

並列計算機による Cahn-Hilliard 方程式の数値解析

野口 雄一郎 谷 温之 野 寺 隆†

離散空間において Cahn-Hilliard 方程式や Allen-Cahn 方程式と同じ形をした非線形拡散方程式を考える。この方程式はグラジエント系であり、解はパラメータの値によってチェックヤストライプなどの形をしたパターンを形成する。このパラメータの値とパターンの形についての関係を求める。

これらの方程式は数値的に不安定であり解析方法には注意を要する。ここでは、メモリ分散型の並列計算機を使った数値実験の方法を提案する。この方法はシングルプロセッサの計算機を使った場合と同等の容易さで構築できる。その中に現れる連立一次方程式を解く部分では反復法の BiCGStab(ℓ)法を使い、その性質を利用することによってアルゴリズムの並列計算機への実装を単純化することができた。最後に、数値実験によってさまざまなパラメータの値に対してパターンが出現することを実証する。

Numerical analysis for Cahn-Hilliard equation on a parallel computer

YUUCHIROU NOGUCHI, ATUSI TANI, TAKASHI NODERA †

We consider spatially discrete nonlinear diffusion equations that are similar to Cahn-Hilliard equation or Allen-Cahn equation. These equations are gradient systems and their solutions of the equations come out checkerboard patterns or striped patterns for different values of parameters. We consider the relations between parameters and the pattern formations.

These equations are numerically unstable and the methods for numerical simulations have to be carefully constructed. We propose a stiff method for the analysis of nonlinear diffusion equations on a parallel computer. For solving the linear equations that arise from the numerical simulations, we make use of an iterative solver, the BiCGStab(ℓ) method. Using the effectiveness of the BiCGStab(ℓ) method, the algorithm for the simulations is easily implemented on a parallel computer. At last, numerical simulations present that the pattern formations appear for different values of the parameters.

1. はじめに

2種類の金属が均一に混ざった状態から、だんだん分離していく現象(スピノーダル現象)をモデル化した方程式として、Cahn-Hilliard 方程式が知られている。この方程式は、2種類の金属のうちの1つの濃度を $u = u(x, t)$ とするとき、

$$\dot{u} = \Delta(f(u) - \varepsilon \Delta u), \quad x \in \Omega \quad (1.1)$$

$$n \cdot \nabla u = n \cdot \nabla \Delta u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.2)$$

と表すことができる。ただし、 ε はパラメータであり、ここでは $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ として2次元領域を考え、 x はその領域上の座標を表すものとする。また f は3次関数で、 $f(u) = u^3 - u$ や $f(u) = u(u-a)(u-1)$ ($0 < a < 1$)

などが用いられる。境界条件(1.2)は領域内の粒子の数およびエネルギーの保存を意味する。

Cahn-Hilliard 方程式と関係の深い方程式として Allen-Cahn 方程式がある。この方程式は

$$\dot{u} = -f(u) + \varepsilon \Delta u, \quad x \in \Omega \quad (1.3)$$

$$n \cdot \nabla u = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (1.4)$$

と表される。Cahn-Hilliard 方程式が2種類の金属の相分離現象を記述する方程式であるのに対して、この Allen-Cahn 方程式は2種類の金属が接する部分における動きを表すものである。

ここでは、離散空間上における Cahn-Hilliard 方程式と Allen-Cahn 方程式を取り扱う。これら2つの方程式はグラジエント系でありグローバルアトラクタを持つものである。パラメータの値によってさまざまなパターンを示すが、それらを数学的に解析し、数値実

† 慶應義塾大学 理工学部

Faculty of Science and Technology, Keio University

験で実証する。

Cahn-Hilliard 方程式は負の拡散項 $-\Delta u$ と強い非線形項 Δu^3 をもつために数値的に不安定であり、解を計算機を使って求めようとすると発散してしまうことが多い。そのためこの方程式の解を直接数値計算で求めた例はあまりないが¹⁾、ここでは方程式の解を、陰解法である台形法を用いて直接安定に求めることが目的である。一般に、陰解法はオイラー法などの陽解法と比べて安定ではあるが、膨大な計算時間を必要とする。さらにその中に現れる連立方程式が非線形な項 f を含むために、近似解を求めるのにはニュートン法を使う必要がある。その際、大規模な連立1次方程式を解かなければならない。これらを解決する方法として、計算時間の短縮のためにはメッセージパッシング型の並列計算機を使う。大規模な連立1次方程式を解くためには、並列計算機上で並列化が容易であり、しかも並列化効果が高い反復法である BiCGStab(ℓ) 法^{3),4)}を用いた。また、並列計算機上では扱いが難しい $\Delta^2 u$ の計算や境界条件などの問題も、BiCGStab(ℓ) 法の利点を利用して容易に扱えるようにした。

2. 非線形拡散方程式

2次元離散格子における非線形拡散方程式を考える。領域は離散格子 $L \subset N^2$ を考え、 $L = N_1 \times N_2$ とする。つまり格子の一点を $\eta \in L$ と表すものとすれば $\eta = (i, j) \in N_1 \times N_2$ である。また、点 $\eta = (i, j)$ における u の値を $u(i, j)$ と表すものとする。拡散項 Δu は、

$$\begin{aligned} \Delta^+ u(i, j) &= u(i-1, j) + u(i+1, j) \\ &\quad + u(i, j-1) + u(i, j+1) \\ &\quad - 4u(i, j) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta^\times u(i, j) &= u(i-1, j-1) + u(i-1, j+1) \\ &\quad + u(i+1, j-1) + u(i+1, j+1) \\ &\quad - 4u(i, j) \end{aligned} \quad (2.2)$$

を組み合わせたもの考える。

このとき、離散型 Cahn-Hilliard 方程式は

$$\begin{aligned} \dot{u}(i, j) &= (\beta^+ \Delta^+ + \beta^\times \Delta^\times) \\ &\quad (f(u(i, j)) - (\alpha^+ \Delta^+ + \alpha^\times \Delta^\times)u(i, j)) \end{aligned} \quad (2.3)$$

と表される。 $\beta^+, \beta^\times, \alpha^+, \alpha^\times \in R$ はパラメータであり、正の値も負の値もとることができる。 $\dot{u}$ は u の時間微分を表す。 f は3次関数

$$f(x) = px^3 - qx, \quad p, q > 0 \quad (2.4)$$

を用いる。

(1.2) に対応する境界条件として、周期境界条件

$$\begin{aligned} u(i, k) &= u(i, N_2 + k), \\ i &= 0, \dots, N_1 + 3, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ u(k, j) &= u(N_1 + k, j), \\ j &= 0, \dots, N_2 + 3, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

を使うことができる。(2.5) の境界条件を使うことにより (1.2) の条件が満たされることは Cahn 等²⁾が証明している。ただし、ここでは領域内の格子点を $2 \leq i, j \leq N+1$ 、境界の点を $i, j = 0, 1, N+2, N+3$ とした。

離散型 Allen-Cahn 方程式は

$$\begin{aligned} \dot{u}(i, j) &= -f(u(i, j)) \\ &\quad + (\alpha^+ \Delta^+ + \alpha^\times \Delta^\times)u(i, j) \end{aligned} \quad (2.6)$$

と表される。(1.4) に対応する境界条件としては、

周期境界条件

$$\begin{aligned} u(i, k) &= u(i, N_2 + k), \\ i &= 0, \dots, N_1 + 1, \quad k = 0, 1 \\ u(k, j) &= u(N_1 + k, j), \\ j &= 0, \dots, N_2 + 1, \quad k = 0, 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

を使う。

3. 平衡解

離散型 Cahn-Hilliard 方程式 (2.3), (2.5) と離散型 Allen-Cahn 方程式 (2.6), (2.7) は離散領域 $L \subset N^2$ において同じ Lyapunov 関数 (自由エネルギー関数) をもち、それぞれの系はグラジエント系になっている。よって空間 R^{N^2} 上では解が振動しない状態だけが存在し得る。 $\{R, N^2\}$ という3次の空間を考えると安定な状態はパターンを形成すると考えられる^{2),5)}。

ここでは2つの方程式に対して平衡解が存在することを示し、形成されるパターンの形とパラメータの関係について述べる。平衡解は次のように定義する。

定義 (平衡解)

$$u \text{ が平衡解} \iff \dot{u}(i, j) = 0$$

離散型 Cahn-Hilliard 方程式 (2.3) の平衡解は離散型 Allen-Cahn 方程式 (2.6) の平衡解を含んでいる。よって、離散型 Allen-Cahn 方程式の平衡解を解析することによって離散型 Cahn-Hilliard 方程式 (2.3) の平衡解を推測することができる。

ここでは形成されるパターンの形によって2つの平衡解

チェック (Check) 型

$$u(i, j) = \begin{cases} b & \text{if } i+j = \text{odd} \\ -b & \text{if } i+j = \text{even} \end{cases} \quad (3.1)$$

ストライプ (Stripe) 型

$$u(i, j) = \begin{cases} b & \text{if } j = \text{odd} \\ -b & \text{if } j = \text{even} \end{cases} \quad (3.2)$$

(b は正定数) を考える。

チェック型の平衡解が存在するためには, (3.1) を (2.6), (2.7) に代入して,

$$u_{i,j} = b \Rightarrow -f(b) - 8\alpha^+ b = 0 \quad (3.3)$$

$$u_{i,j} = -b \Rightarrow f(-b) + 8\alpha^+ b = 0 \quad (3.4)$$

を満たすような $b > 0$ が存在すればよい。(2.4) から $f(-x) = -f(x)$ となることに注意すれば (3.3), (3.4) の2つの条件は, 1つの同じ条件

$$f(b) + 8\alpha^+ b = 0 \quad (3.5)$$

になる。(3.5) が $x=0$ 以外の解をもつ条件は

$$q - 8\alpha^+ > 0 \quad (3.6)$$

であり, このとき正の解は $b = \sqrt{(q - 8\alpha^+)/p}$ となる。

この平衡解の安定性を調べるために, 変換 (2.6) のヤコビ行列の固有値 λ を考える。ヤコビ行列の対角成分は $-f'(u_{i,j}) - 4(\alpha^+ + \alpha^\times)$ であり, 非対角成分は $\alpha^+, \alpha^\times$ もしくは 0 である。 $\text{Re} \lambda < 0$ ならばこの平衡解は安定である。Gershgorin の定理より λ に対して次が成り立つ。

$$|\lambda - (-f'(b) - 4(\alpha^+ + \alpha^\times))| < |\alpha^+| + |\alpha^\times|$$

$\text{Re} \lambda < 0$ であるためには

$$f'(b) + 4(\alpha^+ + \alpha^\times) > |\alpha^+| + |\alpha^\times| \quad (3.7)$$

であればよい。 $f'(b) = 2q - 3 \cdot 8\alpha^+$ となることに注意すれば (3.7) は

$$2q - 20\alpha^+ + 4\alpha^\times > |\alpha^+| + |\alpha^\times|$$

となる。この条件を $\alpha^+, \alpha^\times$ の値によって場合分けすると次のようになる。

- i) $\alpha^+, \alpha^\times \geq 0, \quad \alpha^+ < \frac{1}{12}q$
- ii) $\alpha^+ \geq 0, \alpha^\times < 0, \quad \alpha^\times > 3\alpha^+ - \frac{1}{4}q$
- iii) $\alpha^+ < 0, \alpha^\times \geq 0, \quad \alpha^+ < \frac{1}{8}q$
- iv) $\alpha^+, \alpha^\times < 0, \quad \alpha^\times > 2\alpha^+ - \frac{1}{4}q$

(3.8)

同様にストライプ型の平衡解 (3.2) を考えると, b の満たすべき条件は

$$f(b) + (4\alpha^+ + 8\alpha^\times)b = 0$$

であり, これを満たす b が存在するのは

$$q - (4\alpha^+ + 8\alpha^\times) > 0 \quad (3.9)$$

のときである。平衡解が安定である条件は (3.7) にここで求めた b を代入すれば (3.8) と同様に次のように求めることができる。

- i) $\alpha^+, \alpha^\times \geq 0, \quad \alpha^\times < -\frac{1}{2}\alpha^+ + \frac{1}{12}q$
- ii) $\alpha^+ \geq 0, \alpha^\times < 0, \quad \alpha^\times < -\frac{3}{4}\alpha^+ + \frac{1}{8}q$
- iii) $\alpha^+ < 0, \alpha^\times \geq 0, \quad \alpha^\times < -\frac{1}{6}\alpha^+ + \frac{1}{12}q$
- iv) $\alpha^+, \alpha^\times < 0, \quad \alpha^\times < -\frac{1}{4}\alpha^+ + \frac{1}{8}q$

(3.10)

$p=2, q=2$ のときのチェックのパターンが安定となる条件 (3.6), (3.8) とストライプのパターンが安定となる条件 (3.9), (3.10) をパラメータ $\alpha^+ \alpha^\times$ 平面に図示すると 図 1 のようになる。

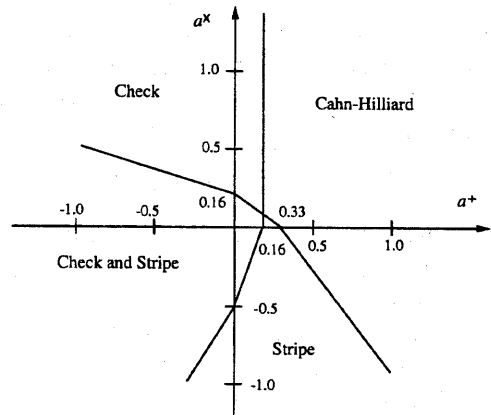


図 1 パターンの出現するパラメータの範囲
横軸 α^+ , 縦軸 $\alpha^\times$, $p=2, q=2$ のとき

4. 並列計算機を使った計算方法

離散領域 N^2 における Cahn-Hilliard 方程式 (2.3) の並列計算機を使った解の求め方について述べる。境界条件は周期境界条件 (2.5) を考える。周期境界条件を使うと領域全体の境界部分とそれぞれのプロセッサの境界部分を区別することなく同じように扱うことができる。つまり全てのプロセッサで全く同じ計算をすることで領域全体の計算をすることができる。

領域は $M \times M$ 個の格子点を含む正方領域を考える。並列化ではこの領域を並列計算機の $c \times c$ 個のブ

ロセッサに均一に割り当てる領域分割法を使う。1つのプロセッサの担当する格子点の数は $M/c \times M/c$ となる。ここでは $N = M/c$ とおく。Cahn-Hilliard 方程式は4階の微分 ($\nabla^4 u \equiv \Delta^2 u$) を含むので領域は全ての方向に対して境界部分を2列必要とする。これらのことを考えて、格子点 (i, j) における変数の値を表すベクトル $u[i][j]$ は

$$\begin{aligned} 2 \leq i, j \leq N+1 &\Rightarrow \text{領域内の点} \\ i, j = 0, 1, N+2, N+3 &\Rightarrow \text{境界上の点} \end{aligned}$$

と定義する。

Cahn-Hilliard 方程式 (2.3) を

$$\dot{u}(i, j) = H(u(i, j))$$

として、この方程式の解を台形法で求める。時間きざみの幅を Δt 、時間 $n\Delta t$ における u の値を u_n とするとき、 u_{n+1} を台形法で求めるには

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta t}{2} (H(u_n) + H(u_{n+1}))$$

をみたすような u_{n+1} を求めればよい。これは u_{n+1} を未知数とする非線形の連立方程式になっている。この解を求めるにはニュートン法を使う必要がある。上式を変形して

$$u_{n+1} - \frac{\Delta t}{2} H(u_{n+1}) - \left(u_n + \frac{\Delta t}{2} H(u_n) \right) = 0$$

とし、これを未知ベクトル $u = u_{n+1}$ の連立方程式と考えて左辺を $G(u)$ とおけば

$$G(u) = 0 \quad (4.1)$$

という連立方程式になる。(4.1) を解くためにニュートン法がつくる近似ベクトルの列を $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}, \dots$ とすれば、ニュートン法は
for $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} JG(u^{(n)}) \delta u = G(u^{(n)}) \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - \delta u \end{cases} \quad (4.2)$$

となる。ここで $JG(u)$ は G のヤコビ行列にベクトル u を代入したものである。これにより解 u を求めることができる。以下では、上記の計算の詳細部分の方法について述べる。

4.1 拡散項 Δu の計算方法

拡散項 $\Delta^+ u$ の計算方法は、(2.1) に示したように考えるのが普通である。しかし、ここではアルゴリズムを単純にするために、 u の拡散を求める次の関数 Laplacian をつくる。ただし、 $x+ = a$ は x に $x+a$ を代入することを意味するものとする。

$$\begin{aligned} &\text{Laplacian}(u, \text{start}, \text{end}, \text{lap}) \{ \\ &\quad i, j = \text{start}, \dots, \text{end} \\ &\quad \text{lap}[i][j] = 4.0 \cdot u; \\ &\quad \text{lap}[i][j-1] += u; \\ &\quad \text{lap}[i][j+1] += u; \\ &\quad \text{lap}[i-1][j] += u; \\ &\quad \text{lap}[i+1][j] += u; \} \quad (4.3) \end{aligned}$$

この関数はベクトル u を引数に取り、ベクトル lap にその拡散を出力する。 start, end は領域内にある格子点の座標の範囲を示す。つまり、領域内の格子点が $\{(i, j) \mid 2 \leq i, j \leq N+1\}$ にある場合には $\text{start} = 2, \text{end} = N+1$ とすればよい。この関数が通常の拡散 (2.1) と同じ働きをすることは明らかである。

さらに $H(u) = \Delta^+(f(u) - \Delta^+ u)$ を計算する場合には、この関数を利用して次のように新しい関数を作ることができる。

$$\begin{aligned} &H(u, \text{ans}) \{ \\ &\quad \text{Laplacian}(u, 2, N+1, \text{lap}_a); \\ &\quad i, j = 1, \dots, N+2 \\ &\quad \quad \text{lap}_b[i][j] = -\text{lap}_a[i][j]; \\ &\quad i, j = 2, \dots, N+1 \\ &\quad \quad \text{lap}_b[i][j] += f[i][j]; \\ &\quad \text{Laplacian}(\text{lap}_b, 1, N+2, \text{ans}); \\ &\quad \text{Boundary}; \} \quad (4.4) \end{aligned}$$

拡散として $\Delta^* u$ を含む場合も、同様に関数 Laplacian の中に Δ^* の効果を入れることによって容易に実現できる。Boundary については下で述べる。

4.2 境界部分の扱い方

シングルプロセッサの計算機では容易な境界部分の扱いも、並列計算機では注意を要する。簡単のため1次元の場合を例にとる。

$\Delta(f(u) - \Delta u)$ を計算することを考える。この場合 $\Delta u(i) = u(i-1) + u(i+1) - 2u(i)$ である。2次元の拡散 (Δu) の計算方法が (4.3) であることを考慮すると、1次元で境界条件を含んだアルゴリズムは関数 Laplacian を呼んだあとに

$$u(2) += u(n+2), \quad u(N+1) += u(1)$$

とするのが普通である。しかし、この方法では (4.4) のプログラム中に境界部分の足し合わせが2回現れる。これは並列計算機のプロセッサ間の通信が2回必要であることを意味する。並列計算機においては通信の量よりもその回数の方が大きなタイムロスとなることが多いので通信回数は少ない方が好ましい。関数 H (4.4) の中の2つめの Laplacian に対応する Δ^* の

計算が線形であることを考えると、関数 H の最後の部分（関数中の Boundary の部分）で

$$u(2) += u(N+2), \quad u(N) += u(0),$$

$$u(3) += u(N+3), \quad u(N+1) += u(1)$$

とすることにより境界部分を含んだアルゴリズムができる。2次元の場合には、以上のことをまわりの8個のプロセッサについて行えばよい。

4.3 連立1次方程式の解法

ニュートン法(4.2)の計算では、大型疎行列を係数とする連立1次方程式を解かなければならない。並列計算機を使うこと、係数行列が疎で非常に大きいことを考えると、この連立1次方程式の近似解を求めるには反復法を用いるのが有効である。さらにここでは分散メモリ型の並列計算機で特に速く近似解を求めることができる BiCGStab(ℓ) 法⁴⁾を解法として用いる。この解法は並列計算機への実装が容易であり、並列化の効果が大きい³⁾。さらに、BiCGStab(ℓ) 法では係数行列は任意のベクトルとの積という形でしか現れない。つまり $Ax = b$ という方程式を解く場合、 A は行列の形をしている必要はなく、任意のベクトル x との積 Ax という計算ができればよい。これをニュートン法(4.2)に適用すると、任意のベクトル x に対して G のヤコビ行列との積 $JG(u^{(n)})x$ が計算できればよいことになる。

4.4 ヤコビ行列の計算

ニュートン法(4.2)で連立1次方程式を解く部分において、関数 $G(u^{(n)})$ (4.1)のヤコビ行列と任意のベクトル x との積 $JG(u^{(n)})x$ を計算しなければならない。 $G(u^{(n)})$ の第3項は定数であり、第1項が線形であることを考えると関数 $H(u^{(n)})$ のヤコビ行列と x との積 $JH(u^{(n)})x$ が求まれば $JG(u^{(n)})x$ は

$$JG(u^{(n)})x = x - \frac{\Delta t}{2} JH(u^{(n)})x$$

と計算できる。 $JH(u^{(n)})x$ の計算に関しては、 Δ^* の計算が線形であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} JH(u^{(n)})x &= J\Delta(f(u^{(n)}) - \Delta u^{(n)})x \\ &= \Delta(Jf(u^{(n)}) - J\Delta u^{(n)})x \\ &= \Delta(f'(u^{(n)})x - \Delta x) \end{aligned}$$

とできる。このようにして関数 $JH(u^{(n)})x$ は関数 $H(u)$ を構築したときと同様の考え方で容易につくることができる。

5. 数値実験

このセクションでは数値実験の結果を示す。実験を

したのは離散型 Cahn-Hilliard 方程式(2.3)である。境界条件は周期境界条件(2.5)を使った。非線形項 $f(x)$ については $p=2, q=2$ とした。拡散係数は $\beta^+ = \beta^- = 1$ とし、 α^+, α^- をパラメータとして実験を行う。セクション3で述べたようにこの場合のパラメータとパターンとの形の関係は図1のようになると推測される。

変数の初期値は平均が0となるような乱数とし、離散空間のメッシュは 64×64 とする。計算は富士通のメッセージパッシング型並列計算機 AP1000 を使った。AP1000のプロセッサ数は64個で、プロセッサ1個が SUN S-4/2 と同程度の性能をもつ。連立1次方程式の解法には BiCGStab(ℓ) 法を使った。

図は $u(i, j) \leq 0$ の場所を黒くぬりつぶし、その他の場所は空白とした。

実験1：通常の Cahn-Hilliard 方程式

$\alpha^+ = 0.5, \alpha^- = 0.25$ として実験を行った。結果を図5.1に示す。計算には316秒を要した。

実験2：チェックのパターン

$\alpha^+ = -0.25, \alpha^- = 0.5$ として実験を行った。結果を図5.2に示す。計算には584秒を要した。

実験3：ストライプのパターン

$\alpha^+ = 0.25, \alpha^- = -1.0$ として実験を行った。結果を図5.3に示す。計算には345秒を要した。

実験4：チェックとストライプのパターンの混在

$\alpha^+ = -0.5, \alpha^- = -0.25$ として実験を行った。結果を図5.4に示す。計算には396秒を要した。

6. ま と め

非線形拡散方程式のパターン形成に必要な条件を求め、それを数値実験によって実証した。

ここで扱った方程式でチェックやストライプなどのパターンが出現する拡散のパラメータの値の範囲を $\alpha^+ \alpha^-$ 平面で求めることができた。しかしこれは離散型 Allen-Cahn 方程式の平衡点から Cahn-Hilliard 方程式の平衡点を推測したものであり、今後は Cahn-Hilliard 方程式そのものを解析することが課題である。

数値実験では並列計算機を使った Cahn-Hilliard 方程式の安定な解析方法を示した。特に、連立1次方程式を解く部分において BiCGStab(ℓ) 法を使い、反復法の性質を利用することによって並列計算機における

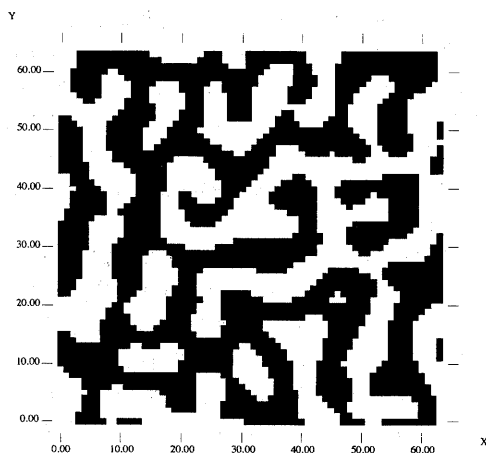


図 5.1 通常の Cahn-Hilliard 方程式
 $\alpha^+ = 0.5, \alpha^- = 0.25, T = 3.138$

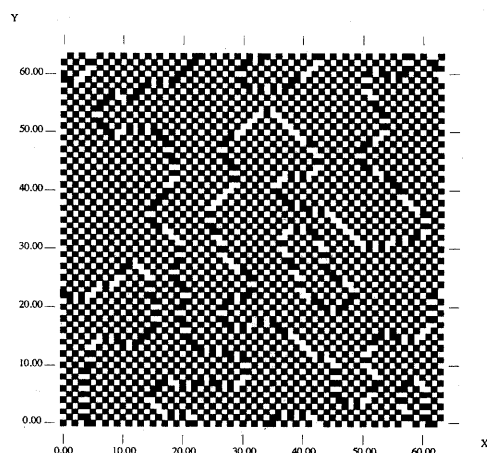


図 5.2 チェックのパターン
 $\alpha^+ = -0.25, \alpha^- = 0.5, T = 1.561$

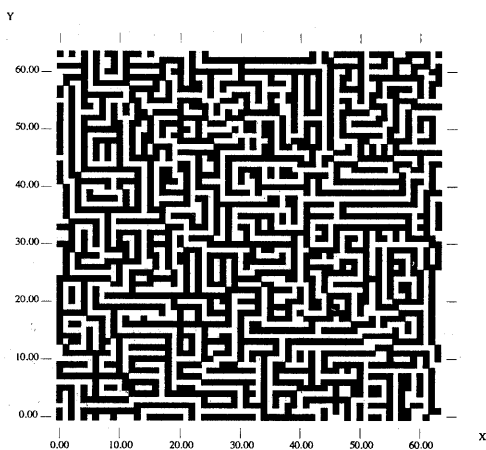


図 5.3 ストライプのパターン
 $\alpha^+ = 0.25, \alpha^- = -1.0, T = 0.1406$



図 5.4 チェックとストライプのパターンの混在
 $\alpha^+ = -0.5, \alpha^- = -0.25, T = 10.194$

方程式の解析方法を単純化することができた。

Cahn-Hilliard 方程式はパラメータの値によってさらに興味深い性質を持っている。その性質について解析することが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 降旗, 恩田, 森: Cahn-Hilliard 方程式の差分法による数値的解析, 日本応用数理学会論文誌, Vol. 3, No. 3, pp. 217-228 (1993).
- 2) J.W.Cahn, S.N.Chow and Vleck, E.: Spatially discrete nonlinear diffusion equations, *Rocky*

Mountain J. Math., Vol. 25, No. 1, pp. 87-118 (1995).

- 3) 野口, 稲津, 野寺: BiCGStab(ℓ) 法の収束特性について, 情報処理学会 HPC 研究会, Vol. 60, pp. 13-18 (1996).
- 4) SLEIJPEN, G. L. G. and FOKKEMA, D. R.: BiCG-STAB(ℓ) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum, *ETNA*, Vol. 1, pp. 11-32 (1993).
- 5) V.I.Nekorkin, V.A.Makarov, V.B.Kazantsev and M.G.Velarde: Spatial disorder and pattern formation in lattice of coupled bistable elements, *Physica D*, Vol. 100, pp. 330-342 (1997).