

2階 ILU 分解による行列の前処理とその応用について

山口 遼一[†] 野寺 隆^{††}

科学技術計算において、偏微分方程式の境界値問題を離散化することで得られる連立 1 次方程式の解法として反復法がある。特に、GMRES(m) のような反復法は係数行列が大型で疎な場合に有効な解法である。また、この解法の収束を改善する技法として行列の前処理がある。これは、元の連立 1 次方程式を数学的に等価な別の方程式に変換することで問題の性質を改善し、反復回数を減少させる方法である。本稿では、行列の前処理として、係数行列が非対称な場合に有効な不完全 LU 分解 (ILU 分解) を発展させた 2 階不完全 LU 分解 (ILU2 分解) を提案する。数値実験において、反復回数や収束時間、相対残差ノルムの変移を比較し、提案した行列の前処理 ILU2 分解の有効性を示す。

Preconditioning of 2nd order ILU decomposition and its application

RYOICHI YAMAGUCHI [†] and TAKASHI NODERA^{††}

For scientific computing, an iterative method is known as a solver of a linear system of equations, which is derived from discretizing boundary value problem of partial differential equations. In particular, the iterative method, such as GMRES(m), is effective for solving the large and sparse linear system of equations. In addition it is more effective for the use of a preconditioner, because its system is transformed to the improved system. In this paper, we proposed 2nd order ILU decomposition which is expanded ILU decomposition for the preconditioner. For numerical experiments, we show the effectiveness of proposed preconditioner with respect to iterations and computation time.

1. 序 論

物理現象を定式化すると、偏微分方程式の境界値問題に帰着する 경우가多い。このような問題は、偏微分方程式を有限差分法や有限要素法などを用いて離散近似を行うことで、次のような連立 1 次方程式：

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

に帰着できる。ただし、 A は係数行列、 b は右辺ベクトル、 x は解ベクトルである。

この式 (1) の解法にはガウスの消去法をはじめとする直接法と共役勾配法¹⁾(Conjugate Gradient method, CG 法) などの反復法がある。一般に係数行列 A が大型で疎な場合には、比較的単純な演算を繰り返しながら、ある初期値から真の解への逐次的な近似解を求める解法である反復法が有効である。また、反復法は、定常反復解法と非定常反復解法の 2 種類に分類できる。定常反復法には、ヤコビ法、ガウス・ザイデル法、SOR 法などがある。非定常反復法には、係数行列が

対称な場合には、CG 法が有効な算法の 1 つである。また、係数行列が非対称な場合には、現在さまざまな解法が提案されているが、その中でも一般最小残差法 (Generalized Minimum Residual method, GMRES 法) は有効な算法の 1 つであると言われている。ただし、GMRES 法は反復回数とともに計算量が增大してしまうため、係数行列が大規模な場合にはリスタートを行う GMRES(m) 法がよく使われる。

反復法の収束を改善する方法として行列の前処理を利用する場合がある。これは正則な前処理行列^{4),5)}(preconditioner) を用いて、式 (1) を変換することで、元の方程式の性質を改善することにより、収束までに必要な反復回数を減少させ、計算時間を短縮させる方法である。その前処理行列として代表的なものが、不完全行列分解の 1 つで係数行列が対称である場合に用いられる不完全コレスキー分解 (Incomplete Cholesky decomposition, IC 分解とも呼ばれる) である。また、係数行列が非対称である場合には ILU 分解^{5),6)}(Incomplete LU decomposition) が用いられる。さらに、行列の前処理には不完全行列分解のほかに行列分離や近似逆行列を用いた前処理の技法などがある。

本稿では ILU 分解を発展させた 2 階 ILU 分解 (ILU2 分解) による行列の前処理を提案し、GMRES(m) 法

[†] 慶應義塾大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Technology, Keio University

^{††} 慶應義塾大学理工学部
Faculty of Science and Technology, Keio University

```

1. for  $i := 1$  to  $n$  do
2.   for  $j := 1$  to  $i - 1$  do
3.      $l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{i,k} u_{k,j}))$ 
4.   endfor
5.    $l_{i,i} = 1$ 
6.   for  $j := i$  to  $n$  do
7.      $u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{i,k} u_{k,j})$ 
8.   endfor
9. endfor

```

図 1 LU 分解の算法

を用いて数値実験を行い、提案した前処理の有効性について述べる。

2. 行列の前処理

式 (1) の連立 1 次方程式における行列の前処理として左前処理と右前処理がある。左前処理とは正則行列 M を用い

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b \quad (2)$$

と変換することである。また、右前処理とは同じく正則な M を用い

$$\begin{cases} AM^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{b} \\ M^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{x} \end{cases} \quad (3)$$

と変換することである。このような行列 M を前処理行列という。この式 (2) と式 (3) の行列 M を係数行列 A に近似できるならば、式 (1) の性質を改善する可能性がある。また、この前処理行列 M を決定するときに重要なことは M の逆行列の行列ベクトル積が容易に計算できることが挙げられる。

3. 不完全行列分解

本章では、不完全行列分解に基づく行列の前処理の計算方法について述べる。

3.1 LU 分解

最初に、LU 分解について述べる。LU 分解とは行列 A を

$$A = LU \quad (4)$$

と下三角行列 L と上三角行列 U の積に分解することである。LU 分解において、行列 L または行列 U の対角成分の値を 1 と設定することで一意に決めることができる。行列 L の対角成分を 1 としたとき、すなわち行列 L が下単位三角行列のときの LU 分解を図 1 に示す。

3.2 ILU 分解

ILU 分解とは、以下のように不完全に LU 分解した

```

1. for  $i := 1$  to  $n$  do
2.    $u_{i,i} = (a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{k,i} u_{k,j}))^{\frac{1}{2}}$ 
3.   for  $j := i + 1$  to  $n$  do
4.      $u_{i,j} = \frac{1}{u_{i,i}} (a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{k,i} u_{k,j}))$ 
5.   endfor
6. endfor

```

図 2 コレスキー分解の算法

ものである。

$$A = LU + R \quad (5)$$

ただし、行列 R とは行列 A と行列 LU の差を表す誤差行列である。

LU 分解の式 (4) において行列 A が疎であっても行列 L と行列 U は一般に密行列になる。すなわち、行列 A のゼロ成分のインデックスと同じインデックスの行列 L, U の成分が非ゼロとなることがある。これをフィルインという。すなわち、ILU 分解とはこのフィルインした成分をある程度無視して、LU 分解を行うことである。

この不完全分解の仕方として行列 A の非ゼロ要素のインデックス集合を

$$G_A = \{(i, j); a_{i,j} \neq 0\} \quad (6)$$

と置き

$$G \supseteq G_A \quad (7)$$

なるインデックス集合 G を決める。そこで、行列 A を LU 分解する際に、行列 L と行列 U の要素の中で、集合 G に属するインデックスを持つもののみを計算し、他のものをゼロとすると、式 (5) における行列 L, U が求められ、前処理行列 M を

$$M = LU \quad (8)$$

とし、行列の前処理が可能となる。

4. 2 階 ILU 分解 (ILU2 分解)

4.1 2 階 IC 分解 (IC2 分解)

近年、I. E. Kaporin^{7),8)} は、係数行列が対称なときに用いる IC 分解 (図 2 を参照) を拡張した 2 階 IC 分解 (IC2 分解) を提案した。IC2 分解とは、係数行列 A を以下のように分解することである。

$$A = U^T U + U^T U_0 + U_0^T U - S \quad (9)$$

ただし、行列 U, U_0 はそれぞれ上三角行列、狭義上三角行列である。また、行列 S は 2 階における誤差行列である。さらに、この IC2 分解における前処理行列 M は次のようにとることにする。

$$M = (U + U_0)^T (U + U_0) \quad (10)$$

次に、式 (9) の成分表示をする。ただし、行列 S は簡素化のため 0 とし、行列 U_0 は狭義上三角行列としてるので $u_{i,i}^{(0)} = 0$ する。 $j \geq i$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^i (u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} u_{k,j}^{(0)} + u_{k,i}^{(0)} u_{k,j}) \\ &= u_{i,i} (u_{i,j} + u_{i,j}^{(0)}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} (u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} u_{k,j}^{(0)} + u_{k,i}^{(0)} u_{k,j}) \end{aligned}$$

よって、行列 U の対角成分は

$$u_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{k,i}^2 + 2u_{k,i} u_{k,i}^{(0)})}$$

となり、 $U + U_0$ の成分は

$$\begin{aligned} &u_{i,j} + u_{i,j}^{(0)} \\ &= \frac{1}{u_{i,i}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} u_{k,j}^{(0)} + u_{k,i}^{(0)} u_{k,j}) \right) \end{aligned}$$

となり、 $U + U_0$ が定まる。そこで、行列 U と行列 U_0 に構造的直交性を持たせ、行列 U と行列 U_0 を一意に定める。すなわち、任意の i, j に対して

$$u_{i,j} \times u_{i,j}^{(0)} = 0 \quad (11)$$

が成立するよう決定する。

この IC2 分解を非対称行列に拡張したのが、次の ILU2 分解である。

4.2 2階 ILU 分解 (ILU2 分解)

ILU2 分解とは、係数行列 A を以下のように分解することである。

$$A = LU + L_0 U + LU_0 - S \quad (12)$$

ただし、行列 L, U はそれぞれ下単位三角行列、上三角行列であり、行列 L_0, U_0 は狭義下三角行列、狭義上三角行列である。また、行列 S は 2 階における誤差行列である。さらに、式 (12) を変形すると次のようになる。

$$A + L_0 U_0 + S = (L + L_0)(U + U_0) \quad (13)$$

このような分解を行うと、通常の ILU 分解を利用する前処理行列よりも高い近似精度の前処理行列で処理されるので、頑健性の点においても優れていると考えられる。以上から、ILU2 分解における前処理行列 M を次のように構成することにする。

$$M = (L + L_0)(U + U_0) \quad (14)$$

次に、式 (12) を成分表示することにする。ただし、

S は簡素化のため 0 とする。また、行列 L は下単位三角行列より $l_{i,i} = 1$ であり、行列 L_0, U_0 は狭義三角行列より $l_{i,i}^{(0)} = u_{i,i}^{(0)} = 0$ である。 $i > j$ のとき、次のようになる。

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^j (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \\ &= (l_{i,j} + l_{i,j}^{(0)}) u_{j,j} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{j-1} (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \end{aligned}$$

このときの $L + L_0$ の成分は

$$\begin{aligned} &l_{i,j} + l_{i,j}^{(0)} \\ &= \frac{1}{u_{j,j}} \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \right) \end{aligned}$$

と表せる。さらに $i \leq j$ のとき

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \sum_{k=1}^i (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \\ &= (u_{i,j} + u_{i,j}^{(0)}) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \end{aligned}$$

となる。このときの $U + U_0$ の成分は

$$\begin{aligned} &u_{i,j} + u_{i,j}^{(0)} \\ &= a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{i,k} u_{k,j} + l_{i,k}^{(0)} u_{k,j} + l_{i,k} u_{k,j}^{(0)}) \end{aligned}$$

と同様に記述できる。以上から行列 L と行列 L_0 、行列 U と行列 U_0 は一意に定まらない。そこで、IC2 分解と同様に行列 L と行列 L_0 、行列 U と行列 U_0 に構造的直交性を持たせることで、それらの値を決定する。構造的直交性を持たせるためには任意の i, j に対して、行列 L と行列 L_0 、行列 U と行列 U_0 の同じインデックスの成分に対して

$$l_{i,j} \times l_{i,j}^{(0)} = 0, \quad u_{i,j} \times u_{i,j}^{(0)} = 0 \quad (15)$$

が成り立つように決定することである。これにより、行列 U と行列 U_0 、行列 L と行列 L_0 がそれぞれ一意に定まる。

5. GMRES(m) 法

GMRES 法は係数行列が非対称で正則な場合に有効な反復法の 1 つである。また、GMRES 法は、連立 1 次方程式を解くクリロフ部分空間法の 1 つであり、1986 年に Y. Saad ら²⁾ によって提案された方法

```

1. choose:  $x_0$ 
2.  $r_0 := b - Ax_0$ ;
3.  $\beta := \|r_0\|_2$ ;  $v_1 := r_0/\beta$ ;
4. start:
5. for  $i := 1$  to  $m$  do
6.    $\hat{v} := Av_i$ ;
7.   for  $j := 1$  to  $i$  do
8.      $h_{j,i} := (\hat{v}, v_j)$ ;
9.      $\hat{v} := \hat{v} - h_{j,i}v_j$ ;
10.  enddo
11.   $h_{i+1,i} := \|\hat{v}\|_2$ ;
12.   $v_{i+1} := \hat{v}/h_{i+1,i}$ ;
13.  compute  $y_m = \min_y \|\beta e_1 - H_m^* y\|_2$ ;
14. enddo
15.  $x_m := x_0 + V_m y_m$ ;
16. if  $\|b - Ax_m\|_2 \leq \varepsilon$  then
17.   stop iteration
18. endif
19.  $x_0 := x_m$ ;  $r_0 := b - Ax_0$ ;
20.  $\beta := \|r_0\|_2$ ;  $v_1 := r_0/\beta$ ;
21. goto start

```

図 3 GMRES(m) 法

である。

最初に初期近似解を x_0 とする。初期残差ベクトルを $r_0 = b - Ax_0$ としたとき、 m 回目の反復における残差ノルムは次式で決定することになる。

$$\min_{z \in \mathcal{K}_m} \|b - A(x_0 + z)\|_2 = \min_{z \in \mathcal{K}_m} \|r_0 - Az\|_2$$

ただし、 z はクリロフ部分空間

$$\mathcal{K}_m(A, r_0) = \{r_0, Ar_0, \dots, A^{m-1}r_0\} \quad (16)$$

上の正規直交ベクトル列

$$V_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \quad (17)$$

を使うと、 $z = V_m y$ となる。 y は残差ノルムを最小にように選ぶことになる。すなわち、次式の最小 2 乗問題を解くことになる。

$$\begin{aligned} J(y) &= \|\beta v_1 - AV_m y\|_2 \\ &= \|V_{m+1}(\beta e_1 - H_m^* y)\|_2 \\ &= \|\beta e_1 - H_m^* y\|_2 \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、 $\beta = \|r_0\|_2$ 、 $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ であり、 H_m^* はアーノルディ過程から得られる上ヘッセンベルグ行列である。一般に、式 (18) は H_m^* をギブンス回転行列で QR 分解することによって求めることができる。こうして得られた y を使うことによって、第 m 回目の近似解は

表 1 数値例 1 の結果：反復回数と計算時間

h	1/257		
Method	Iteration	Time(Sec)	Time/Iter.
CG	574	3.92	6.83×10^{-3}
ICCG	255	4.01	1.57×10^{-2}
IC2CG	180	2.29	1.27×10^{-2}

$$x_m = x_0 + V_m y \quad (19)$$

で求められる。

この GMRES 法は係数行列 A が大規模になると計算コストが増大するため、通常、クリロフ部分空間における正規直交ベクトルの本数をある小さな数 m に制限し、計算コストを減少させる GMRES(m) 法が用いられる。図 3 に GMRES(m) 法の算法を示す。

6. 数値実験

最初に、数値例 1 では IC2 分解を用いた前処理の有効性を示すため、従来の CG 法と前処理として ILU 分解を用いた CG 法との比較を行った。

数値例 2 の数値実験では、本稿で提案した ILU2 分解を用いた前処理の有効性を示すため、従来の GMRES(m) 法と前処理として ILU 分解を用いた GMRES(m) 法との比較の数値実験を行った。ただし、従来の GMRES(m) 法を GMRES(m)、ILU 前処理を施した GMRES(m) 法を ILU-GMRES(m)、ILU2 前処理の場合を ILU2-GMRES(m) とそれぞれ表記した。なお、数値実験は以下の環境と条件で行った。

- 計算機：Dell PowerEdge 1750
- OS：Red Hat Linux 7.2
- CPU：3.00 GHz \times 1 Intel(R) XEON(R)
- メモリ：4.0GB
- 収束判定条件： $\|r_m\|/\|r_0\| < 1.0 \times 10^{-12}$
- 初期値ベクトル： $x_0 = (0, 0, \dots, 0)^T$
- 最大反復回数：10000
- プログラム言語：C 言語
- 計算精度：倍精度

ベクトル r_m は第 m 回目の残差ベクトルを表す。また、計算時間に関しては clock() 関数で求めた値を秒単位で表した。

6.1 数値例 1

正方領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ における 2 次元楕円型偏微分方程式のディリクレ境界値問題を考える^(4),5)。

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} &= f(x, y) & \text{in } \Omega \\ u(x, y) &= 1.0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

この方程式をメッシュ幅は 1/257 として 5 点中心差分近似を用いて離散化し、真の解が 1.0 となるように右辺を設定し、数値実験を行った。そこで得られた連立 1 次方程式の次元は 65536 となる。係数行列 A は対称な 5 重対角行列である。

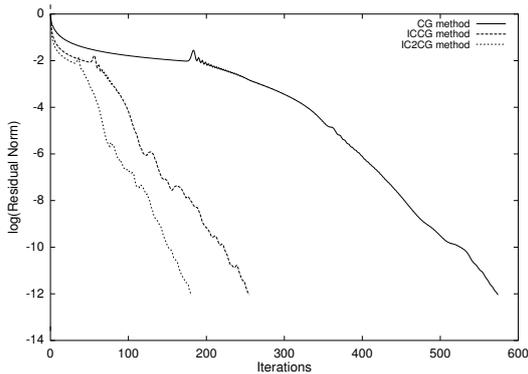


図 4 数値例 1 : CG 法における反復回数と相対残差ノルムの変移 ($1/257$)

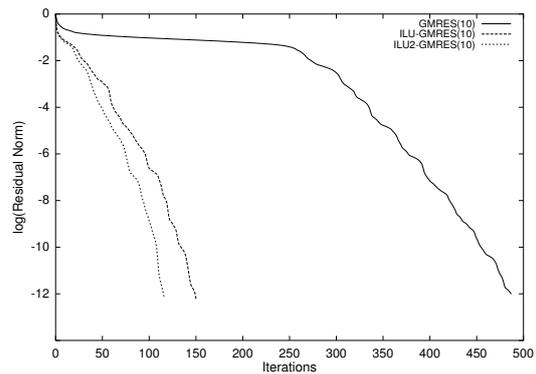


図 6 数値例 2 : GMRES(10) 法における反復回数と相対残差ノルムの変移 ($Dh = 2^0$)

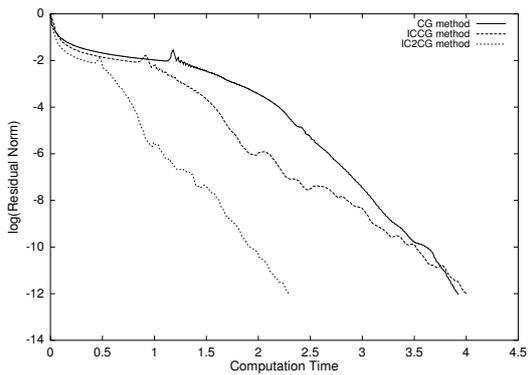


図 5 数値例 1 : CG 法における計算時間と相対残差ノルムの変移 ($1/257$)

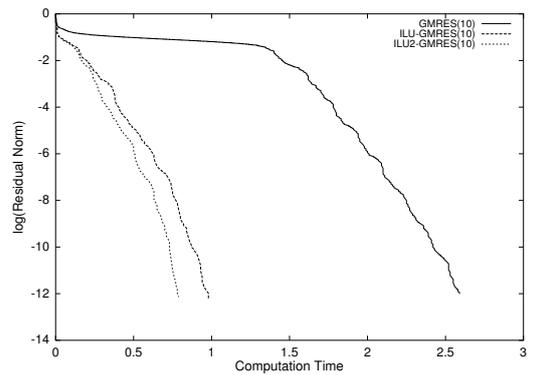


図 7 数値例 2 : GMRES(10) 法における計算時間と相対残差ノルムの変移 ($Dh = 2^0$)

表 1 においては IC2 分解と IC 分解を用いた前処理を施した CG 法と前処理を施さない CG 法との比較として反復回数と計算時間, 1 反復ごとの計算時間を表した. この結果から, IC2 分解を用いた前処理を施した CG 法は反復回数や計算時間の面で短縮が見られた.

図 4 では CG 法, ICCG 法, さらに IC2CG 法の比較のため, 反復回数と相対残差ノルムの変移をグラフで示した. また図 5 では同じく CG 法, ICCG 法, さらに IC2CG 法の比較のため, 計算時間と相対残差ノルムの変移をグラフで示した. これらのグラフから読み取れるように IC2 分解を用いた前処理を施した CG 法は反復回数や計算時間の短縮が見られた.

6.2 数値例 2

正方領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ における 2 次元楕円型偏微分方程式の境界値問題を考える³⁾.

$$\begin{aligned} -u_{xx} - u_{yy} + D(u_x + u_y) &= f(x, y) & \text{in } \Omega \\ u(x, y) &= 1.0 & \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

この方程式のメッシュ幅を $1/129$ として, 5 点中心差分近似を用いて離散化し, 真の解が $u(x, y) = 1.0$ と

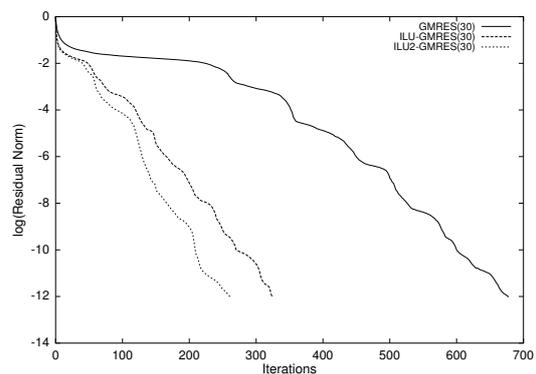


図 8 数値例 2 : GMRES(30) 法における反復回数と相対残差ノルムの変移 ($Dh = 2^{-2}$)

なるように右边を設定し, 数値実験を行った. そこで得られた連立 1 次方程式の次元は 16384 となる. また, $Dh = 2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}$ の 4 通りで変化させ, リスタート周期は 10, 20, 30 の 3 通りで行った. また, 反復回数に関しては, GMRES(m) 法のなかのアーノルディ過程の 1 反復につき 1 回と数えた.

表 2 数値例 2 の結果：反復回数と計算時間 ($h = 1/129$)

Dh	2^0		2^{-1}		2^{-2}		2^{-3}	
	Iteration	Time(Sec)	Iteration	Time(Sec)	Iteration	Time(Sec)	Iteration	Time(Sec)
GMRES(10)	487	2.63	441	2.39	556	3.01	1222	6.72
ILU-GMRES(10)	150	0.99	<u>173</u>	<u>1.15</u>	193	1.32	187	1.24
ILU2-GMRES(10)	116	0.78	<u>186</u>	<u>1.27</u>	179	1.22	165	1.12
GMRES(20)	659	5.78	621	5.45	516	4.52	632	10.79
ILU-GMRES(20)	157	1.56	290	2.97	286	2.91	261	<u>2.63</u>
ILU2-GMRES(20)	112	1.12	197	2.00	250	2.52	259	<u>2.72</u>
GMRES(30)	-	-	-	-	678	8.53	624	8.03
ILU-GMRES(30)	87	1.17	257	5.22	324	4.29	<u>240</u>	<u>3.25</u>
ILU2-GMRES(30)	62	0.83	164	2.22	261	3.52	<u>287</u>	<u>3.92</u>

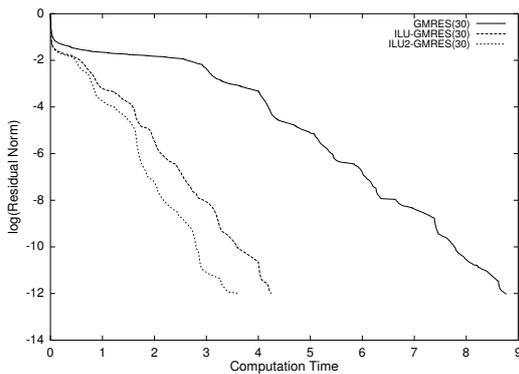


図 9 数値例 2: GMRES(30) 法における計算時間と相対残差ノルムの変移 ($Dh = 2^{-2}$)

表 2 においては ILU2 分解と ILU 分解を用いた前処理を施した GMRES(m) 法と前処理を施さない GMRES(m) 法との比較を反復回数と計算時間で表した。結果、下線の箇所が反復回数や計算時間が ILU 分解を用いた前処理より ILU2 分解を用いた前処理のほうが減少せず、増加した。しかしながら、ほとんどの箇所では ILU2 分解を用いた前処理を行った方が反復回数や計算時間が短縮された。

図 6 では、 $Dh = 2^0$ における GMRES(10) 法の反復回数と相対残差ノルムの変移をグラフで示した。また図 7 では同じく $Dh = 2^0$ における GMRES(10) 法の計算時間と相対残差ノルムの変移をグラフで示した。これらのグラフから読み取れるように $Dh = 2^0$ における GMRES(10) 法は ILU 分解を用いた前処理に比べ、ILU2 分解を用いた前処理を行った方が反復回数、計算時間両方とも減少している。

同様に図 8 では $Dh = 2^{-2}$ における GMRES(30) 法の反復回数と相対残差ノルムの変移をグラフで示した。また図 9 では同じく $Dh = 2^{-2}$ における GMRES(30) 法の計算時間と相対残差ノルムの変移をグラフで示した。これらのグラフからも同様に $Dh = 2^{-2}$ における GMRES(30) 法は ILU 分解を用いた前処理に比べ、ILU2 分解を用いた前処理を行った方が反復回数、計算時間の両面で減少している。

7. 結論と今後の課題

本稿では、非対称な係数行列を持つ連立 1 次方程式に対して 2 階の不完全 LU 分解に基づく行列の前処理を提案し、その有効性について述べた。

今後の課題としては今回用いた数値例は基礎的なものであるためこの数値例の充実を行いたい。

参考文献

- 1) Hestenes, M. R. and Stiefel, E.: Method of conjugate gradients for solving linear systems, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, Vol. 49, pp. 409–436, (1952).
- 2) Saad, Y. and Schultz, M. H.: GMRES: A generalized minimal residual algorithms for solving nonsymmetric linear equations, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 7, pp. 856–869, (1986).
- 3) Joubert, W: Lanczos methods for the solution of nonsymmetric systems of linear equations, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, 13, pp.928–1290, (1992).
- 4) Barrett, R. et al.: Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods, *SIAM*, (1994).
- 5) Bruaset, A. M.: A survey of preconditioned iterative methods, *Longman Science & Technical*, (1995).
- 6) Saad, Y.: Iterative methods for sparse linear systems, *PWS Publishing Company*, Boston, (1996).
- 7) Kaporin, I. E.: High quality preconditioning of a general symmetric positive definite matrix based on its $U^T U + U^T R + R^T U$ -decomposition, *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. 5, pp. 483–509, (1998).
- 8) Kaporin, I. E.: Using the modified 2nd order incomplete Cholesky decomposition as the conjugate gradient preconditioning, *Numer. Linear Algebra Appl.*, Vol. 9, pp. 401–408, (2002).