

不完全コレスキー分解前処理に関するオーダリングの新評価法

岩下 武史[†] 島崎 真昭^{††}

クリロフ部分空間反復法の代表的な前処理手法である不完全 LU 分解前処理は、未知数のオーダリングの影響を受けることが知られている。著者らは最近、これらのオーダリングが前処理効果に及ぼす影響を簡単に評価する評価指標を提案した。本論文では、前処理効果の見積もりが難しいと考えられている非構造解析において、評価指標を提示することを試みる。本評価指標は Remainder matrix のノルムと限定された条件の下で相関関係を持ち、ILU 分解と同程度の計算量で追加的なメモリ量をほとんど必要とすることなく計算される。Matrix market より入手した行列データ、ポアソン方程式の差分解析、3 次元電磁場解析を例に取り、本手法の有効性について検証する。

New Evaluation Method of Ordering in Incomplete Cholesky Preconditioning

TAKESHI IWASHITA[†] and MASAAKI SHIMASAKI^{††}

It is well known that ordering of unknowns greatly affects convergence in Incomplete LU (ILU) factorization preconditioned iterative methods. The authors recently proposed a simple evaluation way for orderings in ILU preconditioning. The present paper introduces the evaluation method in unstructured analyses in which the effect of preconditioning is not easily estimated. The evaluation index, which has a simple relationship with a matrix norm of a remainder matrix, is easily computed without additional memory requirement. The computational cost of the index is about the same as that of ILU factorization. The effectiveness of the method is examined by numerical tests using coefficient matrix data from Matrix Market, a finite-different analysis of Poisson equation, and a 3-d electromagnetic field analysis.

1. はじめに

連立一次方程式の反復解法において重要な前処理技術の一つに不完全 LU (ILU) 分解前処理¹⁾がある。不完全 LU 分解前処理では、未知変数の順序が前処理の効果に大きな影響を与えることが知られている。例えば、未知変数の順序 (オーダリング) により当該の前処理付き反復法における反復回数が 2 倍程度に増加するような場合もある。一方、ILU 分解前処理では、並列処理を行うために未知変数の順序を入れ替えるリオーダリング手法が研究されてきた²⁾。そこでこうした背景から、オーダリングと前処理効果の関係について古くから検討が行われてきた³⁾。

ILU 分解前処理におけるオーダリングの影響に関する研究では、従来差分法における節点オーダリングを対象としたものが中心であった。その初期的なものとして、Duff, Meurant による研究がある⁴⁾。彼らは同研究において、ILU 分解前処理付き反復法の収束性がオーダリングの影響を受けることを示し、前処理効果を計る方法として、Remainder matrix $R = M - A$ のノルムを用いること

を提案した。ここで、 M は前処理行列で A は係数行列である。次に、この Duff らの研究に続いて、土肥, Lichtenwsky, 鷲尾らは Incompatible node に注目した一連の研究を行った⁵⁾⁶⁾。これらの一連の研究では、詳細な解析的分析、数値計算結果を示し、Incompatibility ratio とよぶオーダリングの評価指標を提案した。Incompatibility ratio は定められた差分格子の節点オーダリングに対して一意に決定される値で、簡単な計算で導出することができる。次に、著者らは最近、S.R.I. (Simple Remainder Index) と呼ぶ新たな節点オーダリングの評価指標を提案した⁷⁾。同指標は全節点の影響を考慮する評価指標であり、Incompatibility ratio と同様に節点オーダリングに対して一意に決定され、簡単な計算で導出することができる。

上記の節点オーダリングに関する研究に対して、一般の非構造型解析におけるランダムスパース行列を係数とする連立一次方程式に関する研究では、オーダリングを評価する方法は殆ど研究されていない。実用上の解析では、差分解析よりもこれらの非構造型解析の方がむしろ多く用いられており、重要な課題であるといつてよい。実際、ランダムスパース行列に対して節点オーダリングを拡張した場合、その拡張手法はバリエーションが豊富であり、これらを検査する方法が必要とされている。しかしながら殆ど研究が進展していないのは、こうした非構

[†] 京都大学学術情報メディアセンター

Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University

^{††} 京都大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Kyoto University

造型の解析の場合，問題個々の影響が大きく，統一的な議論が難しいためと考えられる．本研究では，このような課題の困難さを考慮しつつ，ある程度の幅を許容して，ランダムスパース係数行列に対するオーダリングの評価手法の提案を試みる．

ランダムスパース係数行列に対するオーダリングの評価のための基礎として，上記の Duff らの Remainder matrix を用いる．Remainder matrix による分析では，例えばフロベニウスノルムを用いた例が報告されている⁴⁾．しかし，実際に Remainder matrix のフロベニウスノルムを導出するには多大なメモリ空間と計算量が要求され現実的でない．そこで，著者らは最近，P.R.I.(Precise Remainder Index) と呼ぶ新たな評価指標を提案した．同指標は Remainder matrix の計算過程に注目し，ある特定の条件の下で Remainder matrix のノルムと簡単な相関関係が取れるようにしたものである．P.R.I. はその定義については文献 7 において既報であるが，その有用性については検証されていない．そこで，本論文では，対称な行列に対する不完全 LU 分解前処理である不完全コレスキー分解前処理を対象として，P.R.I. の有用性について検討を行う．

2. 不完全 LU 分解前処理

本論文では，次のような n 元連立一次方程式を解くものとする．

$$Au = f \quad (1)$$

ここで，本論文の数値解析では係数行列 A が正値対称な場合を考えるが，手法の説明についてはより一般的に非対称な場合を含めた形で行う．

連立一次方程式 (1) を反復解法により解く場合，前処理³⁾ と呼ばれる操作がよく用いられる．これは解くべき方程式を

$$(K_1^{-1}AK_2^{-1})(K_2u) = K_1^{-1}b \quad (2)$$

のように変換し，係数行列の条件数などを改善することにより，反復解法の収束性を高めるものである．ここで， $M = K_1K_2$ は前処理行列と呼ばれる．ILU 分解前処理の場合，前処理行列は，

$$M = LD^{-1}U \quad (3)$$

のように与えられる．但し， L ， D および U はそれぞれ下三角行列，対角行列，上三角行列である．ここで， L ， D ， U は係数行列 A を ILU 分解することにより得られ，

$$A = (LD^{-1}U) - R_{ilu} \quad (4)$$

を満たす．ただし， R_{ilu} は分解中に棄却されるフィルインにより構成される行列である．

ILU 分解前処理の適用は，反復中で前進代入計算

$$y = L^{-1}r \quad (5)$$

および後退代入計算

$$z = U^{-1}Dy \quad (6)$$

を行うことで与えられる．

3. 新しいオーダリングの評価法

3.1 Remainder matrix

反復法における前処理効果を定量的に計る方法として，例えば，前処理後の係数行列 $K_1^{-1}AK_2^{-1}$ の条件数や固有値分布を調べることが考えられる．しかし，固有値解析は一般に計算コストが多である．そこで，Duff らは前処理の効果を次式で定義される Remainder matrix のノルムで評価することを提案した．

$$R = M - A \quad (7)$$

Remainder matrix のノルムが小さいほど前処理効果が大きいと判断される．ILU 分解前処理では，

$$R = R_{ilu} \quad (8)$$

が成り立ち，文献 4 では ILU 分解前処理におけるオーダリングの影響について Remainder matrix のフロベニウスノルムによる分析が行われている．しかし，一般のランダムスパース行列を対象とした ILU 分解前処理においては，Remainder matrix の導出やそのフロベニウスノルムの計算には，当該の連立一次方程式の求解と比べて無視できないメモリ量や計算量が必要となる．従って，同手法を個々の問題やオーダリングの評価に用いることは現実的ではない．

3.2 P.R.I.

本小節では，著者らが最近提案した P.R.I.(Precise Remainder Index) について述べる．まず，ILU 分解における Remainder matrix について考える．係数行列 A に書きする ILU 分解のアルゴリズムは図 1 のように与えられる．ここで，仮に Remainder matrix を計算するとすれば，ILU 分解中に図 1 中の“ R の計算”で示された部分を加えることで行うことができる．ここで，ある $r_{j,k}$ 要素について考えると，係数行列の非ゼロパターンによって数回の更新が行われるが，これらの更新量は必ずしも同じ(同符号)ではない．従って，Remainder matrix の全要素を正しく求めるとすると，棄却されたフィルインの場所に比例したメモリ量が必要となる．そこで，P.R.I. による評価では，これらの更新量(フィルインの棄却量)の絶対値の総和を P.R.I. 値として評価指標とする⁷⁾．このとき，P.R.I. の値は ILU 分解中に一つの変数(図 1 中の I_{rp})を用いて計算できる．従って，付加的に必要なメモリ量はほとんどない．また，計算量は係数行列の非ゼロパターンに依存するが，ILU 分解自体とほぼ同程度と考えられ，反復部の計算量と比べてずっと小さい．

3.3 様々な前処理に対する拡張した P.R.I.

不完全分解前処理では，分解中にピボットの絶対値が非常に小さな値となり，分解が破綻する場合がある．そこで実用的な解析では，前処理行列の作成の際に係数行列に何らかの修正を行い，その修正された係数行列に不完全分解を行って前処理行列を作成する手法が広く行われている¹¹⁾¹²⁾．このとき，修正項を $A_{\Delta m}$ とすると，

$$A + A_{\Delta m} = (L_m D_m^{-1} U_m) - R_{ilum} \quad (9)$$

```

R = O
Irp = 0
for I = 1 to n - 1
  for J = I + 1 to n
    for K = I + 1 to n
      if  $\bar{a}_{J,I} \neq 0 \ \& \ \bar{a}_{I,K} \neq 0 \ \& \ \bar{a}_{J,K} \neq 0$  then
         $\bar{a}_{J,K} = \bar{a}_{J,K} - \bar{a}_{J,I} * \bar{a}_{I,K} / \bar{a}_{I,I}$ 
        // (ILU 分解)
      endif
      if  $\bar{a}_{J,I} \neq 0 \ \& \ \bar{a}_{I,K} \neq 0 \ \& \ \bar{a}_{J,K} = 0$  then
         $r_{J,K} = r_{J,K} + \bar{a}_{J,I} * \bar{a}_{I,K} / \bar{a}_{I,I}$ 
        // (R の計算)
         $I_{rp} = I_{rp} + |\bar{a}_{J,I} * \bar{a}_{I,K} / \bar{a}_{I,I}|$ 
        // (P.R.I. の計算)
      endif
    end for
  end for
end for

```

図 1 ILU 分解アルゴリズム, Remainder matrix の導出, P.R.I. の導出

Fig.1 Algorithm of ILU factorization with determining remainder matrix and P.R.I.

のように分解される。このとき, Remainder matrix R_m は,

$$R_m = R_{ilum} + A_{\Delta m} \quad (10)$$

で与えられる。そこで, このような前処理行列に対する P.R.I. 値 I_{rpm} を以下のように定義する。

$$I_{rpm} = I_{rp0} + \|A_{\Delta m}\|_A \quad (11)$$

ここで, I_{rp0} は ILU 分解において図 1 に示されるアルゴリズムで決定される P.R.I. の値で, R_{ilum} に対応する。また, $\|\cdot\|_A$ は全要素の絶対値の和を表し, 行列ノルムの性質を満たす¹³⁾。

次に, ILU 分解において Fill-in を考慮した ILU(l) について考える。フィルインを考慮した場合も, 前処理行列は (4) の形で表され, Remainder matrix は ILU(0) 前処理と同様に棄却した Fill-in で構成される。従って, P.R.I. 値は ILU(0) 前処理と同様に Fill-in を棄却する度にその量の絶対値を総和することにより求められる。

P.R.I. と Remainder matrix の間には, 係数行列が対称で, かつ対角要素の符号が全て同一であった場合, 棄却される Fill-in の符号が全て等しくなるため,

$$\|A\|_A = P.R.I. \quad (12)$$

が成り立つ。

4. 数値実験

4.1 テスト問題と実行計算環境

本解析では, Matrix market より入手した 2 種の係数行列データ, ポアソン方程式の差分解析, 渦電流場解析 (有限要素法) の 4 種の連立一次方程式をテスト問題とする。これらの連立一次方程式の求解法には ICCG 法またはシフト付き ICCG 法を用いる。収束判定基準として, 右辺ベクトルと残差ベクトルの 2-ノルム比が 10^{-7} 以下

表 1 S1RMQ4M1(Matrix market) の係数行列データ
Table 1 Coefficient matrix of S1RMQ4M1 from Matrix market

Number of unknowns	5489
Number of entries	143300*2
Number of nonzero entries	262411
Band width	192
Max eigenvalue	6.874×10^5
Min eigenvalue	3.80×10^{-1}
Condition number	1.81×10^6

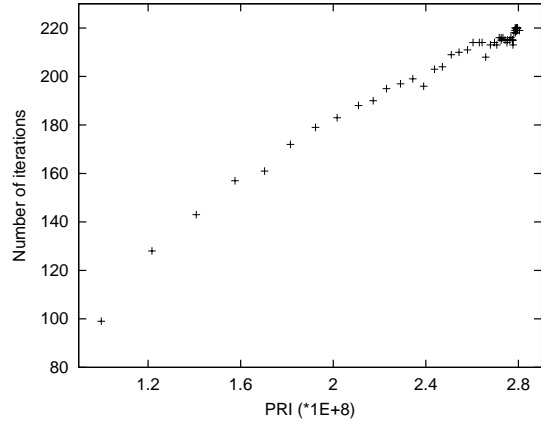


図 2 反復回数と P.R.I. の関係 (Matrix market データ 1)
Fig.2 Relationship between number of iterations and P.R.I.

となる条件を用いる。解析は京都大学学術情報メディアセンターの Fujitsu HPC2500 上で FORTRAN を使用して行った。最適化オプションは-O5 を指定した。解析では, 評価指標 P.R.I. と反復回数の相関についてランダムオーダリングを用いて評価する。ここでランダムオーダリングは以下のようにして作成した。まず, 今回テストに選んだ行列データは比較的バンド幅が小さく, RCM オーダリングや辞書式順序付け法に近い形の行列データをオリジナルの形で持っている。そこで, 元のオリジナルのオーダリングからそのうちの一部 (0% から 100% まで 2 ポイント刻み) をランダムに入れ替え, それにより生成した 51 個のオーダリングを評価に用いることとする。

4.2 Matrix market 内のデータ (1)

本小節では, Matrix market より取得したセット名 CYLSHELL の S1RMQ4M1 を対象とした場合の結果を示す。本セットは, Shell 要素による構造解析の問題を扱った有限要素解析において生ずる係数行列である。ここで扱うデータは構造型の四辺形要素を用いた場合である。係数行列に関する諸データを表 1 に示す。

図 2 に本解析における反復回数と P.R.I. の関係を示す。また, 図 3 にオリジナルな順序付けの場合の残差ベクトルの振る舞いを示す。図 2 中で P.R.I. と反復回数にはかなり強い相関がみられ, 本係数行列の場合, P.R.I. により前処理効果について評価をすることが可能であることがわかる。本データの場合, 反復回数と P.R.I. の相関係数は 0.86 と高い数値を得た。

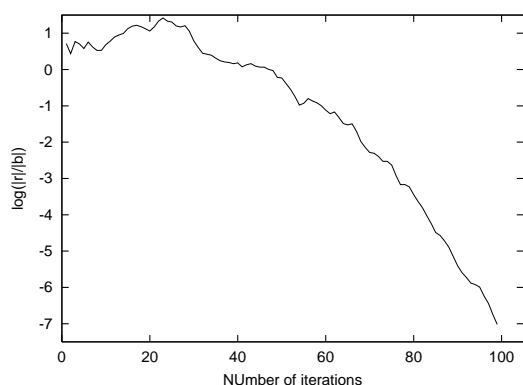


図 3 残差の収束過程 (Matrix market データ 1)

Fig. 3 Convergence behavior of residual vector (Matrix market data 1)

4.3 Matrix market 内のデータ (2)

本小節では、前小節と同じく Matrix market より取得したセット名 CYLSHELL の係数行列データを用いる。ここでは、三角形要素による有限要素解析から得られた S3RMT3M1 データを対象とする。係数行列に関する諸データを表 2 に示す。

図 4 に本解析における反復回数と P.R.I. の関係を示す。また、本解析において相関係数を計算した結果、0.81 の値を得た。本解析のデータでは、比較的高い相関係数が得られたものの、図 4 によると、オーダリングのランダム性が高い部分 (P.R.I. 値が相対的に高い所) において反復回数にばらつきが見られる。一方、オリジナルデータ (辞書式順序付けまたは RCM オーダリング) に近い所では、高い精度で前処理効果の見積もりができています。そこで、図 5 にオリジナルデータ及び P.R.I. 値が同程度でありながら反復回数の隔たりが大きい 2 種のランダムオーダリングにおける収束の過程を示す。前小節の結果と比較すると、今回のデータでは収束の過程において多くのスパイクが見られることが分かる。また、2 種のランダムオーダリングは全体の 2% の未知変数の順序が違うのみであり、収束過程は似たような傾向を示している。例えば、収束判定基準として残差ベクトルと右辺ベクトルのノルム比を 10^{-6} 以下とした場合には、両者の反復回数はほとんど同じになる。従って、収束過程の大きな傾向は P.R.I. によりある程度見積もることができていると考えられる。しかしながら、本データのように非構造的な強いといえる三角形要素の場合や、オリジナルデータによる収束の過程にスパイクが多く含まれている場合には、P.R.I. による評価にはある程度の誤差を許容せざるを得ない。スパイクの位置は丸め誤差の集積など実装依存の部分があり、現実的に予想することは難しく、実際に反復法を実行することなく反復回数を見積もるという観点では、許容せざるを得ない誤差範囲といえる。

4.4 2 次元ポアソン方程式の差分解析

本小節では、以下の 2 次元ポアソン方程式の 5 点差分

表 2 S3RMT3M1(Matrix market) の係数行列データ

Table 2 Coefficient matrix of S1RMQ4M1 from Matrix market

Number of unknowns	5489
Number of entries	112505*2
Number of nonzero entries	217669
Band width	192
Max eigenvalue	9.67×10^3
Min eigenvalue	3.90×10^{-7}
Condition number	2.48×10^{10}

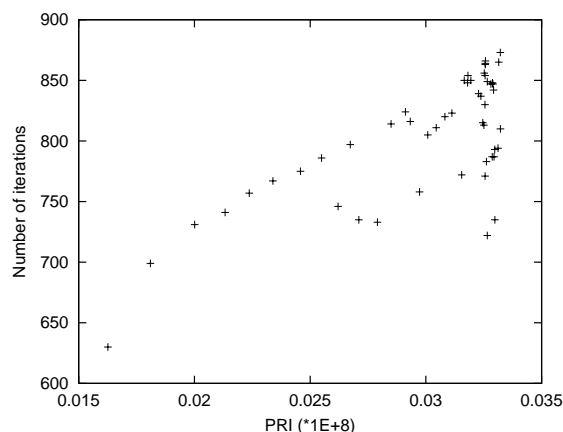


図 4 反復回数と P.R.I. の関係 (Matrix market データ 2)

Fig. 4 Relationship between number of iterations and P.R.I.

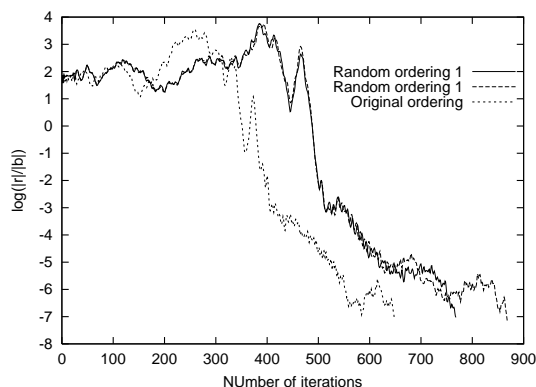


図 5 残差の収束過程 (Matrix market データ 2)

Fig. 5 Convergence behavior of residual vector (Matrix market data 2)

解析を対象とする。

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\kappa \nabla u) &= f & (13) \\
 \text{in } \Omega(0, 1) \times (0, 1) \\
 u(x, y, z) &= 0 \text{ on } \delta\Omega \\
 \text{if } \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \&\frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4} \right) \text{ then} \\
 \kappa &= 100.0 \\
 \text{else } \kappa &= 1.0
 \end{aligned}$$

ここで f は、節点を辞書式順序付けで並べた場合の節点番号を i_d として、 $0.5 \sin(i_d + 1)$ とする。また、差分格子として 100×100 の格子を用い、オリジナルな順序

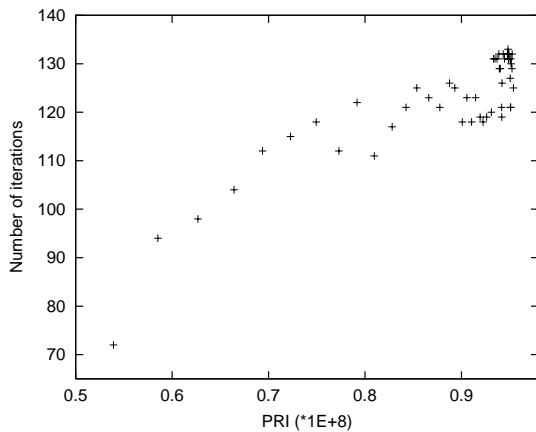


図 6 反復回数と P.R.I. の関係 (ポアソン方程式の差分解析)
Fig. 6 Relationship between number of iterations and P.R.I. (Finite difference analysis of Poisson equation)

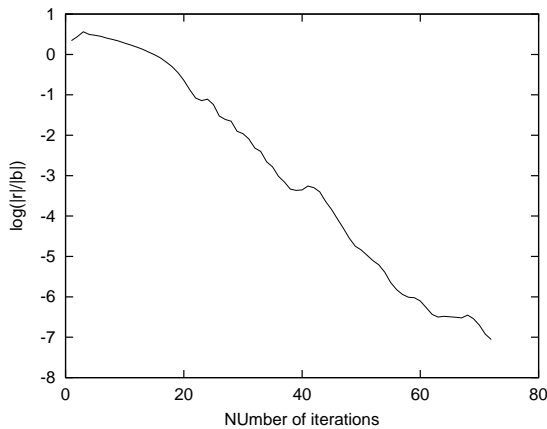


図 7 残差の収束過程 (ポアソン方程式の差分解析)
Fig. 7 Convergence behavior of residual vector

付けは辞書式順序付けとする。

図 6 に本解析における反復回数と P.R.I. の関係を示す。また、図 7 に辞書式順序付けの場合の残差の振る舞いを示す。図 6 において、オリジナルデータの場合に特に高い前処理効果を得ているが、全体として相関が見られ、P.R.I. による前処理効果の見積もりが可能であることを示している。

4.5 3次元渦電流解析 (辺要素有限要素法)

本小節では、電磁場解析の一種である 3次元渦電流場の解析を対象とする。解析対象内の電磁界を記述する方程式は、マクスウェル方程式において変位電流の項を無視することにより与えられる。本解析では、辺要素を使用し、磁気ベクトルポテンシャルのみによる定式化を行う A-法を用いるので、支配方程式は次式で与えられる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}_m) = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}_m}{\partial t} + \mathbf{J}_0 \quad (14)$$

ここで、 \mathbf{A}_m は磁気ベクトルポテンシャル、 \mathbf{J}_0 は強制電流の電流密度、 ν は磁気抵抗率、 σ は導電率を表す。磁気ベクトルポテンシャルをベクトル補間関数により近似展

開し、式 (14) にガラーキン法を適用することにより、次式が得られる。

$$[K]\{A_m\} + [M] \frac{\partial \{A_m\}}{\partial t} - \{J\} = 0 \quad (15)$$

ここで、 $\{A_m\}$ は未知変数 A_{mi} からなる列ベクトルを表す。 $[K]$ 、 $[M]$ は行列、 $\{J\}$ は列ベクトルを表し、以下のようになら与えられる。

$$K_{ij} = \sum_e \iiint_e (\nabla \times \mathbf{N}_i) \cdot (\nu \nabla \times \mathbf{N}_j) dV \quad (16)$$

$$M_{ij} = \sum_e \iiint_e \sigma \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j dV \quad (17)$$

$$J_i = \sum_e \iiint_e \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{J}_0 dV \quad (18)$$

ここで、 e は各要素、 m は全要素数、 N はベクトル補間関数を表す。未知変数の総数を n として、行列 $[K]$ 、 $[M]$ は n 次正方形行列、 $\{A_m\}$ および $\{J\}$ は n 次元ベクトルである。式 (15) 中の時間微分項を後退差分法により解くと、

$$[Q]\{A_m\} = \{b\} \quad (19)$$

但し、

$$[Q] = ([K] + \frac{1}{\Delta t}[M]), \quad (20)$$

$$\{b\} = \frac{1}{\Delta t}[M]\{A_{mold}\} + \{J\} \quad (21)$$

の連立一次方程式が得られる。ここで、本稿では解析対象として電気学会 3次元渦電流解析モデル¹⁴⁾を用いる。表 3 に解析の諸元を示す。本解析では、解析領域中に非導電性の部分 (空気領域) が含まれるため、係数行列 $[Q]$ は半正定値となる。

本解析では、時間発展問題のある 1ステップを対象として P.R.I. と前処理効果について調べる。本解析のような辺要素を用いた電磁場解析では、係数行列は正値性を失っている場合がほとんどあり、ILU(0) 前処理をそのまま用いることができず、シフト付き ICCG 法が用いられる。そこで、P.R.I. の評価値として、3.3 節で述べた値を用いることとする。

図 8 に 2 回の試行による反復回数と P.R.I. の相関を示す。Test 1 の結果は PC 上で行った予備的な実験の結果で Test 2 は他の解析結果と同じく HPC2500 上での結果である。両者の違いは乱数の生成部分のみである。Test 1 の結果では、反復回数と P.R.I. に強い相関が見られ、P.R.I. が評価指標として有効であることを示している。一方、Test 2 の結果では、P.R.I. により予想される反復回数よりも多くの反復回数を要する場合が散見される。このような現象は追加的に行った PC 上での数値実験でも見られ、実装計算機によるものではなく、乱数の系列によるものである。本現象については、Matrix market データの解析時のような収束曲線のスパイクによるもの

表 3 3次元渦電流解析の諸元

Table 3 3-d eddy-current analysis test model

Number of unknowns	1011920
Number of edge elements	327680
Number of nodes	342225

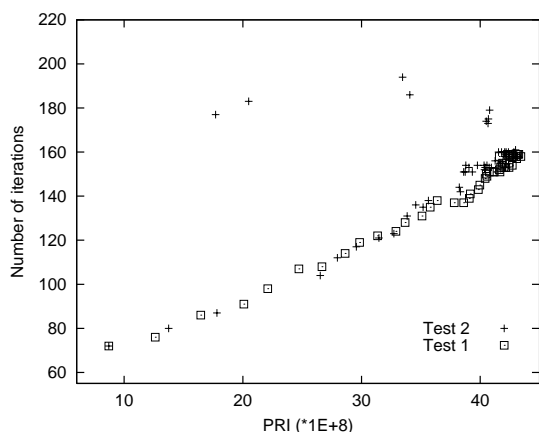


図 8 反復回数と P.R.I. の関係 (3次元渦電流解析)

Fig. 8 Relationship between number of iterations and P.R.I.(3-d eddy-current analysis)

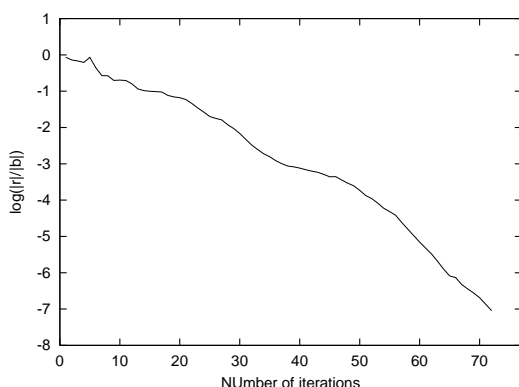


図 9 残差の収束過程 (3次元渦電流解析)

Fig. 9 Convergence behavior of residual vector

ではないことが確認されており (図 9 参照), 現在の所その原因については明らかになっておらず, 今後の課題である. しかしながら, このような特異的な振る舞いを示したオーダリングを除くと, 2 回の試行の結果は高い一致度を示しており, P.R.I. と反復回数の相関性も高い. 従って, 本解析においても P.R.I. は前処理効果の見積もりとして有用性があると考えられる.

5. おわりに

本論文では, ILU 分解前処理におけるオーダリングによる影響について, P.R.I. と呼ぶ評価指標を導入し, その有効性について調べた. Matrix market によるデータ, 2次元ポアソン方程式の差分解析, 3次元渦電流解析による数値計算を行った結果, ある程度のばらつきがあるものの全体として評価指標と反復回数間に相関が見られ

た. これらの結果から, 本評価指標は 3.3 節で述べたような様々なパラメータを伴う ILU 分解系前処理の自動パラメータ決定や, より有効性の高いオーダリングの自動決定などに有効性があると考えられ, 今後の課題として検討をしていきたいと考えている.

本研究の一部は, 日本学術振興会 科学研究費補助金 (若手研究 (B), 課題番号 16700060) の助成を受けている.

参考文献

- 1) J. Meijerink and H. A. van der Vorst, "An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix Is a Symmetric M-matrix," *Mathematics of Computation*, 31, (1977), pp. 148-162.
- 2) H.A. van der Vorst and T.F. Chan, "Parallel Preconditioning for Sparse Linear Equations", *ZAMM. Z. angew. Math. Mech.*, 76 (1996), pp. 167-170.
- 3) Y. Saad, "Iterative Methods for Sparse Linear Systems", Second ed., SIAM, Philadelphia, PA, 2003.
- 4) I. S. Duff and G. A. Meurant, "The Effect of Ordering on Preconditioned Conjugate Gradients", *BIT*, 29, (1989), pp.635-657.
- 5) S. Doi and A. Lichniewsky, "A Graph-Theory Approach for Analyzing the Effects of Ordering on ILU Preconditioning," INRIA report 1452, (1991).
- 6) S. Doi and T. Washio, "Ordering Strategies and Related Techniques to Overcome the Trade-off Between Parallelism and Convergence in Incomplete Factorization", *Parallel Computing*, 25, (1999), pp. 1995-2014.
- 7) T. Iwashita, Y. Nakanishi, and M. Shimasaki, "Comparison criteria for parallel orderings in ILU preconditioning", *SIAM J. Sci. Comput.*, to appear.
- 8) M. T. Jones and P. E. Plassmann, "The Efficient Parallel Iterative Solution of Large Sparse Linear Systems," *Graph Theory and Sparse Matrix Computations*, IMA, 56, (1994), pp. 229-245.
- 9) 襲田 勉, 丸山 訓英, 鷲尾 巧, 土肥 俊, 山田 進, 「非構造メッシュ用 BILU 前処理付き反復法のベクトル・並列化手法」, 情報処理学会論文誌, Vol.41 No. SIG 8 (HPS 2), (2000), pp. 92-99.
- 10) T. Iwashita and M. Shimasaki, "Algebraic Multi-color Ordering for Parallelized ICCG Solver in Finite Element Analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, (2002), pp. 429-432.
- 11) K. Fujiwara, T. Nakata, and H. Fusayasu, "Acceleration of Convergence Characteristic of the ICCG Method," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, (1993), pp.1958-1961.
- 12) 井上 明彦, 畑崎 隆雄, 柿原 正伸, 南里 豪志, 藤野 清次, 「ダブルオーダリングによる VRIC(ω)-CG 法の並列化 - ブロック数を増した代数ブロック化赤 - 黒順序付け (ABRB) 法」, 第 8 回 環瀬戸内応用数理研究部会シンポジウム, (2005), pp. 107-112.
- 13) J. Demmel, "Applied Numerical Linear Algebra", SIAM, Philadelphia, PA, 1997.
- 14) T. Nakata, N. Takahashi, T. Imai, and K. Muramatsu, "Comparison of Various Methods of Analysis and Finite Elements in 3-D Magnetic Field Analysis," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 27, (1991), pp.4073-4076.