設計自動化 62－11
(1992. 5.27)

高次の項を除いたバタワース多項式のフルビッツ性について

石川 弘文　　村谷 恵介

佐賀大学 理工学部

佐賀市本庄町1番地

あらまし　一般のn次のバタワース多項式の最高次を除いた多項式、高次の項から除いて作った4次以下の多項式がフルビッツであることをさきに示したが、本文では、n（≧9）次のバタワース多項式の高次の方からr（2≦r≦n－5）個の項を除いたn－r次の多項式は、その多項式の偶部と奇部の商を連分数展開したときの4番目の展開係数がすべて負となることからフルビッツでないことを示す。

On the Hurwitz property of Butterworth polynomial without higer order terms

Hirobumi ISHIKAWA　　Keisuke MURAYA

Faculty of Science and Engeneering, Saga University

HONJYO 1, SAGA CITY, SAGA

Abstruct　This paper deals with the Hurwitz property of Butterworth polynomials without higher-order terms. We showed previously that the Butterworth polynomials without the leading term was Hurwitz. It is shown in this paper that n-rth order polynomials derived from the n(≧9)th-order Butterworth polynomial by deleting the first r(2≦r≦n-5) terms are not Hurwitz.

1. まえがき

鎖状能動ＲＣ回路[1][2]により全極形低域通過関数を実現した場合、回路中の各電圧ホロワの入力から回路出力への伝達関数の分母多項式は、与えられた伝達関数の分母多項式の高次の項から順次除いた多項式になっている。もし、これらの多項式がすべてフルビッツであれば回路の特性の調整に利用できると考えて、一般にフルビッツ多項式の高次の項から順次除いて作った多項式のフルビッツ性について少し調べたことがある。また、帰還係数を含む鎖状能動ＲＣ回路が高次イミタンス素子を用いたはしご形回路で等価的に表されるところから、駆動点関数を与えてそれを連分数展開することにより回路を設計する方法[3]を考え、バタワース特性を実現する場合の駆動点関数の分母多項式の一つとして、バタワース多項式の最高次を除いた多項式を用いたが[4]、この最高次を除いたバタワース多項式の性質を調べてみるとフルビッツであることが分かったので、関連して調べて分かったことと併せてさきに報告[5]した。

バタワース多項式の最高次に続いて高次の項から順次除いた多項式の偶部と奇部の商を連分数展開したときの展開係数を計算機により求め、その符号によりフルビッツ性を調べてみると、もとの多項式が高次になると最高次を除いた多項式および４次以下の多項式以外はフルビッツではないことが予想されたので、今回その証明を試みた。

2. 高次の項を除いたバタワース多項式とそのフルビッツ性

ｎ次のバタワース多項式は

$$B(p)=\sum_{j=0}^{n} a_j p^{n-j} \qquad (1)$$

$$a_0=1 \qquad (2)$$

$$a_j=a_{j-1}\frac{C_{j-1}}{S_j} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \qquad (3)$$

と表される。ここで

$$C_j=\cos(j\pi/2n) \qquad (4)$$

$$S_j=\sin(j\pi/2n) \qquad (5)$$

である。

いま、$B(p)$の高次の項からｒ個の項を除いた多項式を$B(p)^{(r)}$とすると

$$B(p)^{(r)}=\sum_{j=0}^{n-r} a_j^{(r)} p^{n-r-j} \qquad (6)$$

となり、ここで

$$a_j^{(r)}=a_{j+r} \qquad (j=0,1,\cdots,n-r) \qquad (7)$$

である。さらに、$B(p)^{(r)}$の偶部と奇部をそれぞれ

$$P_0=a_0^{(r)}p^{n-r}+a_2^{(r)}p^{n-r-2}+\cdots \qquad (8)$$

$$P_1=a_1^{(r)}p^{n-r-1}+a_3^{(r)}p^{n-r-3}+\cdots \qquad (9)$$

とし、

$$\begin{aligned} P_0&=h_1pP_1+P_2\\ P_1&=h_2pP_2+P_3\\ P_2&=h_3pP_3+P_4\\ &\cdots\cdots \qquad (10)\\ P_k&=h_{k+1}pP_{k+1}+P_{k+2}\\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

によって、順次低次の多項式が生ずるようにh_k（k=1, 2, ･･･, n-r）を定め、その符号を調べる。４番目の係数h_4を求めると

$$h_4=\frac{C_rC_{r+2}S_{r+6}S_{r+7}(C_2S_4S_{r+2}-C_{r+1}S_{r+5}S_r)^2}{C_1C_2C_3C_{r+1}C_{r+3}S_2S_4S_6S_{r+2}S_{r+4}(1-f)} \qquad (11)$$

ここで

$$f=\frac{S_rS_{r+7}(C_{r+2}S_{r+2}+C_{r+1}S_{r+5})}{C_3S_6S_{r+2}S_{r+4}} \qquad (12)$$

である。ｎが９次以上で$1\leqq r\leqq n-4$の場合、式（１１）における$1-f$の項以外はすべて正である。h_4の符号に関係するｆの性質について調べる。

いま、ｎ（≧９）を一定とするとき、ｆはｒ（$1\leqq r\leqq n-4$）の単調増加関数と単調減少関数の積で上に凸の関数であり、$r=1$および$r=n-4$のとき$f<1$である。また、ｒ（あるいは$n-r$）を一定とするとき、ｆはｎの単調増加関数である。ｎ，ｒに対する$1-f$の値を表１に示す。このようなｆの性質から$n\geqq 9$，$2\leqq r\leqq n-5$のとき、$1-f<0$、したがって$h_4<0$となる。

以上の結果から、$n\geqq 9$，$2\leqq r\leqq n-5$のとき、$B(p)^{(r)}$はフルビッツでないことが示された。

3. むすび

バタワース多項式の最高次を除いた多項式がフルビッツであることが分かったのをきっかけとして、バタワース多項式の高次の項から順次除いて作った多項式のフル

ビッツ性について調べてみた。さきの報告[5]の結果と併せてまとめると次のようになる。

①もとの多項式が７次以下の場合、順次作った多項式はすべてフルビッツである。

②もとの多項式が８次の場合、作った６次の多項式がフルビッツではないが、その他はフルビッツである。

③もとの多項式がｎ（≧９）次の場合、作った多項式のうち、ｎ－１次および４次以下の多項式はフルビッツであるが、それ以外はフルビッツではない。

参考文献

(1) R.E.Bach："Selecting R-C values for active filters"，Electronics,33,pp.82-85(May13,1960).

(2) 石川弘文："鎖状能動ＲＣ回路網とその応用"，信学論(A)，54-A,10,pp.555-559(1971-10).

(3) 石川弘文："高次イミタンスはしご形フィルター帰還係数を含む鎖状能動回路によるバタワースフィルタの設計式について－"，信学技報，CAS 90-103(1991-01).

(4) 深井，石川，高植："高次イミタンスはしご形フィルターバタワースフィルタのもう一つの設計式について"，信学技報，CAS 91-77(1991-11).

(5) 石川弘文 ："バタワース多項式から作る多項式のフルビッツ性について"，信学技報 ，CAS 91-76(1991-11).

(6) 高橋秀俊 ："Tchebyscheff特性を有する梯子型濾波器について"，信学誌，34,2,pp.11-20(1966-02).

表１． ｎ，ｒに対する１－ｆの変化

ｎ＼ｒ	１	２	３	…	ｎ－６	ｎ－５	ｎ－４
9	0.2578	-0.0700	-0.1372		-0.1372	-0.0159	0.2340
10	0.2452	-0.1303	-0.2696	…	-0.2288	-0.0519	0.2159
11	0.2365	-0.1742	-0.3682	…	-0.2885	-0.0761	0.2094
12	0.2301	-0.2071	-0.4445	…	-0.3298	-0.0931	0.2091
13	0.2253	-0.2325	-0.5044	…	-0.3597	-0.1056	0.1963
14	0.2216	-0.2525	-0.5522	…	-0.3821	-0.1151	0.1920
15	0.2186	-0.2686	-0.5910	…	-0.3994	-0.1225	0.1885
:	:	:	:	…	:	:	:
∞	0.2	-0.375	-0.8571	…	-0.5	-0.1667	0.1667