

線形時間で配置復元可能な Sequence-Pair

児玉 親亮[†], 藤吉 邦洋[‡]

[†] 富士通株式会社

〒 211-8588 川崎市 中原区 上小田中 4-1-1

TEL: 044-754-2154 FAX: 044-754-2155

[‡] 東京農工大学 工学部 電気電子工学科

〒 184-8588 東京都 小金井市 中町 2-24-16

TEL/FAX: 042-388-7250

E-mail: [†]kodamada@fjlab.ei.tuat.ac.jp, [‡]fujiiyosi@cc.tuat.ac.jp

あらまし 本研究では、隣接交差と呼ばれる部分列の数を限定した sequence-pair を selected sequence-pair として提案する。これは sequence-pair と同様に、どんな矩形パッキングでも表現可能であるという特長を持つ。そして隣接交差の無い sequence-pair を近年提案された矩形分割の表現手法である Q-sequence に、入力サイズの線形時間にて変換するアルゴリズムを提案し、これを拡張して selected sequence-pair 上の隣接交差を同じく線形時間にて列挙できるアルゴリズムを提案する。これらのアルゴリズムと既存手法を組み合わせることによって、矩形数を n とすると $O(n)$ 時間にて selected sequence-pair の示唆する制約の下での最密パッキングを得ることができることを示す。

キーワード sequence-pair, パッキング, 隣接交差, Q-sequence

Selected Sequence-Pair

Chikaaki KODAMA[†], Kunihiro FUJIYOSHI[‡]

[†]Fujitsu LTD.

4-1-1 Kamikodanaka Nakahara-ku Kawasaki Kanagawa, 211-8588, Japan

TEL: +81-44-754-2154 FAX: +81-44-754-2155

[‡]Department of Electrical and Electronic Engineering,

Tokyo University of Agriculture & Technology

2-24-16 Nakacho Koganei Tokyo, 184-8588, Japan

TEL/FAX: +81-42-388-7250

E-mail: [†]kodamada@fjlab.ei.tuat.ac.jp, [‡]fujiiyosi@cc.tuat.ac.jp

Abstract In this paper, we propose “selected sequence-pair”, sequence-pair with limited number of adjacent cross. The feature of selected sequence-pair is that it can represent any rectangle packing similarly as sequence-pair can. Then we propose the algorithm to convert, in linear time, sequence-pair without adjacent cross to Q-sequence which is a recently proposed method to represent rectangular dissection. We improve this algorithm to another one which can enumerate all adjacent crosses on selected sequence-pair in linear time and show that we can obtain the packing under the HV-constraints of selected sequence-pair in linear time by combining these algorithms and conventional methods.

key words sequence-pair, packing, adjacent cross, Q-sequence

1 まえがき

VLSI 開発におけるレイアウト設計では、多数の矩形形状のモジュールを如何に密に配置するかという問題がある。村田らが提案した矩形配置の表現方法である sequence-pair[1]は、どんな矩形パッキングでも表現可能であり、全ての sequence-pair には対応する矩形パッキングが必ず存在するという特長がある。また、sequence-pair は矩形対の相対位置制約を示唆していることから拡張性が高く、実際、既配置モジュールへ[2]やレクトリニア多角形パッキング[5]や指定モジュールのチップの外周付近への配置[8]、矩形分割への等価変換[9, 10]等に応用されている。この論文では、水平方向と垂直方向の制約グラフを用いることにより、矩形数を n として $O(n^2)$ 時間にて 1 つの sequence-pair に基づいた左下詰めパッキングを求める手法が提案された。

近年提案された O-tree[3][4]は、どんな左下詰め矩形パッキングでも表現可能である。また、O-tree に基づいた左下詰めパッキングは矩形数を n とすると $O(n)$ 時間で得ることができる。また、配置表現の総数は $Cn \times (n!)$ (Cn はカタラン数) 通りで $Cn \leq n!$ なので sequence-pair のよりも小さいという特長がある。しかし O-tree は左下詰めパッキングしか表現できないことや、パッキングにおいて垂直座標が水平座標の影響を受け、相対位置が矩形のサイズに大きく依存するため、拡張性があまり高くない。

ところで矩形配置問題を解く際に、しばしばフロアプランを求める。フロアプランとは各々のモジュールと配線チャンネルの位置を大まかに決めたものであり、チップを表す矩形を垂直または水平線分により分割された「矩形分割」として表される。坂主らによって昨年提案された Q-sequence[13]は、どんな矩形分割も表現可能であり、全ての Q-sequence には対応する矩形分割が必ず存在する。そして、矩形分割と Q-sequence の間の相互変換は共に、部屋数の線形時間で可能である。しかし、矩形分割では図 1 のように表現できないパッキングが存在する。

上記のように、O-tree や Q-sequence に対しては表現に基づいた左下詰めパッキングを $O(n)$ 時間にて求めることができる手法が提案されたが、sequence-pair に対しては、 $O(n \log n)$ 時間の手法[6]が提案されて色々と改良を加えられてきた。最近、 $O(n \log \log n)$ 時間でパッキングを求められるという手法[7]も提案されたが、まだ、線形時間よりも若干遅かった。

そこで本研究では、隣接交差と呼ばれる部分列の数を n 以下に制限した sequence-pair を“selected sequence-pair” (以下 SSP) として提案する。これは sequence-pair と同様に、どんな矩形パッキングでも表現可能であるという特長を持ちながら、配置表現の総数はより少ない。そして、任意の SSP に基づいた左下詰めパッキングを $O(n)$ 時間にて求めることができる手法を提案する。

この手法を実現するためにまず、隣接交差のない sequence-pair を Q-sequence に、入力サイズの線形時間にて変換できるアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムは線形時間にて sequence-pair の隣接交差の有無を判定し、もし隣接交差があるならばその 1 つを検出できるので、この

検出方法を拡張することで、sequence-pair 上の全ての隣接交差を、sequence-pair サイズと隣接交差数の和の線形時間にて列挙できるアルゴリズムを提案する。これらのアルゴリズムと既存手法を組み合わせることにより、SSP に基づいた左下詰めパッキングを求める線形時間アルゴリズムを実現する。

2 準備

2.1 sequence-pair

sequence-pair[1] (以下 seq-pair) では n 個の矩形の相対位置関係を、矩形名の順列 Γ_+ と Γ_- の対により、 $(\Gamma_+; \Gamma_-)$ の形で表す。当然、 n 個の矩形の配置について $(n!)$ ² 通りの表現がある。ここで、 $\Gamma_+(i)$ は Γ_+ 中で第 i 番目の矩形を指し、 $\Gamma_+^{-1}(a)$ は Γ_+ 中で左から矩形 a が何番目かを指す。 Γ_- についても同様である。

seq-pair では矩形対の相対位置関係を、以下に示す「上下左右制約」として表す。 Γ_+ と Γ_- で共に矩形 a が矩形 b の前にあるとき、つまり、 $\Gamma_+^{-1}(a) < \Gamma_+^{-1}(b)$ かつ $\Gamma_-^{-1}(a) < \Gamma_-^{-1}(b)$ であるとき、矩形 a は矩形 b の左に位置する。また、 Γ_+ では矩形 a が矩形 b の前にあり Γ_- では矩形 a が矩形 b の後ろにあるとき、すなわち $\Gamma_+^{-1}(a) < \Gamma_+^{-1}(b)$ かつ $\Gamma_-^{-1}(a) > \Gamma_-^{-1}(b)$ であるとき、矩形 a は矩形 b の上に位置する。例えば、seq-pair (1234; 2413) は図 1 のような相対位置関係を表す。

seq-pair はどんな矩形パッキングでも表現可能であるという特長を持ち、様々に応用できる[2][5][8]。また、1 つの seq-pair からそれが表す左下詰めパッキングを $O(n \log \log n)$ 時間で得ることができる[7]。

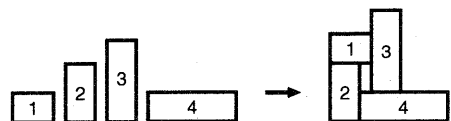


図 1: seq-pair (1234;2413) に対応する左下詰めパッキング

2.2 矩形分割

矩形分割とは、配置問題の前の段階でモジュールと配線チャンネルの相対位置関係を求めたものである。具体的には、 n 個のモジュール $\{M_1, M_2, \dots, M_n\}$ を配置する問題に対して、チップ全体を表す矩形を、 $M_1, M_2, \dots, M_n$ と各々名前のついた n 個の重なりのない矩形領域 (部屋) に、垂直/水平線分 (分割線) を用いて分割する問題である。但し、各々の部屋の大きさは、その名前に対応するモジュールが入ることができるように確保する。

本論文では矩形分割においてチップ全体の外周である 4 本の線分も分割線とみなし、分割線の交点はチップ全体を表す矩形の四隅を除いて全て T 字状であるとする[14]。

任意の矩形分割において分割線が直角をなしており、分割線が直角をなしているのはチップ全体の四隅と、チップ全体の外周の 4 辺を除く分割線の両端の T 字分岐の両側に 4 個所だけであるので、部屋数 $\times 4 =$

(分割線による) 直角な隅の数 = $4 + (\text{分割線数} - 4) \times 4$ であるから、部屋数 = 分割線数 - 3 である [9]。このことから以下のことが言える。

【性質 1】 矩形分割において、分割線数は部屋数より丁度 3 多い。 ■

n 部屋の矩形分割は各々の分割線が座標を持つので無限に存在するが、部屋とそれに隣接する分割線の相対位置関係のみに着目すると、これを有限種類に分類することができる。

2.3 空部屋を持つ矩形分割

隣接交差

seq-pair $\mathcal{S}$ において、矩形 a, b, c, d の位置が、

$$\mathcal{S} = (\dots a \dots bc \dots d \dots; \dots c \dots ad \dots b \dots) \quad \text{あるいは}$$

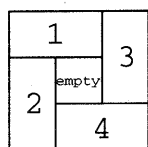
$$\mathcal{S} = (\dots a \dots bc \dots d \dots; \dots b \dots da \dots c \dots)$$

のとき、「 $\mathcal{S}$ は隣接交差を持つ」もしくは「 $abcd$ は隣接交差をなす」というものとする。隣接交差を持つ n 矩形の seq-pair と同じ矩形相対位置関係の矩形分割は、 n 部屋では実現できず、矩形が埋め込まれない空部屋を隣接交差の数だけ導入しなければならない。矩形 n 個の相対位置を表す seq-pair が含む隣接交差数の最大は

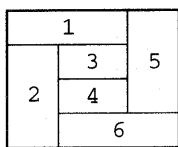
$$\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$$

である [10]。

例えば、seq-pair (1234; 2413) のとき、これらの矩形相対位置関係全てを同時に満たす矩形分割は図 2(a) のようになり、四つの部屋の中央に空部屋を導入しなければならないことは容易に確かめられる。



(a) seq-pair (1234; 2413) (b) Qseq $\mathcal{R}RBB1BB2RRR3B4R5B6$ に対応した矩形分割



が表す矩形分割

図 2: 矩形分割の表現

水垂交差

seq-pair において、矩形 a, b, c, d が

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_+^{-1}(a) < \Gamma_+^{-1}(b) < \Gamma_+^{-1}(c) < \Gamma_+^{-1}(d) \quad \text{かつ} \\ \Gamma_-^{-1}(c) < \Gamma_-^{-1}(a) < \Gamma_-^{-1}(d) < \Gamma_-^{-1}(b) \end{array} \right\} \text{であり、} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_+^{-1}(b) < \Gamma_+^{-1}(x) < \Gamma_+^{-1}(c) \quad \text{かつ} \\ \Gamma_-^{-1}(a) < \Gamma_-^{-1}(x) < \Gamma_-^{-1}(d) \end{array} \right\} \text{な } x \text{ が存在しない、} \quad (2)$$

とき、もしくはこの Γ_- を逆順にした形であるとき、「 a, b, c, d は水垂交差をなす」という。

なお、本稿での水垂交差の定義は従来の定義 [9][10] とは若干異なるが、その意味などは全く同じである。

【補題 1】 seq-pair において水垂交差が存在するなら、隣接交差が存在する。

(証明) a, b, c, d が式 (1), (2) の条件を満たして水垂交差をなしているとする。すると、式 (2) から、 $\Gamma_+^{-1}(b) < \Gamma_+^{-1}(x) < \Gamma_+^{-1}(c)$ な x は必ず $\Gamma_-^{-1}(x) < \Gamma_-^{-1}(a)$ もしくは $\Gamma_-^{-1}(d) < \Gamma_-^{-1}(x)$ である。従って、 $\Gamma_+^{-1}(b) \leq \Gamma_+^{-1}(v) < \Gamma_+^{-1}(v)+1 \leq \Gamma_+^{-1}(c)$ かつ $\Gamma_-^{-1}(\Gamma_+(\Gamma_+^{-1}(v)+1)) < \Gamma_-^{-1}(a)$ かつ $\Gamma_-^{-1}(d) < \Gamma_-^{-1}(v)$ な v が必ず存在する。

同様な理由により、 $\Gamma_-^{-1}(a) \leq \Gamma_-^{-1}(u) < \Gamma_-^{-1}(u)+1 \leq \Gamma_-^{-1}(d)$ かつ $\Gamma_+^{-1}(u) < \Gamma_+^{-1}(b)$ かつ $\Gamma_+^{-1}(c) < \Gamma_+^{-1}(\Gamma_-(\Gamma_-^{-1}(u)+1))$ な u が必ず存在する。故に、 $v, \Gamma_+(\Gamma_+^{-1}(v)+1), u, \Gamma_-(\Gamma_-^{-1}(u)+1)$ は

$$\begin{aligned} \Gamma_+^{-1}(u) &< \Gamma_+^{-1}(b) \leq \Gamma_+^{-1}(v) \\ &< \Gamma_+^{-1}(v)+1 \leq \Gamma_+^{-1}(c) < \Gamma_+^{-1}(\Gamma_-(\Gamma_-^{-1}(u)+1)) \quad \text{かつ} \\ \Gamma_-^{-1}(\Gamma_+(\Gamma_+^{-1}(v)+1)) &< \Gamma_-^{-1}(a) \leq \Gamma_-^{-1}(u) \\ &< \Gamma_-^{-1}(u)+1 \leq \Gamma_-^{-1}(d) < \Gamma_-^{-1}(v) \end{aligned}$$

であるので隣接交差をなしている。

Γ_- が逆順のときも同様に証明できる。 ■

2.4 隣接交差へのダミー矩形挿入操作

隣接交差のある seq-pair をそれと同じ矩形相対位置関係の矩形分割に変換するには、まず seq-pair にダミー矩形を挿入し隣接交差をなくす必要がある。

【定理 1】 隣接交差数 k 、矩形数 n の seq-pair の矩形相対位置関係と同じ矩形相対位置関係をもつ部屋数最小矩形分割の部屋数は $n+k$ である。 ■

隣接交差のある seq-pair へのダミー矩形の挿入は以下のよう実現できる [9]。

seq-pair $\mathcal{S}$ において矩形 a, b, c, d が「矩形 a と矩形 b が Γ_+ で隣接し、矩形 c と矩形 d が Γ_- で隣接する」という位置関係で隣接交差をなしているとする。 Γ_+ の a, b 間と、 Γ_- の c, d 間にダミー矩形 x を挿入する。すると、 a, b, c, d は隣接交差をなさなくなることは明らかである。

2.5 Q-sequence

坂主らによって提案された Q-sequence [11][12][13] (以下 Q-seq) は、 n 部屋から構成される一般構造の矩形分割を、長さ $3n$ の記号列で表現する手法である。

例えば、図 2(b) の矩形分割は Q-seq で

$$Q = R R B B 1 B B 2 R R R 3 B 4 R 5 B 6$$

と表現される。ここで番号は部屋名を表す。また、部屋名と部屋名の間にある $\mathcal{R}$ と $\mathcal{B}$ の記号列は、記号列の右側の部屋名に対し、 $\mathcal{R}$ ならばその部屋の右側の垂直線分を、 $\mathcal{B}$ ならばその部屋の下側の水平線分を挟んで、記号の個数だけ他の部屋が隣接していることを表す。 $\mathcal{R}$ の記号列がすぐ後ろに並ぶ部屋は、部屋の右下角で分割線が $\perp$ 状に交わっている。 $\mathcal{B}$ の記号列がすぐ後ろに並ぶ部屋は分割線が右下角で $\neg$ 状に交わっている

例えば Q-seq Q の一部で “1BB2” とあるが、これは部屋 1 の右下角が $\neg$ 状で、水平線分を挟んで直下に部屋 2 を含む

2つの他の部屋が隣接していることを示す。次に“2RRR3”とあるが、これは部屋2の右下角が上状で、垂直線分を挟んで直右に部屋3を含む3つの他の部屋が隣接していることを示す(図2(b)参照)。

Q-seq の先頭部分で、部屋名に挟まれていない $\mathcal{R}$ と $\mathcal{B}$ の記号列では、 $\mathcal{R}$ の数はこの Q-seq が表す矩形分割の外周の左辺に隣接している部屋の数を表し、 $\mathcal{B}$ の数は外周の上辺に隣接している部屋の数を表す。

例えば、 $Q\text{-seq } Q$ の先頭の記号列 “ RR ” と “ BB ” は、この $Q\text{-seq}$ が表す矩形分割の外周の左辺に 2 部屋が、上辺にも 2 部屋が隣接していることを表す。

以下の Q-seq の性質及び定理が坂主らによって明らかにされている [13]。

【性質2】 n 部屋の Q-seq に登場する部屋名と記号 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{B}$ の数は、それぞれ n である。 ■

【性質3】 $Q\text{-seq}$ 上で部屋名が2つ以上連続することはなく、少なくとも1つ以上の $\mathcal{R}$ または $\mathcal{B}$ が間に存在する。 ■

【性質4】 2つの部屋名の間に挟まれる記号 $\mathcal{R}$ または B は、必ずどちらか1種類であり、両方が混在することはない。すなわち、“ $1\mathcal{R}\mathcal{R}B\mathcal{R}B\mathcal{R}2$ ”のようにはならない。

【性質 5】 もし部屋 x が Q-seq において q 番目の部屋名ならば、 R と B がそれぞれ q 以上の数だけ x の前に存在する。 ■

【定理2】 性質2、3、4、5を満たす Q -seq は、唯一の矩形分割に対応する。

2.6 Q-seq における部屋と分割線の相対位置関係

Q-seq では、記号 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{B}$ が必ず各々 1 つずつ各部屋に対応することは先に述べた。この部屋名と記号 $\mathcal{R}$ または $\mathcal{B}$ の対応関係を表したものが coding diagram である [13]。例えば $Q = \mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{B}\mathcal{B}1\mathcal{B}\mathcal{B}2\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}3\mathcal{B}4\mathcal{R}5\mathcal{B}6$ の coding diagram が図 3 である。coding diagram は部屋名と記号 $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ の対応を表す Room- $\mathcal{R}$ 対応 (Room- $\mathcal{B}$ 対応) からなる。Room- $\mathcal{R}$ 対応は、各々の $\mathcal{R}$ を左括弧“(”に各々の部屋名を右括弧”)”に置き換え、以下のように左括弧と右括弧を交差しないように対応させることで作成される。Room- $\mathcal{B}$ 対応も $\mathcal{R}$ と $\mathcal{B}$ を入れ替えることによって同様に作成される。

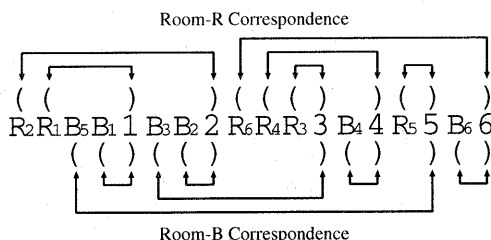


図 3: $Q = \mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{B}\mathcal{B}1\mathcal{B}\mathcal{B}2\mathcal{R}\mathcal{R}\mathcal{R}3\mathcal{B}4\mathcal{R}5\mathcal{B}6$ の Coding diagram

図3の coding diagram から、記号 $\mathcal{R}$ と記号 $\mathcal{B}$ がそれぞれ

対応する部屋名は、各記号の下付の番号であることに注意されたい。 Q -seq の $\mathcal{R}$ または $\mathcal{B}$ の記号列は、それぞれ垂直分割線と水平分割線を表している。 $\mathcal{R}$ または $\mathcal{B}$ の各記号に対応する部屋は、 $\mathcal{R}$ ならばそれが表す垂直分割線の右側に、 $\mathcal{B}$ ならばそれが表す水平分割線の下側に隣接している。

【事実 1】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、ある部屋集合が 1 本の垂直分割線の右側に並んでいることの必要十分条件は、その集合の各々の部屋に対応する $\mathcal{R}$ が Q において隣接して並んでいることである。

【事実 2】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、ある部屋集合が 1 本の水平分割線の下側に並んでいることの必要十分条件は、その集合の各々の部屋に対応する B が Q において隣接して並んでいることである。

例えば図3で、先頭の記号列“ $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ ”はそれぞれ部屋2と部屋1に対応していることが分かる。故に、この“ $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ ”が表す垂直分割線の右側には部屋2と部屋1が隣接している。また、続く“ $\mathcal{B}_5\mathcal{B}_1$ ”はそれぞれ部屋5と部屋1に対応していることが分かる。故に、この“ $\mathcal{B}_5\mathcal{B}_1$ ”が表す水平分割線の下側には部屋5と部屋1が隣接している。

垂直分割線の右側、または水平分割線の下側に隣接する部屋の判別は事実1、2のように容易である。しかし、垂直分割線の左側、または水平分割線の上側に隣接する部屋の判別はやや複雑である。

Q-seq 上で、部屋名 x と対応する B_x (x に対応する B) で囲まれた部分列を「 B 対」と、 x を「 B 対の部屋」と呼ぶ。一つ以上の B 対が間を空けずに隣接しているものを「 B 系列」と呼ぶ。同様に、部屋名 x と対応する R_x で囲まれた「 R 対」が隣接しているものを「 R 系列」と呼ぶ。すると、以下の事実が得られる。

【事実3】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、ある部屋集合が1本の垂直分割線の左側に並んでいることの必要十分条件は、その部屋集合が Q において B 系列をなしていることである。 ■

【事象 4】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、ある部屋集合が 1 本の水平分割線の上側に並んでいることの必要十分条件は、その部屋集合が Q において $\mathcal{R}$ 系列をなしていることである。

【事実 5】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、部屋 a が部屋 b に対して 1 本の垂直分割線をはさんで左にあることの必要十分条件は、 Q において a を含んだ B 系列の直後にある連続した R の一つが b に対応することである。

【事実6】 Q -seq Q から求めた矩形分割において、部屋 a が部屋 b に対して1本の水平分割線をはさんで上にあることの必要十分条件は、 Q において a を含んだ $\mathcal{R}$ 系列の直後にある連続した B の一つが b に対応することである。

3 Selected Sequence-pair

矩形数 n の seq-pair の隣接交差数が n 以下であるとき、これを **selected sequence-pair** (以下 **SSP**) と呼ぶ。次に述べる定理において、seq-pair が持つ「どんな矩形パッキ

ングも表現可能である」という特長を保ったまま隣接交差数が $n-3$ 以下に抑えられることを示す。しかし n が 5 以上では、より少ない隣接交差数で表現可能である。

【定理 3】 矩形 n 個の任意のパッキングは、 $n-3$ 以下の隣接交差を持つ seq-pair で表現できる。

(証明) 矩形 n 個のパッキング P が与えられたとする。 P を最小の外周矩形で囲む (図 4(a) に例を示す)。各々の矩形は矩形形状の領地の中に納まっているとし、各々の領地をお互いに重ならないように他の矩形の領地から外周矩形に接するまで、その上下左右の各辺を適当な順番で移動させて矩形形状のままに広げる。すると、領地の境界線はそれ同士や外周矩形の辺と接し合うので、接し合う境界線をまとめて 1 本の分割線とみなし、もし、外周矩形を除いたものの両端で他の分割線に対して T 字状に終端していないものがあつたら、必要に応じて延長して T 字状に終端させる。この結果、 n 以上の部屋をもった矩形分割になる (図 4(b) 参照)。ここでは n 個の部屋だけがいずれかの矩形の領地であり、残りの部屋は誰の領地でもない「空き部屋」である。

もし、外周矩形の 1 辺が 1 つの部屋だけに接しているなら、これは明らかにいずれかの矩形の領地なのだが、この部屋は取り除いても矩形分割であるので除去する。この様な部屋がなくなるまで、該当する部屋を 1 つずつ除去して矩形分割 R を得る (図 4(c) 参照)。ここで、 x 個の部屋が削除されたとする。

R では、外周も含めた全ての分割線が 2 つ以上の部屋に接している。残った $n-x$ 個の領地は各々 4 辺あるので、分割線数は $4(n-x)/2 = 2(n-x)$ 本以下である。

性質 1 から、矩形分割では分割線数-3 が部屋数なので、 R の部屋数は $2(n-x)-3$ 以下である。このうち $n-x$ 個はいずれかの矩形の領地なので、空き部屋の数 $2(n-x)-3-(n-x) = n-x-3$ 以下である。 $n-x-3$ は $x=0$ のとき最大になるので、 R の空き部屋数は $n-3$ 以下である。空き部屋の数 $n-3$ は seq-pair 上での隣接交差の数以上なので、矩形 n 個の任意のパッキングを seq-pair で表現するには、 $n-3$ 個以下の隣接交差を許せば十分である。 ■

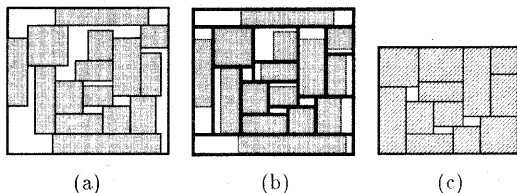


図 4: 定理 3 の証明

4 Selected Sequence-Pair からパッキングを求めるアルゴリズム

k 個の隣接交差を持つ、矩形 n 個の配置を表す SSP から、以下に述べる 4 段階の処理を行うことによって $O(n+k)$ 時間にてパッキングを得ることができる。

Step 1: 与えられた SSP $\mathcal{S}$ 上の全ての隣接交差を列挙する ($O(n+k)$ 時間)。

Step 2: 既存手法 [9][10] によりダミー矩形を挿入して全ての隣接交差をなくす ($O(k)$ 時間)。ここで得られた隣接交差のない seq-pair $\mathcal{S}'$ のサイズはダミー矩形 k 個が加わったので $n+k$ になる。

Step 3: $\mathcal{S}'$ をアルゴリズム SeqPair-Qseq で Q-seq $\mathcal{Q}$ に変換する ($O(n+k)$ 時間)。

Step 4: $\mathcal{Q}$ から矩形分割を復元し [13]、矩形を割り当てパッキング終了 ($O(n+k)$ 時間)。

Step 2 と Step 4 は既存手法であり、Step 1 と Step 3 は後に説明する。

4.1 Step 1: 全ての隣接交差の列挙

説明の簡単のため、一般性を失わず、 $\Gamma_+ = (1\ 2\ 3\ \dots\ n)$ となるように矩形名を付け替えたものとする。以降この付け替えを標準化と呼ぶ。例えば、seq-pair $(abcdef; bfdcae)$ なら、標準化すると $(123456; 264315)$ となる。標準化された n 個の矩形名からなる seq-pair が k 個の隣接交差を含むとき、アルゴリズム Adjcross list によって $O(n+k)$ 時間にて全ての隣接交差を列挙することが可能である。

アルゴリズム Adjcross list

双方向リストを用意し、矩形名を付け替えた seq-pair の Γ を左から走査する。

いま矩形 l をみたとき、

Step 1: ポインタを双方向リスト上の l の挿入予定位置に移動する。このときポインタが移動前に矩形 m の挿入位置にあり、そこから矩形名が小さい方向に移動し、リスト上に存在する他の矩形 p を飛び越えたならば、seq-pair 上で $p, m, l, p+1$ で隣接交差である。

Step 2: $l+1$ が未走査ならば l を双方向リストに挿入し、今後走査されないなら挿入しない。

また、 $l-1$ が双方向リストにあればそれを削除する。

Step 3: Γ で矩形 l の 1 つ右隣に矩形があればそれに着目し Step 1 へ。なければ終了。

Γ を左から全て走査したら、同様に右から走査する。

(アルゴリズム Adjcross list 終.)

上記のアルゴリズムは、標準化された seq-pair の Γ において、矩形 a から矩形 $a+1$ へ向かう過程で a 未満の矩形に出会ったときに隣接交差を発見して停止するという後述のアルゴリズムを、計算幾何学での平面を掃くように並列化することにより、効率よく全ての隣接交差を列挙できるように改良したものである。

アルゴリズムの実行例

例として標準化された seq-pair $(123456; 426135)$ が入力されたとする。図 5 は双方向リストでの操作の例である。

図 5(a): Γ で最も左の矩形 4 をみて、矩形 5 は未走査なので 4 をリストに挿入。

図 5(b): 矩形 2 をみて、矩形 3 は未走査なので 2 をリストに挿入。

図5(c): 矩形6をみて、矩形7は存在しないので挿入せず。
 図5(d): 矩形1をみたときリスト上の4を上方向に飛び越えたので“4615”が隣接交差をなし、同様に2も飛び越えたので“2613”が隣接交差をなす。矩形2は既走査なので、矩形1は挿入しない。
 図5(e): 矩形3をみるが矩形4は既走査なので挿入せず、さらにリスト上の矩形2を削除。
 図5(f): 最後に矩形5をみるが、矩形6は既走査なので挿入せず、さらにリスト上の矩形4を削除。

以上で左から右へ向かっての走査は終了し、同様に右から左へ向かって走査すると、隣接交差“4263”を発見する。よって seq-pair (123456;426135) から、“4615,2615,4263”の3つの隣接交差が発見された。

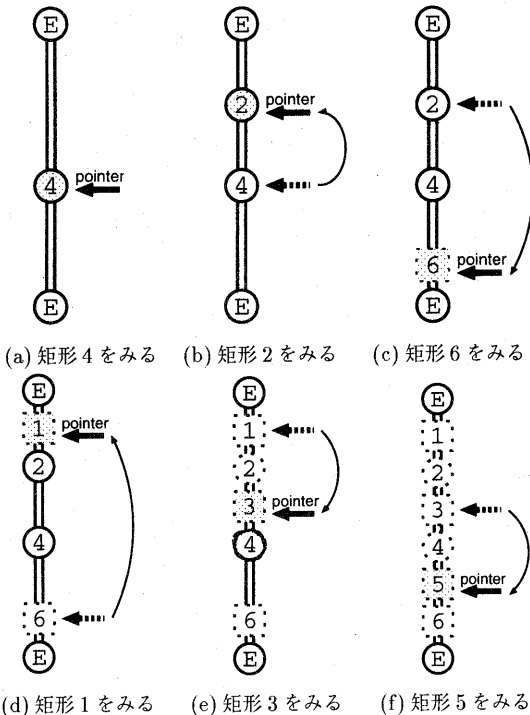


図5: Adjcross list の seq-pair (123456;426135) での実行例

4.2 隣接交差のない Seq-pair を Q-seq に変換するアルゴリズム

隣接交差のない seq-pair を Q-seq へ変換するアルゴリズムを提案する。このアルゴリズムと Q-seq の decoding によって、隣接交差のない seq-pair から矩形分割への変換が $O(n)$ 時間で可能となり (従来 $O(n^2)$ 時間 [9][10])、 $O(n)$ 時間でバックギングを得ることが可能となる。

まず、 n 個の矩形からなる標準化された seq-pair を S とする。

以降入力 S の Γ の a 番目の矩形において、

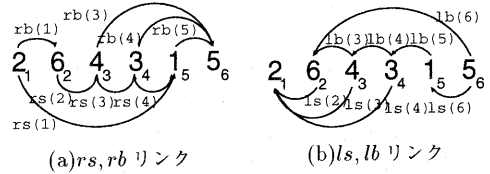


図6: rs, rb, ls, lb を求めた例

a 番目の右で、 $\Gamma(a)$ 未満で最も近い矩形の位置を $rs(a)$
 a 番目の右で、 $\Gamma(a)$ より大きく最も近い矩形の位置を $rb(a)$
 a 番目の左で、 $\Gamma(a)$ 未満で最も近い矩形の位置を $ls(a)$
 a 番目の左で、 $\Gamma(a)$ より大きく最も近い矩形の位置を $lb(a)$ と表すことにする。

全ての矩形の rs, rb, ls, lb を求めるには、 $O(n^2)$ 時間かければ可能なことは明らかであろう。しかし以下のアルゴリズムを用いることで $O(n)$ 時間で可能である。

アルゴリズム Link rs (入力: S の Γ)

```

1: push(0);
2: for ( $i=1; i \leq n; i++$ ){
3:    $rs(i)=n+1$ ; /* 初期化 */
4:   while ( $\Gamma(i) <$  スタックの一番上の要素)
5:      $rs(\Gamma^{-1}(\text{pop}()))=i$ ;
6:   push( $\Gamma(i)$ );
7: }
```

(アルゴリズム Link rs 終.)

rb, ls, lb についても同様に求められる。

アルゴリズム Link rs では、スタックの先頭との比較回数は pop の回数と push の回数の和であり、pop の回数は高々 $n-1$ 回、push の回数は n 回であるから、 $O(n)$ 時間にて実行可能である。

seq-pair (123456;426135) の Γ において、 rs, rb を求めた例を図6(a)に示す。同様に ls, lb を求めた例を図6(b)に示す。

S の Γ の全ての要素について rs, rb, ls, lb を求めた後、これらと Γ を入力として、以下のアルゴリズム SeqPair-Qseq によって Q-seq へ変換する。

アルゴリズム SeqPair-Qseq

入力: seq-pair S の Γ (矩形数 n) , rs, rb, ls, lb
 出力: Q-sequence

```

1: /* 外周矩形の左辺と隣接する部屋数を検出 */
2: for ( $i=1; i <= n; i=rs(i)$ )
3:   printf  $R_{\Gamma(i)}$ ;
4: /* 外周矩形の上辺と隣接する部屋数を検出 */
5: for ( $i=n; i <= n; i=ls(i)$ )
6:   printf  $B_{\Gamma(i)}$ ;
7: /* 各部屋の隣接関係を調べる */
8: for ( $i=1; i < n; i++$ ){
```

```

9:  printf i; /* 部屋名出力 */
10:  if ( $\Gamma^{-1}(i) < \Gamma^{-1}(i+1)$ )
11:    /* 垂直線分を挟んで部屋  $i$  と部屋  $i+1$  が隣接 */
12:    for ( $j = rb(\Gamma^{-1}(i)); j \leq \Gamma^{-1}(i+1); j = rs(j)$ ) {
13:      printf  $R_{\Gamma^{-1}(i)}$ ;
14:      if ( $i > \Gamma(j)$ ) exit;
15:    /*  $i, i+1, \Gamma(j-1), \Gamma(j)$  で隣接交差と判定 */
16:    }
17:  else
18:    /* 水平線分を挟んで部屋  $i$  と部屋  $i+1$  が隣接 */
19:    for ( $j = lb(\Gamma^{-1}(i)); j \leq \Gamma^{-1}(i+1); j = ls(j)$ ) {
20:      printf  $B_{\Gamma^{-1}(i)}$ ;
21:      if ( $i > \Gamma(j)$ ) exit;
22:    /*  $i, i+1, \Gamma(j), \Gamma(j+1)$  で隣接交差と判定 */
23:    }
24: }
25: printf n; /* 最後の部屋名 */

```

(アルゴリズム SeqPair-Qseq 終.)

アルゴリズムの正当性

【定理 4】 アルゴリズム SeqPair-Qseq は、隣接交差のない標準化された seq-pair S を入力すると、それと等価 (S の水平垂直制約と同じ相対位置関係をもった) な矩形分割を表す Q-seq Q を、矩形数の線形時間にて出力する。

(証明) 詳細はスペースの都合で省略し、証明の手順を述べる。

出力された列が Q-seq であることは、これが性質 2, 3, 4, 5 の全てを満たすことを証明すればよい。

seq-pair と Q-seq における相対位置関係は、どちらも推移的な DAG で表すことができるので、推移的でない関係が等しければよい。これは、「部屋 a と部屋 b が垂直分割線を挟んで左右に隣接していること」の必要十分条件は、「 $(\Gamma_+; \Gamma_-)$ から作った水平制約グラフにおいて推移的でない有向枝 (a, b) が存在すること」であるということを、「 Γ_+ と Γ_- で共に a が b の前にあり、かつ Γ_+ と Γ_- で共通に a と b の間に存在するものがないこと」を間に介して証明する。

また、SeqPair-Qseq は for-loop を回る度に $\mathcal{R}$ か $\mathcal{B}$ を一つ出力し、 Q は Q-seq であることからその長さは $3n$ であるので、時間複雑度は $O(n)$ である。 ■

アルゴリズムの実行例

入力を seq-pair $(\Gamma_+; \Gamma_-) = (123456; 264315)$ とする。アルゴリズム Link rs により、各矩形の rs を求める。 rb, ls, lb についても同様に求められる (図 6 参照)。

次に、アルゴリズム SeqPair-Qseq により、seq-pair を Q-seq へ変換する。入力の Γ_- において最も左の矩形 2 から rs をたどると矩形 1 に至って途絶えるので、「 $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ 」を出力する (図 7(a) 参照)。(これは、外周矩形左辺には下から部屋 2,1 が隣接していることを意味する)

今度は最も右の矩形 5 から ls をたどると矩形 1 に至って途絶えるので、「 $\mathcal{B}_5\mathcal{B}_1$ 」を出力する (図 7(b) 参照)。(こ

れは、外周矩形上辺には右から部屋 5,1 が隣接していることを意味する)

Γ_- で 2 は 1 の右側にあるので 1 と 2 の間には $\mathcal{B}$ が並ぶと判定し、1 から 2 に向かって 1 度だけ lb を、後は 2 に到達するまで ls をたどると、1 から 3 を経由して 2 に到達する。よって、「 $1\mathcal{B}_3\mathcal{B}_2$ 」を出力する (図 7(c) 参照)。(これは、部屋 1 の下側水平分割線に対し右側から部屋 3,2 が隣接していることを意味する)

Γ_- で 3 は 2 の左側にあるので 2 と 3 の間には $\mathcal{R}$ が並ぶと判定し、2 から 3 に向かって 1 度だけ rb を、後は 3 に到達するまで rs をたどると、2 から 6 と 4 を経由して 3 に到達する。よって、「 $2\mathcal{R}_6\mathcal{R}_4\mathcal{R}_3$ 」を出力する (図 7(d) 参照)。(これは、部屋 2 の右側垂直分割線に対し下側から部屋 6,4,3 が隣接していることを意味する)

以降同様に Γ_- 上で 3 から 4、4 から 5、5 から 6 まで走査すると、Q-seq “ $\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1\mathcal{B}_5\mathcal{B}_11\mathcal{B}_3\mathcal{B}_22\mathcal{R}_6\mathcal{R}_4\mathcal{R}_33\mathcal{B}_4\mathcal{R}_55\mathcal{B}_66$ ” を出力して終了する。

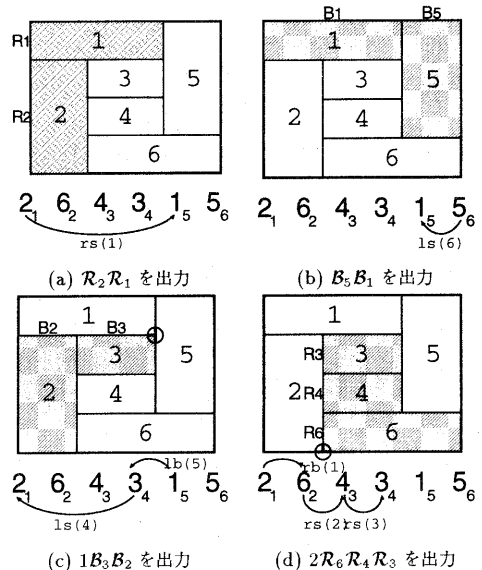


図 7: アルゴリズム SeqPair-Qseq の実行例

空き部屋の検出例

もしアルゴリズム SeqPair-Qseq に隣接交差のある seq-pair を入力すると、隣接交差を 1 つ検出し、その変換作業を停止する。これにより、seq-pair の隣接交差の有無を $O(n)$ 時間にて判定することができる。

例えば、入力を $(1234; 2413)$ とする。上述と同様の処理を進めていき、矩形 2 から矩形 3 へ向かう際に、 $rb(1)$ は 2 なので矩形 4 をたどり、 $rs(2)$ は 3 なので矩形 1 に至る。このとき、始点である矩形 2 未満の矩形 1 に至ってしまったので、隣接交差ありと判定し終了する (図 8 参照)。

このように、矩形 a から $a+1$ に向かって走査する際に、最

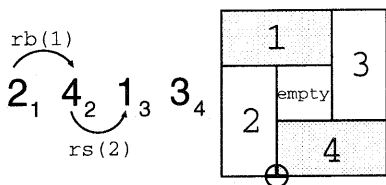


図 8: 隣接交差の検出例

初に rb または lb をたどった後 rs または ls をたどっていく過程で、 a よりも小さい矩形名 b に到達してしまったなら、 a の右側に $a+1$ があるなら a と $a+1$ と b と b のすぐ左隣の矩形で隣接交差をなしている。 a の左側に $a+1$ があるなら a と $a+1$ と b と b のすぐ右隣の矩形で隣接交差をなしている。

【定理 5】 アルゴリズム SeqPair-Qseq に隣接交差のある標準化された seq-pair を入力したなら必ず、矩形数の線形時間にて、隣接交差の一つ発見して停止する。

(証明) 隣接交差は定義から、

$\Gamma = (\dots, b, \dots, c, a, \dots, b+1, \dots)$ または逆順である

$\Gamma = (\dots, b+1, \dots, a, c, \dots, b, \dots)$

であり、 $a < b < b+1 < c$ なときにだけ起きる。逆順同士なので一般性を失わず、 Γ が前者の順列であるとする。

b から始まって $b+1$ まで探索するときを考える。明らかに、SeqPair-Qseq は rb を 1 回たどった後に rs を続ける。始点 b より大きな c があるので、 rb は c もしくはこれよりも手前に行く。 a は c よりも小さいので、 rb により c に到達するか、もしくは c よりも手前で b 未満の値に落ち込んで SeqPair-Qseq は停止する。このとき、SeqPair-Qseq は一つの隣接交差を発見している。

時間複雑度については、少々複雑な証明になるので、省略する。 ■

5 まとめ

隣接交差数を $n-3$ 以下に制限した sequence-pair にてどんな矩形パッキングでも表現可能であることを証明し、隣接交差数を n 以下に制限した sequence-pair を SSP として提案した。

そして、隣接交差のない sequence-pair を Q-sequence に入力サイズの線形時間にて変換できるアルゴリズムを提案し、その正当性を証明した。更に、sequence-pair 上の隣接交差を、sequence-pair のサイズと隣接交差数の和の線形時間にて列挙できるアルゴリズムを提案した。これらのアルゴリズムと既存手法を組み合わせることにより、矩形数を n 、隣接交差数を k として $O(n+k)$ 時間にて SSP の示唆する制約の下での最密パッキングを得ることができることを示した。

隣接交差数を $n-3$ に限定しても、「どんなパッキングでも表現できる」と「それに基づいたパッキングを線形時間で求められる」ことは保証できるが、良いパッキングを求め

て探索する際には、上記の 2 つの長所を保ったままできるだけ隣接交差数を少なく限定することが望まれる。 n が 5 以上では $n-3$ よりも少ない隣接交差数で表現できることが分かっており、隣接交差数が少なくとも $n - \lfloor \sqrt{4n-1} \rfloor$ は必要なことが示されているが、この数で十分かどうか、もし駄目なら幾つなら良いかは今後の課題である。

また、このように隣接交差数の制限された SSP がどのような性質を持っているかを調べ、さらに SSP の $O(n)$ 時間での隣接解生成操作の考案及び証明をすることも今後の課題である。

謝辞 本研究を進めるにあたり適切なご助言を頂いた東京工業大学 坂主圭史氏に感謝する。なお、本研究は CAD21 プロジェクトの一部である。

参考文献

- [1] H. Murata, K. Fujiyoshi, S. Nakatake, and Y. Kajitani: "Rectangle-Packing-Based Module Placement," in Proc. IEEE ICCAD, pp.472-479, 1995.
- [2] H. Murata, K. Fujiyoshi, and M. Kaneko: "VLSI/PCB Placement with Obstacles Based on Sequence Pair", IEEE Trans. CAD, vol.17, no.1, pp.60-68, 1998.
- [3] P. Guo, C.-K. Cheng, and T. Yoshimura: "An O-Tree Representation of Non-Slicing Floorplan," in Proc. DAC, pp.268-273, 1999.
- [4] T. Takahashi: "A New Encoding Scheme for Rectangle Packing Problem," in Proc. IEEE ASP-DAC, pp.175-178, 2000.
- [5] K. Fujiyoshi, and H. Murata: "Arbitrary Convex and Concave Rectilinear Block Packing using Sequence-Pair," IEEE Trans.on CAD, Vol.19, No.2, pp.224-233, 2000.
- [6] 高橋俊彦: "矩形パッキングのための最大重み減少列を求めるアルゴリズム", 信学技報 VLD96-30, pp.31-35, 1996.
- [7] X. Tang, and D.F. Wong: "FAST-SP: A FAST algorithm for Block Placement based on Sequence-Pair," in Proc. ASP-DAC, pp.521-526, 2001.
- [8] J. Lai, M.-S. Lin, T.-C. Wang, and Li-C. Wang: "Module Placement with Boundary Constraints Using the Sequence-Pair Representation," in Proc. ASP-DAC, pp.515-520, 2001.
- [9] 渡辺知巳, 村田洋, 藤吉邦洋: "Sequence-Pair で表されるモジュールの相対位置を保つ最適フロアプラン", 第 9 回 回路とシステム (軽井沢) ワークショップ, pp.457-462, 1996.
- [10] H. Murata, K. Fujiyoshi, T. Watanabe, and Y. Kajitani: "A Mapping from Sequence-Pair to Rectangular Dissection," in Proc. IEEE ASP-DAC, pp.625-633, 1997.
- [11] K. Sakanushi, K. Midorikawa, and Y. Kajitani, "A General and Fast Floorplanning by Reduct-Seq Representation," 信学技報 VLD2000-24, pp.109-116, 2000.
- [12] K. Sakanushi, and Y. Kajitani, "Counting of the topological dissections by Reduct-Seq Representation," 信学技報 COMP2000-17, pp.25-32, 2000.
- [13] K. Sakanushi and Y. Kajitani, "The Quarter-State Sequence (Q-sequence) to Represent the Floorplan and Applications to Layout Optimization," in Proc. IEEE APC-CAS, pp.829-832, 2000.
- [14] L. Stockmeyer: "Optimal Orientations of Cells in Slicing Floorplan Designs," Info.and Control, vol.57, pp.91-101, 1983.