A^{(2)}(i, j, k) = A(j, k, i) \quad (14)$$

を意味する。

(c) 行列F, G, Hについてそれぞれ(d)～(f)のようにべき乗法を適用し、ベクトルu₁, v₁, w₁を求める。

(d) ベクトルu₁, v₁を

$$F v_1 = u_1', \quad F^T u_1 = v_1' \quad (13)$$

の反復により計算する。u_{1'}, v_{1'}は正規化して、新たにu₁, v₁とする。各成分の変化が十分小さくなるまで反復を繰り返す。

(e) ベクトルv₁, w₁を

$$G w_1 = v_1', \quad G^T v_1 = w_1' \quad (14)$$

の反復により計算する。v_{1'}, w_{1'}は正規化して、新たにv₁, w₁とする。各成分の変化が十分小さくなるまで反復を繰り返す。

(f) ベクトルu₁, w₁を

$$H u_1 = w_1', \quad H^T w_1 = u_1' \quad (15)$$

の反復により計算する。u_{1'}, w_{1'}は正規化して、新たにu₁, w₁とする。各成分の変化が十分小さくなるまで反復を繰り返す。

(g) (a)～(f)の処理をu₁, v₁, w₁の各成分の変化が十分小さくなるまで繰り返す。

(h) 正規ベクトルu₁, v₁, w₁の外積によって生成される3次元配列u₁⊗v₁⊗w₁とAとの内積を

求め d_1 とする. $A_1 = d_1 (u_1 \otimes v_1 \otimes w_1)$ と置く.

(2) A と A_1 の差の配列に (1) の処理を施して u_2, v_2, w_2, d_2, A_2 を求める. このように順次 A_3, A_4 等を求める.

4. べき乗法による3次元非負外積展開の計算

4.1 3次元配列の非負外積展開

3次元ディジタルフィルタを1次元ディジタルフィルタの継続接続として実現することを考える. そのためには、設計仕様として与えられた3次元のデータ配列を1次元ベクトルの外積項の和の形式で表現しなければならない. フィルタの構造を簡単にするためには展開式の項数は少ない方が望ましいので、式(5)の外積展開を用いれば、打ち切った項数での元のデータ配列の最小2乗近似配列が得られる. 各外積項を構成するベクトルは1次元の振幅仕様となるので、ベクトルの各成分は物理的に非負でなければならない. そこで、すべての成分が非負であるという条件のもとで3次元データ配列の最小2乗近似配列を与える外積展開の計算が必要になる.

我々は、2次元ディジタルフィルタの同様な問題について、べき乗法を用いて非負分解を計算するアルゴリズムを開発している⁸⁾. 3次元配列についてもべき乗法による3次元外積展開の手法を応用して非負外積展開の計算を試みた.

4.2 べき乗法による計算アルゴリズム

べき乗法による3次元外積展開の計算アルゴリズムで、次のような修正を行なうと非負外積展開の計算が可能になる. 式(13)の反復の過程で、ベクトル u_1, v_1 を

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1^+ - u_1^-, \\ u_1^+ &= \max(u_1(i), 0), \\ u_1^- &= -\min(u_1(i), 0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$v_1 = v_1^+ - v_1^-,$$

$$\left. \begin{aligned} v_1^+ &= \max(v_1(i), 0), \\ v_1^- &= -\min(v_1(i), 0) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

として、それぞれ2つの非負ベクトルの差で表わす. 非負ベクトル u_1^+, u_1^- のノルムを計算し、大きい方を修正反復ベクトル

$$\hat{u}_1 = \begin{cases} u_1^+ (\|u_1^+\| \geq \|u_1^-\|) \\ u_1^- (\|u_1^+\| < \|u_1^-\|) \end{cases} \quad (18)$$

とする. v_1 についても同様に

$$\hat{v}_1 = \begin{cases} v_1^+ (\|v_1^+\| \geq \|v_1^-\|) \\ v_1^- (\|v_1^+\| < \|v_1^-\|) \end{cases} \quad (19)$$

と修正反復ベクトルを定める. 同様の処理を式(14), (15)についても行ない、修正反復ベクトル \hat{v}_1, \hat{w}_1 と \hat{u}_1, \hat{w}_1 を定める. 修正反復ベクトルを用いて計算を行なうと最終的に非負外積展開が得られる.

5. 計算結果

5.1 3次元配列の構成

次のような3次元配列 A について計算を行なった.

$$A(i, j, k) = h_a(x_i, y_j, z_k), \quad (20)$$

$$h_a(x, y, z) = \begin{cases} 1 & (\alpha \leq 0.4) \\ (0.6 - \alpha)/0.2 & (0.4 \leq \alpha \leq 0.6) \\ 0 & (\alpha \geq 0.6) \end{cases} \quad (21)$$

ただし、 α は

$$\alpha = \frac{1}{\pi} (x_i^2 + y_j^2 + z_k^2)^{1/2} \quad (22)$$

であり、 x_i, y_j, z_k は

$$\left. \begin{array}{l} x_i = i \pi / M, \quad 0 \leq i \leq M \\ y_j = j \pi / N, \quad 0 \leq j \leq N \\ z_k = k \pi / L, \quad 0 \leq k \leq L \end{array} \right\} \quad (23)$$

の値をとるものとする。

5.2 3次元外積展開の計算結果

べき乗法を用いた計算結果の特異値を、文献4)に示してある非線形最適化法を用いた結果と比較したのが表1である。ここで、サンプル点数はM=N=L=20である。特異値の最初の6番目まではほぼ一致していることが分かる。しかし、べき乗法では必ずしも大きい特異値に対するベクトルの方向には近づかないで、最適化法の8番目の大きさの特異値が7番目に現われている。

図1にべき乗法による計算の場合の、打ち切りの各項での残差ノルムを示した。残差ノルムは、元の配列のノルムを100パーセントとしたときの値である。また、3次元非負外積展開に応用した場合の残差ノルムも合わせて表示してある。

表2は計算に要する時間の評価である。ただし、最適化にはマルカート法⁹⁾を用いた。最適化法の計算時間の評価は初期値の選び方に依存するが、ここでは予め計算した近似ベクトルを選んでいる。最適化法では、ランダムな初期値の場合は、一般にこれよりかなり多く計算時間を要し、場合によっては収束しないこともある。それに対し、べき乗法では初期値の選び方で計算がうまく行なわれないという心配はない。なお、計算はすべてパーソナル・コンピュータ NEC-9801-NSを使用し、Fortranの単精度演算で行なった。

6. むすび

べき乗法を用いて3次元外積展開、3次元非負外積展開を計算する手法について述べた。計算結果では、うまく求まらない特異値も見られたが、主要な特異値は満足のいく精度で計算できることが分かった。したがって、非線形最適化による手法と比べて、べき乗法による手法は計算時間が短くてすむので、有用な手法

表1 両計算法における特異値の比較

特異値	最適化による計算 (文献4))	べき乗法による計算 (本手法)
d ₁	2.275862E+01	2.275862E+01
d ₂	4.283573E+00	4.283574E+00
d ₃	3.025678E+00	3.025678E+00
d ₄	1.400982E+00	1.400984E+00
d ₅	1.129514E+00	1.129514E+00
d ₆	6.526013E-01	6.526005E-01
d ₇	3.698252E-01	3.454429E-01
d ₈	3.454422E-01	3.403224E-01
d ₉	3.403220E-01	2.840042E-01
d ₁₀	2.840046E-01	2.108766E-01

表2 計算時間の比較

M=N=L	最適化による計算 [S]	べき乗法による計算 [S]
2	3	1
4	7	1
6	22	2
8	109	3
10	119	4

であると考えられる。非線形最適化では初期値の選定やきざみ幅等のパラメータ調節に要する手間も考慮に入れる必要があり、現実問題としては計算に要する時間はさらに増大する。非負分解への応用では誤差は10項目で約10%であるが、フィルタ設計では項数はなるべく少ない方が望ましいので、3~4項で10

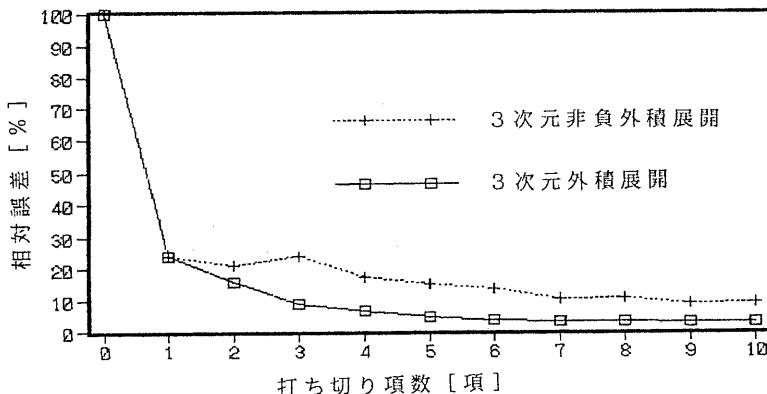


図 1 べき乗法による計算の収束性

%程度になる必要がある。そこで、本手法を非線形最適化手法と併用し、初期値を本手法で計算すればフィルタ設計での低次元化の計算の高速化が期待される。

クトルの計算、信学春全大、D-1(1990)。

8) 村上純、鄧天波、田所嘉昭：べき乗法による行列の非負分解、情報処理学会研究報告、91-NA-38-2(1991)。

9) 渡部力、名取亮、小国力（監修）：Fortran77による数値計算ソフトウェア、丸善(1989)。

参考文献

- 1) H.C.Andrews and C.L.Patterson : Singular Value Decomposition (SVD) Image Coding, IEEE Trans. Commun., Vol.COM-24, pp.425-432(1976).
- 2) 斎藤隆弘、小松隆、原島博、宮川洋：多次元外積展開による静止画像の符号化、信学論、Vol.J68-B, No.4, pp.547-548(1985).
- 3) 大木真、川又政征、樋口龍雄：インパルス応答仕様の外積展開に基づく3次元ディジタルフィルタの設計、信学論(A), Vol.J72-A, No.4, pp.648-655(1989).
- 4) 大木真、川又政征：周波数領域仕様に対する並列完全分離形3次元ディジタルフィルタの設計、信学論(A), Vol.J72-A, No.8, pp.1247-1252(1989).
- 5) 柳井晴夫、竹内啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解、p.129、東京大学出版会(1983)。
- 6) I.J.Good : Some Application of the Singular Decomposition of a Matrix, Technometrics, Vol. 11, No.4, pp.823-831(1969).
- 7) 村上純、大岩元：べき乗法による特異値と特異ベ