

統計的タイミング解析のための 遅延およびスリューの分布表現手法について

高橋 真吾

築山 修治

中央大学大学院理工学研究科

〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27

E-mail: sint@tsuki.elect.chuo-u.ac.jp, tsuki@elect.chuo-u.ac.jp

あらまし 素子の性能ばらつきを考慮した統計的タイミング解析手法をより高精度化するためには、遷移時間(slew)に対する考慮が必要で、素子遅延の分布を slew によって動的に修正する機構が必要となる。本文では、混合正規分布を用いて遅延および slew の分布を表現する手法と、それらの分布を同時に伝搬する新しい統計的タイミング解析手法を提案する。提案手法はモンテカルロ法との比較により、既存の正規分布を用いた手法より精度が向上することが確認できた。

キーワード 統計的タイミング解析、混合正規分布、遅延時間、遷移時間、ばらつき、同時遷移

On Distribution Functions of Delays and SLEWS for Statistical Timing Analysis

Shingo TAKAHASHI

and

Shuji TSUKIYAMA

Graduate School of Science and Engineering, Chuo University,

1-13-27 Kasuga, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8551, Japan

E-mail: sint@tsuki.elect.chuo-u.ac.jp, tsuki@elect.chuo-u.ac.jp

Abstract In order to improve the performance of the current statistical timing analysis, slew distributions must take into account and a mechanism to propagate them together with delay distributions along signal paths is necessary. This paper introduces Gaussian mixture models to represent the slew and delay distributions, and proposes a new algorithm for the next statistical timing analysis which changes the delay distributions of elements dynamically by propagated slews. The proposed model and algorithm are evaluated by comparing with Monte Carlo simulation. The experimental results show that the accuracy is increased from the current statistical timing analysis using Gaussian distributions by the proposed model and algorithm.

Keyword statistical timing analysis, Gaussian mixture model, delay, slew, variability, multiple input switching

1. はじめに

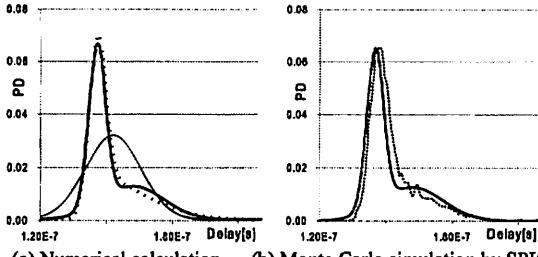
種々のばらつき要因の影響を考慮してタイミング解析を行う統計的静的遅延解析(S-STA)手法は、パス毎に処理を行うpath-basedな手法[1,2]と、点を位相幾何学的順序で処理するblock-basedな手法[3-8]に分類できる[9,10]。この内、大規模回路にも適用可能なblock-basedな手法では、回路の接続関係をアサイクリックグラフ $G=(N,A)$ で表し、信号の伝達経路に対応する各枝 e に、そこで生じる遅延 $d(e)$ を重みとして与え、各点 v への遅延 $D(v)$ を計算するという操作が繰り返される[9,10]。この枝遅延 $d(e)$ は確率変量で、その分布、例えば確率密度関数(PDF)が与えられるが、これまでのblock-basedなS-STAでは、 $d(e)$ の分布は解析を通して一定で、途中で変化しないものとしている。

しかし、枝 $e=(v,w)$ が論理ゲートの入出力端子間あるいは配線のいずれかを表す場合であっても、それに付随した遅延 $d(e)$ は、入力の遷移時間(slew)、すなわち点 v における信号の slew に依存することから、 $d(e)$ の分布は slew の分布に依存する。また、slew は点 v への信号の伝達経路に依存するから、 $d(e)$ の分布が信号の伝達経路に依存することになる。従って、S-STA をより高精度にするには、信号の slew も確率変量として扱い[11]、各点への遅延 $D(v)$ を計算する際、同時にその点における信号の slew $T(v)$ も

計算し、 $D(v)$ と $T(v)$ を用いて、枝 $e=(v,w)$ の遅延 $d(e)$ の分布(平均や分散)を動的に変える必要がある。

一方、統計的タイミング解析手法は、取り扱う分布形状により、正規分布を用いるもの[1,2,3,7]と、一般の分布を扱うもの[4,5,6,8]とに分類できる。これらの中、正規分布を用いるものは、分布の表現が容易であることやそれらの間に存在する相関を扱い易いなど、大規模回路の解析に適用しやすい。しかし、統計的タイミング解析における重要な演算の一つである統計的 Max 演算において、正規分布であることが保証できなくなるという問題点がある[9]。

例えば、互いに独立な変量 $x \sim N(140, 23^2)$ および $y \sim N(140, 3.8^2)$ の大きい方 $z = \text{Max}[x, y]$ の PDF は、図 1(a)の大きい点線で示す形状となる。この z の分布の平均 $E[z]$ および分散 $V[z]$ は Clark の手法[12]を用いて計算でき、 $N(E[z], V[z])$ の PDF は図 1 の細い点線となる。これらから明らかのように、 z の分布を正規分布で近似すると誤差が生じる[9]。これを解決するため、正規分布の 2 乗和を用いる手法など[4]が提案されているが、計算手順は正規分布の線形和を用いる手法に比べて複雑であり、計算時間がかかる。



(a) Numerical calculation (b) Monte Carlo simulation by SPICE
Fig. 1: 統計的 Max の確率密度関数

そこで、本文では、分布を正規分布の確率重み付き線形と(混合正規分布表現: GMM : Gaussian Mixture Model)で表す手法を提案する。例えば、図 1(a) の ν の分布を、提案する混合正規分布で表すと、同図の実線となり、近似精度が増す。また、slew も混合正規分布で表し、遅延と slew の分布を同時に伝搬させる手法も提案する。slew の分布は単一の正規分布で表現できず、複数の分布に分かれる傾向にある[11,13]ことから、混合正規分布で表現することの利点が多い。さらに、提案手法の利点を示す実験結果も示す。

なお、slew を伝搬させることにより、2 入力以上の論理ゲートにおける信号の同時遷移(Multiple Input Switching)の確率を見積もることも可能となるため[13]、同時遷移による遅延増加のばらつきも考慮した S-STA を構築できる可能性がある。ちなみに、同時遷移を考慮する手法は幾つか提案されているが[14-17]、同時遷移の生起確率や入力波形の重なりの割合を slew も考慮して決定する手法は提案されていない。本文で提案する遅延と slew を同時に伝搬させる手法によって、この問題を解決できる。ただし、本文では紙数の関係で、同時遷移は扱わない。

ちなみに、図 1(a) に示した分布 x, y を遅延分布とし、これらに対応した slew も与え、2 入力 NOR ゲートの出力遅延のばらつきを SPICE とモンテカルロ法により求めた結果を図 1(b) に示す。点線がモンテカルロ法による結果であり、実線が同図(a)の混合正規分布である。点線が実線より右にずれているのは、同時遷移の影響である。

以下では、2 章において GMM を用いた遅延と slew を同時に伝搬させる次世代 S-STA の概要を示し、3 章において枝で実行する基本演算を、4 章において点で実行する遅延に対する基本演算を、5 章において点で実行する slew に関する基本演算を説明する。6 章においてモンテカルロ法との比較結果を示し、7 章においてまとめを述べる。

2. GMM を用いた S-STA

タイミング解析したい回路の接続関係をアサイクリックグラフ $G = (N, A)$ で表す。このとき、各点は回路の端子に、各枝は、配線、論理ゲート、フリップフロップなど、信号伝達の経路に対応する。例えば、枝 $e = (v, w)$ が配線に対応する場合には、 v および w はそれぞれゲートの出力および入力端子に対応し、論理ゲートに対応する場合には、 v および w はそれぞれそのゲートの入力および出力端子に、フリップフロップに対応する場合には、 v および w はそれぞれそのフリップフロップのクロック入力端子および出力端子に対応する。

提案する S-STA 手法では、各枝 $e = (v, w)$ に対して、 e の入力遅延 $D_{in}(e)$ と入力 slew $T_{in}(e)$ から成る入力組 $(D_{in}(e), T_{in}(e))$ および出力遅延 $D_{out}(e)$ と出力 slew $T_{out}(e)$ から成る出力組 $(D_{out}(e), T_{out}(e))$ を考え、 G のソース点から出て行く各枝 e に対して、入力組 $(D_{in}(e), T_{in}(e))$ が与えられるものとする。そのとき、提案手法は、

G を位相幾何学的順序で走査しながら、各枝 e において、与えられた入力組 $(D_{in}(e), T_{in}(e))$ から出力組 $(D_{out}(e), T_{out}(e))$ を求める操作を行う。この操作を Carry 演算と呼ぶ。また、各点 v において、点 v に入ってくる枝 $e_i = (u_i, v)$ の出力組 $(D_{out}(e_i), T_{out}(e_i))$ から、 v から出て行く枝 $e_j = (v, w_j)$ の入力組 $(D_{in}(e_j), T_{in}(e_j))$ を求める操作を行う。この操作を Mix 演算と呼ぶ。この 2 種類の演算を位相幾何学的順序で行うことにより、回路のタイミング解析ができる。

これらの組 (D, T) の遅延 D および slew T は確率変量で、 g 個の大域的変量 r_i と局所変量の線形和で次式のように表されるものとする[10]。ここで、 x_D および x_T はそれぞれ D および T の局所変数である。

$$D = x_D + \sum_{i=1}^g s_i[D] \cdot r_i \quad (1)$$

$$T = x_T + \sum_{i=1}^g s_i[T] \cdot r_i \quad (2)$$

各 r_i ($1 \leq i \leq g$) は $N(0,1)$ で、これらは互いに独立で、 x_D および x_T とも独立とする。 x_D および x_T の確率密度関数(PDF)は 2 つの正規分布から成る混合正規分布で、以下では、これを 2-GMM と書く。

$$f_{xD}(x_D) = P_1 \cdot \frac{1}{\sigma_{xD1}} \cdot \phi\left(\frac{x_D - \mu_{xD1}}{\sigma_{xD1}}\right) + P_2 \cdot \frac{1}{\sigma_{xD2}} \cdot \phi\left(\frac{x_D - \mu_{xD2}}{\sigma_{xD2}}\right) \quad (3)$$

$$f_{xT}(x_T) = P_1 \cdot \frac{1}{\sigma_{xT1}} \cdot \phi\left(\frac{x_T - \mu_{xT1}}{\sigma_{xT1}}\right) + P_2 \cdot \frac{1}{\sigma_{xT2}} \cdot \phi\left(\frac{x_T - \mu_{xT2}}{\sigma_{xT2}}\right) \quad (4)$$

ここで、定数 P_1, P_2 は GMM の混合比を表す確率で、 $P_1 + P_2 = 1$ である。また、 $\phi(x)$ は $N(0,1)$ の PDF であり、次式である。なお、 $N(0,1)$ の分布関数(CDF)を $\Phi(x)$ と書く。

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right], \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(z) dz \quad (5)$$

これらの式(3), (4) は、 x_D が $N(\mu_{xD}, \sigma_{xD}^2)$ および $N(\mu_{xT}, \sigma_{xT}^2)$ から成る混合比が $P_1:P_2$ の 2-GMM であり、 x_T が同じ混合比を持つ $N(\mu_{xT}, \sigma_{xT}^2)$ および $N(\mu_{xT}, \sigma_{xT}^2)$ の 2-GMM であることを示す。以下では、確率 P_1 の分布を第 1 分布、確率 $P_2 = 1 - P_1$ の分布を第 2 分布と呼ぶ。

ばらつきの相関は、 x_D および x_T の各分布が、それぞれ 1 つの正規分布であると見なして取り扱う。例えば、 x_D と x_T の第 1 分布同士の相関係数 p_1 や、第 2 分布同士の相関係数 p_2 を定義する。 x_D の第 1 分布と x_T の第 2 分布および x_D の第 2 分布と x_T の第 1 分布の相関係数はどちらも 0 とする。なお、現段階では、 p_1 および p_2 を求める手法を確立していないため、slew T の分布は扱っておらず、各 $s_i[T]$ は 0 であり、 x_T の分散 $V[x_T]$ も 0 としている。

式(1)あるいは(2)で表された変量 Z の平均 $E[Z]$ および分散 $V[Z]$ はそれぞれ次式となる。ここで、 $Z \in \{D, T\}$, $j \in \{1, 2\}$ である。

$$E[Z] = E[x_Z] = \sum_{j \in \{1, 2\}} P_j \cdot \mu_{Zj} \quad (6)$$

$$V[Z] = \sum_{j \in \{1, 2\}} P_j \cdot (\sigma_{xZj}^2 + \mu_{Zj}^2) - E[Z]^2 + \sum_{i=1}^g s_i[Z]^2 \quad (7)$$

以下では、 μ_{Zj} を Z あるいは Z の局所変量 x_Z の第 j 分布の平均と呼び、

$$E_j[Z] = E_j[x_Z] = \mu_{Zj} \quad (8)$$

と書く。また、 Z の第 j 分布の分散 $V_j[Z]$ を次式で定義し、

$$V_j[Z] = \sigma_{xZj}^2 + \sum_{i=1}^g s_i[Z]^2 = V_{xj}[Z] + \sum_{i=1}^g s_i[Z]^2$$

σ_{xZj}^2 を Z の局所変量 x_Z の第 j 分布の分散と呼び、 $V_{xj}[Z]$ と書く。

$$V_{xj}[Z] = V_j[x_Z] = \sigma_{xZj}^2 \quad (9)$$

式(1)あるいは(2)で表された変量 Z_A および Z_B の共分散 $C[Z_A, Z_B]$ は、 Z_A の局所変量 x_{ZA} の第 j 分布と Z_B の局所変量 x_{ZB} の第 k 分布の相関係数 ρ_{xAjBk} ($j, k \in \{1, 2\}$) が与えられれば、次のように書ける。

$$C[Z_A, Z_B] = \sum_{j,k \in \{1, 2\}} P_{Aj} \cdot P_{Bk} \cdot \rho_{xAjBk} \cdot \sigma_{xZAj} \cdot \sigma_{xZBk} + \sum_{i=1}^g s_i[Z_A] \cdot s_i[Z_B] \quad (10)$$

以下では、 $\rho_{xAjBk} \cdot \sigma_{xZAj} \cdot \sigma_{xZBk} = C_{jk}[x_{ZA}, x_{ZB}]$ ($j, k \in \{1, 2\}$) を x_{ZA} の第 j 分布と x_{ZB} の第 k 分布の共分散と呼ぶ。これを用いれば、式(10)は次式となる。

$$C[Z_A, Z_B] = \sum_{j,k \in \{1, 2\}} P_{Aj} \cdot P_{Bk} \cdot C_{jk}[x_{ZA}, x_{ZB}] + \sum_{i=1}^g s_i[Z_A] \cdot s_i[Z_B] \quad (11)$$

3. 枝での Carry 演算

枝 e において、入力組 $(D_{in}(e), T_{in}(e))$ から出力組 $(D_{out}(e), T_{out}(e))$ を求める Carry 演算の概略を示す。

入力 slew $T_{in}(e)$ の信号に対して、枝 e で生じる遅延 d および出力 slew t は共に、 $T_{in}(e)$ 、負荷容量 $C(e)$ 、および e に付随する要因 $P(e)$ で決まる。ここで、 $P(e)$ は、 e が論理ゲートに対応するならば、論理ゲートの種類、トランジスタの伝達コンダクタンス、ゲート幅、ゲート長、および閾値電圧などであり、配線に対応するならば、寄生抵抗や寄生容量である。今、これらのばらつきが局所変量 x_e と大域的変量 r_i ($1 \leq i \leq g$) を用いて次式で与えられるものとする。

$$d = E[d] + s_x[d] \cdot x_e + \sum_{i=1}^g s_i[d] \cdot r_i \quad (12)$$

$$t = E[t] + s_x[t] \cdot x_e + \sum_{i=1}^g s_i[t] \cdot r_i \quad (13)$$

ここで、 x_e および各 r_i は互いに独立な $N(0,1)$ で、 x_e は他の枝 e' の局所変量 $x_{e'}$ とも独立であるとする。

これらの式に現れる平均や各係数は、 $P(e)$ ごとに用意した表を用いて $T_{in}(e)$, $C(e)$ の平均から求めるものとし、その操作を以下のように表す。

$$E[d] = d_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (14)$$

$$s_x[d] = d_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (15)$$

$$s_i[d] = d_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (16)$$

$$E[t] = t_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (17)$$

$$s_x[t] = t_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (18)$$

$$s_i[t] = t_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (19)$$

ここで、右辺は、各 $P(e)$ において、 $T_{in}(e)$ の平均 $E[T_{in}(e)]$ および $C(e)$ の平均 $E[C(e)]$ の関数であることを表す。より正確にするには、式(15), (16), (18), (19) のばらつき係数の計算において、 $T_{in}(e)$ の分散も用いる必要があるが、現状では考慮していない。従って、式(14) は既存の S-STA で用いられている遅延の式と変わらないように見えるが、動的に計算した 2-GMM $T_{in}(e)$ の成分分布毎に、その平均を利用して遅延計算している点が異なる。

これらの関数を実現した参照表を用い、 $T_{out}(e)$ の第 j 分布を $T_{in}(e)$ の第 j 分布から、次式で求める。

$$E[T_{out}(e)] = t_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (20)$$

$$s_x[T_{out}(e)] = t_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (21)$$

$$V_{xj}[T_{out}(e)] = t_{sx}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)]^2 \quad (22)$$

ただし、現状では $T_{in}(e)$ の分散を考慮していないので、式(21), (22) は利用していない。

遅延 $D_{out}(e)$ の第 j 分布は、 $D_{in}(e)$ の第 j 分布に、slew $T_{in}(e)$ の第 j 分布で決定される e での遅延 d を加えることにより求める。具体的には、次式で計算する。

$$E[D_{out}(e)] = E[D_{in}(e)] + d_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (23)$$

$$s_x[D_{out}(e)] = s_x[D_{in}(e)] + d_{in}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)] \quad (24)$$

$$V_{xj}[D_{out}(e)] = V_{xj}[D_{in}(e)]$$

$$+ t_{sx}[E[T_{in}(e)], E[C(e)] : P(e)]^2 + 2 \cdot C_{jj}[x_{in}, x_e] \quad (25)$$

ここで、 $C_{jj}[x_{in}, x_e]$ は $D_{in}(e)$ の局所変量 x_{in} の第 j 分布と $T_{in}(e)$ の第 j 分布に対応した枝遅延 d の局所変量 x_e との共分散である。これまでの S-STA では、これら局所変量は互いに独立と考えたが、提案手法では、どちらも入力 slew $T_{in}(e)$ の第 j 分布の影響を受けると考えるため、相関を考慮する。ただし、現状では、slew $T_{in}(e)$ の分散を考えないため、この項は無視している。

また、こうして得られた $D_{out}(e)$ の局所変量 x_{out} の第 j 分布と、他の変量 Z の局所変量 x_Z の第 k 分布との共分散 $C_{jk}[x_{out}, x_Z]$ は、次式で定められるべきである。

$$C_{jk}[x_{out}, x_Z] = C_{jk}[x_{in}, x_Z] + C_{jk}[x_e, x_Z] \quad (26)$$

x_e の分布が $T_{in}(e)$ の第 j 分布と相関を持つならば、 $T_{in}(e)$ の第 j 分布と相関を持つ x_Z とも相関を持つ。しかし、現状では $T_{in}(e)$ の分散を考えないため、 $C_{jk}[x_e, x_Z]$ の項は無視する。

$D_{out}(e)$ および $T_{out}(e)$ の混合比は、入力組の混合比 $P_1:P_2$ と同じとする。この操作の概要を図 2 に示す。

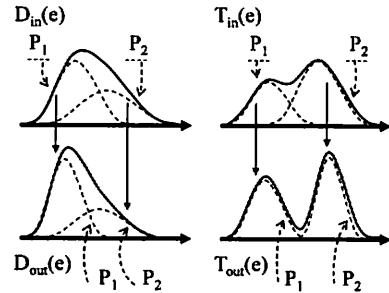


図 2: 枝での Carry 演算
Fig. 2: Carry operation at an edge

4. 点での遅延に対する Mix 演算

点 v に入ってきた枝の本数を $In(v)$ とし、各枝を $e_h = (u_{ih}, v)$ ($1 \leq h \leq In(v)$)、 e_h の出力組を $(D_{out}(e_h), T_{out}(e_h))$ とする。ここで行うべき操作は、 v に入ってきた枝の出力組から、 v から出て行く枝 $e_k = (v, w_k)$ の入力組 $(D_{in}(e_k), T_{in}(e_k))$ を求めることである。

$In(v)=1$ の場合は、 $D_{in}(e_k) = D_{out}(e_h)$, $T_{in}(e_k) = T_{out}(e_h)$ とするだけよいが、 $In(v) > 1$ の場合には、全ての $(D_{out}(e_h), T_{out}(e_h))$ の Max あるいは Min を求める操作が必要となる。なお、入ってくる全ての枝 e_h の入力組 $(D_{in}(e_h), T_{in}(e_h))$ を同時に考えることにより、同時遷移が生じたときの出力組 $(D_{out}(v_{MIS}), T_{out}(v_{MIS}))$ を求めることができれば[13]、同時遷移を扱える。

2-GMM で表された $D_{out}(e_h)$ の最大値 $\text{Max}[D_{out}(e_h) | 1 \leq h \leq In(v)]$ を求めるには、通常の S-STA と同様に、2 組の分布の Max を求める操作を繰り返す。以下では、2-GMM で表された 2 变量の大きい方の分布を求める手法について述べるが、小さい方 Min の分布も同様である。

変量 $x_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$ および $x_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$ の相関係数が ρ のとき、これらの大きい方 $\text{Max}[x_A, x_B]$ の分布の第 i 次のモーメント m_i は、2 变量標準正規分布の PDF $\phi_2(x_A, x_B; \rho)$ を用いて、式(28)で計算できる。

$$\phi_2(x_A, x_B; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{x_A^2 - 2\rho x_A x_B + x_B^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (27)$$

$$m_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\text{Max}(x_A, x_B)]^i}{\sigma_A \sigma_B} \cdot \phi_2\left(\frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A}, \frac{x_B - \mu_B}{\sigma_B}; \rho\right) dx_A dx_B$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x_A]^i}{\sigma_A \sigma_B} \cdot \int_{-\infty}^{x_A} \phi_2\left(\frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A}, \frac{x_B - \mu_B}{\sigma_B}; \rho\right) dx_B dx_A + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[x_B]^i}{\sigma_A \sigma_B} \cdot \int_{-\infty}^{x_B} \phi_2\left(\frac{x_A - \mu_A}{\sigma_A}, \frac{x_B - \mu_B}{\sigma_B}; \rho\right) dx_A dx_B \quad (28)$$

ここで、右辺の第 1 項は $x_A \geq x_B$ の場合に、第 2 項は $x_A \leq x_B$ の場合にに対応し、Clark の手法[12]を用いれば、これらは解析的に解ける。ちなみに、図 1(a) の太い点線はこの式を数値積分して求めたものである。

Clark の手法を用いれば、 $x_A \geq x_B$ となる確率 $\text{Pr}[x_A \geq x_B]$ および $x_A \leq x_B$ となる確率 $\text{Pr}[x_A \leq x_B]$ はそれぞれ次式となる。

$$\text{Pr}[x_A \geq x_B] = \Phi(\beta), \quad \text{Pr}[x_A \leq x_B] = \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \quad (29)$$

ここで、 α および β を次式である。

$$\alpha = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 \sigma_A \sigma_B \rho}, \quad \beta = \frac{\mu_A - \mu_B}{\alpha} \quad (30)$$

従って、式(28)を次式のように変形し、各項の 1 次、2 次のモーメント $m_1[x_A \geq x_B]$, $m_2[x_A \geq x_B]$ (あるいは $m_1[x_A \leq x_B]$, $m_2[x_A \leq x_B]$) を求め、これらのモーメントと等しいモーメントを持つ正規分布を用いれば、2-GMM を得ることができる。

$$m_1 = m_1[x_A \geq x_B] \cdot \Phi(\beta) + m_1[x_A \leq x_B] \cdot \Phi(-\beta) \quad (31)$$

この概念図を図 3(a)に示す。ここで、楕円は x_A, x_B の 2 变量正規分布の PDF の等高線を示し、 $x_A = x_B$ の左上側と右下側の分布を別の正規分布で表すことにより、2-GMM を得ている。

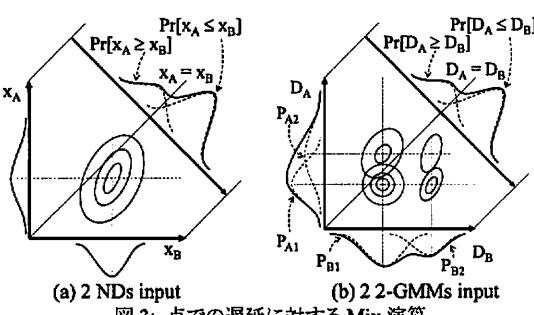


図3: 点での遅延に対するMix演算
Fig.3: Mix operation for delays at a vertex

これを拡張すれば、2-GMMである D_A と D_B の大きい方 $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ の分布を2-GMMで表す手法が得られる。その概念図を図3(b)に示す。 D_A と D_B が2-GMMの場合には、 D_A と D_B の2変量PDFは4つの2変量正規分布で構成される。

今、 D_A および D_B は共に式(1)で表され、その局所変量 x_{DA} および x_{DB} のPDFは式(3)で表されるものとする。すなわち、

$$D_A = x_{DA} + \sum_{i=1}^g s_i [D_A] \cdot r_i, \quad D_B = x_{DB} + \sum_{i=1}^g s_i [D_B] \cdot r_i$$

$$f_{xDA}(x_{DA}) = \sum_{j \in \{1,2\}} P_{Aj} \cdot \frac{1}{\sigma_{xDAj}} \cdot \phi\left(\frac{x_{DA} - \mu_{DAj}}{\sigma_{xDAj}}\right)$$

$$f_{xDB}(x_{DB}) = \sum_{k \in \{1,2\}} P_{Bk} \cdot \frac{1}{\sigma_{xDBk}} \cdot \phi\left(\frac{x_{DB} - \mu_{DBk}}{\sigma_{xDBk}}\right)$$

とする。このとき、 D_M およびその局所変量 x_{DM} のPDFを次のように表せばよい。

$$D_M = x_{DM} + \sum_{i=1}^g s_i [D_M] \cdot r_i \quad (32)$$

$$f_{xDM}(x_{DM}) = \sum_{q \in \{1,2\}} P_{Mq} \cdot \frac{1}{\sigma_{xDMq}} \cdot \phi\left(\frac{x_{DM} - \mu_{DMq}}{\sigma_{xDMq}}\right) \quad (33)$$

紙数の関係で証明は省略するが、以下のようなになる。 P_{M1} は $D_A \geq D_B$ となる確率 $\Pr[D_A \geq D_B]$ で、次式で与えられる。

$$P_{M1} = \Pr[D_A \geq D_B] = \sum_{j,k \in \{1,2\}} P_{Aj} P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk}) \quad (34)$$

$$\beta_{jk} = \frac{\mu_{DAj} - \mu_{DBk}}{\sigma_{jk}} \quad (35)$$

$$\alpha_{jk} = \sqrt{V_j[D_A] + V_k[D_B] - 2 \cdot C_{jk}[D_A, D_B]} \quad (36)$$

この式や以下の式は、図3(b)に示したPDFの各2変量正規分布に対して、式(28)のモーメントを計算することにより得られる。なお、局所変量 x_{DM} の分布は、 D_M の分布を求めた後、 r_i の寄与を除去することにより求めている。

$$P_{M2} = \Pr[D_A \leq D_B] = 1 - P_{M1} \quad (37)$$

$$S_i[D_M] = P_{M1} \cdot S_i[D_A] + (1 - P_{M1}) \cdot S_i[D_B] \quad (38)$$

$$\mu_{DM1} = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{Aj} P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk})}{P_{M1}} \cdot \left(\mu_{DAj} + V_{CAjk} \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(\beta_{jk})} \right) \quad (39)$$

$$\mu_{DM2} = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{Aj} P_{Bk} \cdot \Phi(-\beta_{jk})}{P_{M2}} \cdot \left(\mu_{DBk} + V_{CBjk} \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(-\beta_{jk})} \right) \quad (40)$$

$$\sigma_{xDM1}^2 = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{Aj} P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk})}{P_{M1}} \cdot m_{2jk1} - \sum_{i=1}^g S_i[D_M]^2 - \mu_{DM1}^2 \quad (41)$$

$$\sigma_{xDM2}^2 = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{Aj} P_{Bk} \cdot \Phi(-\beta_{jk})}{P_{M2}} \cdot m_{2jk2} - \sum_{i=1}^g S_i[D_M]^2 - \mu_{DM2}^2 \quad (42)$$

ここで、 V_{CAjk} , V_{CBjk} , m_{2jk1} および m_{2jk2} は次式である。

$$V_{CAjk} = \frac{V_j[D_A] - C_{jk}[D_A, D_B]}{\alpha_{jk}} \quad (43)$$

$$V_{CBjk} = \frac{V_k[D_B] - C_{jk}[D_A, D_B]}{\alpha_{jk}} \quad (44)$$

$$m_{2jk1} = \mu_{DAj}^2 + V_j[D_A] + [2 \cdot \mu_{DAj} - \beta_{jk} \cdot V_{CAjk}] \cdot V_{CAjk} \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(\beta_{jk})} \quad (45)$$

$$m_{2jk2} = \mu_{DBk}^2 + V_k[D_B]$$

$$+ [2 \cdot \mu_{DBk} + \beta_{jk} \cdot V_{CBjk}] \cdot V_{CBjk} \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(-\beta_{jk})} \quad (46)$$

さらに、 D_M と、 $Z = x_Z + \sum_{i=1}^g S_i[Z] \cdot r_i$ で表される他の変量 Z との共分散 $C[D_M, Z]$ は、 Z の局所変量 x_Z のPDFを、

$$f_{xZ}(x_Z) = \sum_{h \in \{1,2\}} P_{Zh} \cdot \frac{1}{\sigma_{xZh}} \cdot \phi\left(\frac{x_Z - \mu_{Zh}}{\sigma_{xZh}}\right)$$

とすると、以下のように書ける。

$$C[D_M, Z] = \sum_{q,h \in \{1,2\}} P_{Mq} \cdot P_{Zh} \cdot C_{qk}[x_{DM}, x_Z] + \sum_{i=1}^g S_i[D_M] \cdot S_i[Z] \quad (47)$$

$$C_{1h}[x_{DM}, x_Z] = \frac{P_{Zh}}{P_{M1}} \cdot \sum_{j,k \in \{1,2\}} P_{Aj} \cdot P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk}) \cdot J_{jkh1} \quad (48)$$

$$C_{2h}[x_{DM}, x_Z] = \frac{P_{Zh}}{P_{M2}} \cdot \sum_{j,k \in \{1,2\}} P_{Aj} \cdot P_{Bk} \cdot \Phi(-\beta_{jk}) \cdot J_{jkh2} \quad (49)$$

ただし、 J_{jkh1} および J_{jkh2} はそれぞれ次式である。

$$J_{jkh1} = C_{jh}[x_{DA}, x_Z] + \frac{C_{jh}[x_{DA}, x_Z] - C_{jh}[x_{DB}, x_Z]}{\alpha_{jk}} \cdot \left(\mu_{DAj} - \beta_{jk} \cdot V_{CAjk} \right) \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(\beta_{jk})} \quad (50)$$

$$J_{jkh2} = C_{kh}[x_{DB}, x_Z] - \frac{C_{jh}[x_{DA}, x_Z] - C_{jh}[x_{DB}, x_Z]}{\alpha_{jk}} \cdot \left(\mu_{DBk} + \beta_{jk} \cdot V_{CBjk} \right) \cdot \frac{\phi(\beta_{jk})}{\Phi(-\beta_{jk})} \quad (51)$$

なお、上に示した式はいずれも、次に述べるslewと対比し易いような記述にしており、実際に計算する場合には、式をさらに展開し、丸め誤差の影響が少なくなるようにしている。

5. 点でのSlewに対するMix演算

ここでは、前節で述べた $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ の分布を求める操作に伴って、 D_M と組を成す T_M を T_A および T_B の分布から計算する手法について述べる。その手法は、 D_M の分布を $D_A \geq D_B$ のときの分布とそれ以外の分布に分けたように、 T_M の分布も同様に分け、各分布を D_M を生成したときと同じ確率重み付き和で求めようというものである。 D_A および D_B がともに正規分布で表される場合の概念図を図4に示す。

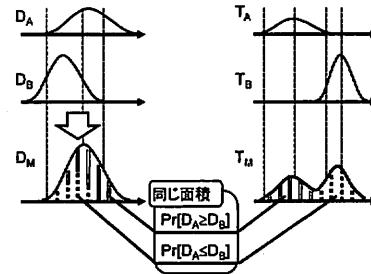


図4: 点でのslewに対するMax演算
Fig. 4: Mix operation for slews at a vertex

今、出力組 $(D_A, T_A), (D_B, T_B)$ に対して、 $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ が前節のようにならされたとする。また、 T_A, T_B は共に式(2)で表され、その局所変量 x_{TA} および x_{TB} のPDFは式(4)で表されるものとする。すなわち、次式する。

$$T_A = x_{TA} + \sum_{i=1}^g S_i[T_A] \cdot r_i, \quad T_B = x_{TB} + \sum_{i=1}^g S_i[T_B] \cdot r_i$$

$$f_{xTA}(x_{TA}) = \sum_{j \in \{1,2\}} P_{Aj} \cdot \frac{1}{\sigma_{xTAj}} \cdot \phi\left(\frac{x_{TA} - \mu_{TAj}}{\sigma_{xTAj}}\right)$$

$$f_{xTB}(x_{TB}) = \sum_{k \in \{1,2\}} P_{Bk} \cdot \frac{1}{\sigma_{xTBk}} \cdot \phi\left(\frac{x_{TB} - \mu_{TBk}}{\sigma_{xTBk}}\right)$$

このとき、 $D_M = \text{Max}[D_A, D_B]$ に対応した $T_M = \text{Mix}[T_A, T_B]$ およびその局所変量 x_{TM} のPDFを次式で表すには、

$$T_M = x_{TM} + \sum_{i=1}^g S_i[T_M] \cdot r_i$$

$$f_{xTM}(x_{TM}) = \sum_{q \in \{1,2\}} P_{Mq} \cdot \frac{1}{\sigma_{xTMq}} \cdot \phi\left(\frac{x_{TM} - \mu_{TMq}}{\sigma_{xTMq}}\right)$$

T_M の第 q 分布($q \in \{1,2\}$)を、 D_M の第 q 分布の混合比を用いて、次のように構成する。

$$\mu_{TM1} = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{A1} P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk})}{P_{M1}} \cdot \mu_{TAj} \quad (53)$$

$$\mu_{TM2} = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{A1} P_{Bk} \cdot \Phi(-\beta_{jk})}{1 - P_{M1}} \cdot \mu_{TBk} \quad (54)$$

$$S_i[T_M] = P_{M1} \cdot S_i[T_A] + (1 - P_{M1}) \cdot S_i[T_B] \quad (55)$$

$$\sigma_{xTM1}^2 = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{A1} P_{Bk} \cdot \Phi(\beta_{jk})}{P_{M1}} \cdot (\mu_{TAj}^2 + V_j[T_A]) \\ - \sum_{l=1}^g S_l[T_M]^2 - \mu_{TM1}^2 \quad (56)$$

$$\sigma_{xTM2}^2 = \sum_{j,k \in \{1,2\}} \frac{P_{A1} P_{Bk} \cdot \Phi(-\beta_{jk})}{1 - P_{M1}} \cdot (\mu_{TBk}^2 + V_k[T_B]) \\ - \sum_{l=1}^g S_l[T_M]^2 - \mu_{TM2}^2 \quad (57)$$

ただし、上にも述べたように、今回は式(53), (54)しか用いていない。

6. 精度検証

提案手法の精度を評価するため、SPICE とモンテカルロ法で得られた結果を真値として、正規分布を用いた既存の S-STA と比較する。

実験で用いた回路は図 5 に示すもので、 $I_1 \sim I_4$ には立ち下がり入力を与えた。従って、各 NOR ゲートでは遅れて入ってきた方の入力で出力が決まるため、 $O_1 \sim O_5$ の各端子での遅延は最大遅延 (Max 演算の結果) になる。ただし、提案手法では考慮していない同時遷移が起こる可能性がある。また、配線遅延は考慮していない。

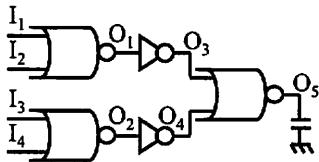


図 5: 実験回路
Fig. 5: An experimental circuit

各入力 I_i に、互いに独立な $N(E[D_i], V[D_i])$ の分布をする遅延 D_i と、slew の平均 $E[T_i]$ を与える。また、この回路の各 nMOS および pMOS の閾値電圧が、それぞれ $N(\mu_n, (0.2 \cdot \mu_n)^2)$ および $N(\mu_p, (0.2 \cdot \mu_p)^2)$ なる正規分布でばらつき、そのばらつきは他のトランジスタとは独立だとする。さらに、移動度も閾値電圧と相關 1 のばらつきをするものとする。従って、ここでは大域的変量 r_i は考えない。トランジスタモデルは文献[18]で用いたものを使った。

モンテカルロ法では、与えられた $E[D_i], V[D_i]$ に対して、入力 I_i 每に 1 万個の遅延 D_i を生成し、slew が $E[T_i]$ の立ち下がり入力として図 5 の回路に印加する。同時に、各トランジスタに対しても上に述べたばらつきを持った値を 1 万個生成し、各ゲートの出力を調べる。従って、1 回のモンテカルロシミュレーションで各出力には 1 万個の遅延の分布が得られる。

提案手法では、各入力に対して、モンテカルロ法と同じ $E[D_i], V[D_i], E[T_i]$ を与え、ゲートの出力端子において遅延に対する Mix 演算を行うが、枝での Carry 演算を実行するための表は作成できていないので、次のような方法で出力 slew の平均と遅延 d の分布を求めた。

インバータおよび NOR ゲートの各トランジスタに対して、上に述べた分布を持つ 500 個の閾値電圧と移動度の組を生成しておき、これらから出力負荷の平均 $E[C(e)]$ も計算しておく。インバータあるいは NOR ゲートの入出力間に対応する枝 e に対して、入力 slew の平均 $E[T_{in}(e)]$ と $E[C(e)]$ が与えられたならば、生成しておいた 500 組パラメータと $E[T_{in}(e)], E[C(e)]$ を用いて、モンテカルロシミュレーションにより、500 組の遅延 d と出力 slew $T_{out}(e)$ を求め、これらから $E[d], V[d], E[T_{out}(e)]$ を計算する。実際の表計算の場合には、与えられた $E[T_{in}(e)], E[C(e)]$ に対応するデータが無い

こともあるので、補間を行わねばならないが、今回はモンテカルロシミュレーションで直接計算しているので、補間の必要が無くなっている。

比較を行う既存の S-STA の枝 e での遅延 $d(e)$ の分布も、上で生成した 500 個の閾値電圧と移動度の組を用いて生成した。その際、入力 slew の値は、提案手法で得られる 2 つの分布の平均 $E_1[T]$ と $E_2[T]$ に、これらの確率をかけて求めた。すなわち、 $E[T] = P_1 \cdot E_1[T] + P_2 \cdot E_2[T]$ を入力 slew として 500 個の遅延を計算し、それを $d(e)$ の分布とした。従って、入力 slew を動的に変化させているという意味で、既存の S-STA よりは高精度の枝遅延を用いていると言える。

既存手法、提案手法、モンテカルロ法の比較は、各入力 I_i の遅延 D_i の平均 $E[D_i]$ を 80~100 nsec の範囲から、標準偏差 $\sqrt{D_i}$ を 0.33~34nsec の範囲から、互いに独立にランダムに 100 個選ぶ。さらに、これらと独立に slew の平均 $E[T_i]$ も 1~20 nsec の範囲からランダムに 100 個選び、これら 100 個のデータに対する結果を調べた。

モンテカルロ法で得られる CDF の 99.87% に相当する遅延に対して、既存手法の $\mu+3\sigma$ の遅延の相対誤差を図 6, 7, 8 の (a) に、提案手法の $\mu+3\sigma$ の遅延の相対誤差を図 6, 7, 8 の (b) に示す。実験回路には対称性があるので、図 6 に出力端子 O_1 および O_2 の、図 7 に出力端子 O_3 および O_4 の結果を纏めて示す。また、出力端子 O_5 の結果を図 8 に示す。これらの図において、各グラフの横軸は各出力端子で得られた 2-GMM の第 1 分布の確率 P_1 である。この確率が 0.5 の場合、どちらの入力も同程度に出力遅延を決定し、それらの標準偏差の差が大きい場合には、統計的 Max 演算が正規分布から離れてしまう。

これらの結果より、提案手法は $P_1 = 0.5$ の付近で、既存手法に比べて誤差が抑えられていることがわかる。しかし、 $P_1 = 0$ あるいは 1 の場合には、GMM の分布は正規分布と同じになるため、有意な差が生じない。しかし、この場合は出力が一方の入力で決定される場合であるから、Max 演算による誤差の生成は小さい。

なお、どちらの場合も相対誤差が負になっており、楽観的な見積もりになっていることがわかる。これは、図 1 で示したように、入力の同時遷移の影響で、実際の遅延値が Carry 演算で見積もった値より大きくなっているためである。

各端子 O_1 から O_5 での遅延の分布形状を比較するため、2 つの分布がどの程度似通っているかを示す Jensen-Shannon divergence (JS 値)[19] を調べた。これは常に正の値をとり、0 のとき同じ分布となる。モンテカルロ法と既存手法の JS 値は、端子 O_1 から O_5 において、最大で 0.068、平均で 0.016 であったのに対し、モンテカルロ法と既存手法では、最大で 0.062、平均で 0.012 となり、分布形状でも精度が向上していることが分かる。

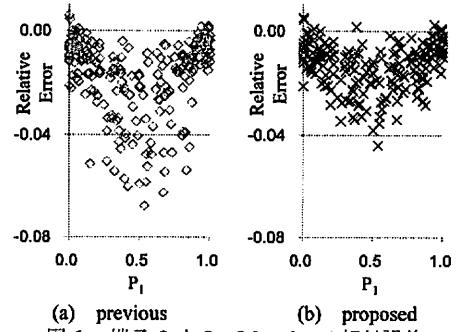


図 6: 端子 O_1 と O_2 での $\mu+3\sigma$ の相対誤差
Fig. 6: Relative error of $\mu+3\sigma$ at node O_1 and O_2

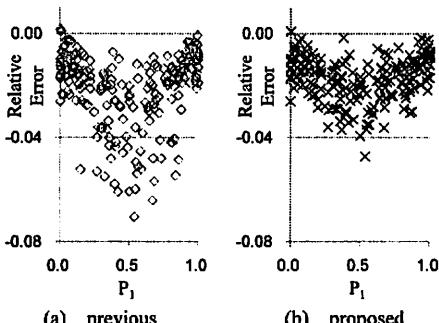


図7: 端子 O_3 と O_4 での $\mu+3\sigma$ の相対誤差
Fig.7: Relative error of $\mu+3\sigma$ at node O_3 and O_4

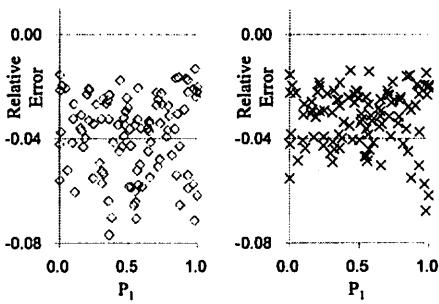


図8: 端子 O_3 での $\mu+3\sigma$ の相対誤差
Fig.8: Relative error of $\mu+3\sigma$ at node O_3

参考文献

- [1] S. Amin, N. Menezes, K. Killpack, F. Dartu, U. Choudhury, N. Hakim and Y. I. Ismail, " Statistical static timing analysis: how simple can we get?," Proc. DA Conf., pp.652-657, 2005.
- [2] M. Orshansky, and L. Leutzer, "A general probabilistic framework for worst case timing analysis," Proc. DA Conf., pp.556-561, 2002.
- [3] C. Viswesvariah, K. Ravindran, K. Kalafala, S. G. Walker, S. Narayan, " First-order incremental block-based statistical timing analysis," Proc. DAC, pp.331-336, 2004.
- [4] L. Zhang, W. Chen, Y. Hu, J. A. Gubner, C. C. Chen, " Correlation-preserved non-gaussian statistical timing analysis with quadratic timing model," Proc. DA Conf., pp.83-88, 2005.
- [5] H. Chang, V. Zolotov, C. Viswesvariah, S. Narayan, "Parameterized block-based statistical timing analysis with non-gaussian parameters and nonlinear delay functions," Proc. DA Conf., pp.71-76, 2005.
- [6] J. Singh, S. Saptekar, "Statistical timing analysis with correlated non-gaussian parameters using independent component analysis," Proc. DAC, pp.155-160, 2006.
- [7] 霜山, 築山, 高木, "バス遅延の相関を考慮した統計的静的遅延解析手法の実装とその評価," 電子情報通信学会論文誌 A, vol.J90-A, no.11, pp.826-838, 2008.
- [8] Y. Zhan, A. J. Strojwas, X. Li, L. T. Pileggi, D. Newmark, M. Sharma, " Correlation-aware statistical timing analysis with non-gaussian delay distributions," Proc. DA Conf., pp.77-82, 2005.
- [9] S. Tsukiyama, "Toward stochastic design for digital circuits - statistical static timing analysis -," Proc. ASPDAC, pp.762-767, 2004.
- [10] A. Srivastava, D. Sylvester, and D. Blaauw, Statistical Analysis and Optimization for VLSI: Timing and Power, Springer, 2005.
- [11] T. Kouno, and H. Onodera "Consideration of transition-time variability in statistical timing analysis," IEEE Conf. International SOC Conference, pp.207-210, 2006.
- [12] C.E.Clark, "The greatest of a finite set of random variables," Operation Research, vol.9, pp.85-91, 1961.
- [13] 高橋, 築山, "遷移時間ばらつきを考慮した統計的タイミング解析に関する一考察," 情処研情, vol.2007, no.105, pp.31-36, 2007-SLDM-131, 2007.
- [14] A. Agarwal, F. Dartu, and D. Blaauw, "Statistical gate delay model considering multiple input switching," Proc. DA Conf., pp.658-663, 2004.
- [15] T. Fukuoka, A. Tsuchiya, H. Onodera, "Statistical gate delay model for multiple input switching," Proc. ASPDAC, pp.286-291, 2008.
- [16] S. Kumar, C. Talarico, J. Wang, J. Li, " A probabilistic collocation method based statistical gate delay model considering process variations and multiple input switching," Proc. DATE, vol.2, pp.770-775, 2005.
- [17] R. Tayade, S. Nassif, J. Abraham, "Analytical model for the impact of multiple input switching noise on timing," Proc. ASPDAC, pp.514-516, 2008.
- [18] S. Takahashi, S. Tsukiyama, M. Hashimoto, I. Shirakawa, "A sampling switch design procedure for active matrix liquid crystal displays," IEICE Trans. Fundamentals, vol.E89-A, no.12, pp.3538- 3545, 2006.
- [19] J. Lin, "Divergence measures based on the shannon entropy," IEEE Trans. on Information Theory, vol. 37, no. 1, pp.145-151, 1991.

7. むすび

本文では、統計的 STA を高精度化することを目標に、遅延と slew の分布を混合正規分布で表現する手法を提案し、これら 2つを同時に伝搬させていく新しい S-STA 手法の概略を紹介した。これらは、Max 演算で生じる分布の非正規性に対処し、かつ正規分布の確率重み付き和であることから計算も容易で、相間の導入も容易である。また、slew も同時に伝搬させていることから、同時遷移の生起確率も計算できる可能性があり、さらなる精度向上が期待できる。なお、今回の提案手法における遅延や slew の表参照では、新たな表を必要とせず、既存のものを使用できるため、新たな特徴抽出にかかる手間が必要なく、容易に導入できる。

モンテカルロ法を用いた値を真値として、既存手法と比較した結果、GMM の導入と slew の伝搬の有効性が確認できた。

今後の課題には、同時遷移を考慮した Mix 演算の補正、大規模回路への適用、slew のばらつきの導入などがある。これらの内、slew のばらつきに関しては、遅延への影響やその相関など、調べる課題が多い。

謝辞

本研究の一部は、平成 19 年度科学研究費補助金基盤研究(C)19560353 の基に行われた。