ＢＣＭＰ型待ち行列網計算プログラム ＱＮＭＡＰについて

末松　和代　　　畑山　茂樹
（航空宇宙技術研究所）

1．はじめに

本稿では、ＢＣＭＰ型待ち行列網[1]で表現できるモデルの特性評価用に開発したプログラムＱＮＭＡＰ(Queueing Network Model Analyzing Program)について述べる。

本プログラムでは複数個の開放型部分連鎖と複数個の閉鎖型部分連鎖をもつ待ち行列網が計算できる。各センタのサービス規律はタイプ1からタイプ4のいずれかが指定できるが、可変サービス率をもつタイプ1のセンタは閉鎖型部分連鎖に従う客のみしか扱えない。また、客は異るクラスに遷移することが可能である。本プログラムでは、このような一般的な混合型待ち行列網を計算するために、文献2に示された方法を用いている。すなわち、混合型待ち行列網における平衡状態確率を求めるために、閉鎖型部分連鎖に従う客のみに関する周辺分布を導くことにより解く。こうして、各センタにおける閉鎖型部分連鎖に関する統計量が求まれば開放型部分連鎖に関する統計量，センタに関する統計量、各センタのクラス毎の統計量も全て求まる。本稿では、ＱＮＭＡＰで使用しているこれらの計算式を示すとともに、ＱＮＭＡＰの構造、使用例を示す。

2．混合型待ち行列網の計算

網内のセンタ数をＭとし、各センタは下表に示す6種類のうちのいずれかのサービス規律に従うものとする。いま、iをあるセンタ，cをあるクラスとし、対（i,c）が異るものに1から順次番号をつけそれを node と呼ぶ。また、node s から node r への客の遷移確率を p_{sr} で表わす。さらに、網内の部分連鎖の数をＮとし、その内の1～Ｌまでを閉鎖型部分連鎖，Ｌ+1～Ｎまでを開放型部分連鎖とする。網外から開放型部分連鎖ℓへの客の到着は一定の到着率 λ_ℓ ($\ell=L+1\sim N$)のポアソン到着とし、到着した客は確率 g_r で node r の客となるものとする。また、閉鎖型部分連鎖ℓに属する客数を K_ℓ ($\ell=1\sim L$)とする。いま、${}_\ell R^*$ を部分連鎖ℓに属する node の集合とし、e_r を平衡状態における客の node r への平均訪問回数とすると、e_rは次式から求まる。

$$e_r = g_r + \Sigma_{s\in_\ell R^*} e_s \cdot p_{sr} \qquad (r\in{}_\ell R^*,\ \ell=1\sim N)$$

ここで、$\ell=1\sim L$ に対して $g_r=0$，$\ell=L+1\sim N$ に対して $\Sigma_{r\in_\ell R^*} g_r=1$ とする。次に、センタiに属する node r に関して E_r を次のように定義する。

タイプ	サービス規律	サーバ数	サービス率	備考
1（先着順）	FCFS	1	μ_i	センタiのサービス率は、全てのnodeにおいて等しい.
	FS	m_i	$n_i\mu_i$ $(n_i\le m_i)$ $m_i\mu_i$ $(n_i>m_i)$	
	VS	1	$\mu_i(n_i)$	
2（プロセッサシェアリング）	PS	1	μ_{ir}	センタiのサービス率はnode毎に異っていてもよい.
3（無限大サーバ）	IS	∞		
4（後着順割込型）	LCFS	1		

サービス規律

$$
E_r = \begin{cases} \dfrac{e_r^*}{\mu_i} & \text{FCFS, FS のとき} \\ \dfrac{e_r^*}{\mu_{ir}} & \text{PS, IS, LCFS のとき} \\ e_r^* & \text{VS のとき} \end{cases}
$$

ただし $e_r^* = \begin{cases} e_r & \ell = 1 \sim L \text{ のとき} \\ \lambda_\ell e_r & \ell = L+1 \sim N \text{ のとき} \end{cases}$

このとき、平衡状態における混合型待ち行列網の状態が $S' = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_M)$ である確率を $P(S')$ で表わし、正規化定数を $C(\vec{K})$，$\vec{K} = (K_1, K_2, \cdots, K_L)$ で表わすと次式が成り立つ。

$$
P(S' = (\vec{z}_1, \vec{z}_2, \cdots, \vec{z}_M)) = \prod_{i=1}^{M} h_i(\vec{z}_i) \ / \ C(\vec{K})
$$

ここでセンタ i に関して

n_{ir} ： センタ i に属する node r の客数

${}_\ell R_i^*$ ： センタ i に属し、かつ部分連鎖 ℓ に属する node の集合

$$
\begin{aligned}
\vec{z}_i &= ({}_0m_i, {}_1m_i, \cdots, {}_Lm_i) \\
{}_0m_i &= \sum_{\ell=L+1}^{N} \sum_{r \in {}_\ell R_i^*} n_{ir} \\
{}_\ell m_i &= \sum_{r \in {}_\ell R_i^*} n_{ir} \qquad (\ell = 1 \sim L) \\
{}_c m_i &= \sum_{\ell=1}^{L} {}_\ell m_i \\
m_i &= {}_0m_i + {}_c m_i \\
{}_0E_i &= \sum_{\ell=L+1}^{N} \sum_{r \in {}_\ell R_i^*} E_r \\
{}_\ell E_i &= \sum_{r \in {}_\ell R_i^*} E_r \qquad (\ell = 1 \sim L)
\end{aligned}
$$

とすると、センタ i の状態が $\vec{z}_i$ である正規化されていない状態確率 $h_i(\vec{z}_i)$ は次式で表わされる。

・FCFS，PS，LCFS のとき

$$
h_i(\vec{z}_i) = m_i! \, \frac{{}_0E_i^{\,{}_0m_i}}{{}_0m_i!} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}
$$

・IS のとき

$$
h_i(\vec{z}_i) = \frac{{}_0E_i^{\,{}_0m_i}}{{}_0m_i!} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}
$$

・FS のとき

$$
h_i(\vec{z}_i) = \begin{cases} \dfrac{{}_0E_i^{\,{}_0m_i}}{{}_0m_i!} \displaystyle\prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!} & m_i \leqq m_i \text{ のとき} \\ \dfrac{m_i!}{m_i! \, m_i^{\,m_i - m_i}} \dfrac{{}_0E_i^{\,{}_0m_i}}{{}_0m_i!} \displaystyle\prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!} & m_i > m_i \text{ のとき} \end{cases}
$$

・VS のとき

$$
h_i(\vec{z}_i) = \frac{m_i!}{A_i(m_i)} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}
$$

ここで $A_i(m_i) = \begin{cases} 1 & m_i = 0 \text{ のとき} \\ \prod_{j=1}^{m_i} \mu_i(j) & m_i > 0 \text{ のとき} \end{cases}$

文献2の方法により、$h_i(\vec{z}_i)$ からそのセンタに存在する閉鎖型部分連鎖に従う客のみに関する周辺分布 $d_i(\vec{z}_i)$，$\vec{z}_i = ({}_1m_i, {}_2m_i, \cdots, {}_Lm_i)$ を導くと次式を得る。

・FCFS，PS，LCFS のとき

$$
d_i(\vec{z}_i) = \frac{{}_c m_i!}{(1 - {}_0E_i)^{{}_c m_i + 1}} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}
$$

・ISのとき

$$d_i(\vec{x}_i) = e^{{}_0E_i} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}$$

・FSのとき

$$d_i(\vec{x}_i) = \left\{ \frac{m_i^{\,m_i+1}}{m_i!\,(m_i - {}_0E_i)^{{}_cm_i+1}} + y_i({}_cm_i) \right\} {}_cm_i! \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}$$

ここで

$$y_i({}_cm_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{{}_cm_i!} \sum_{n=0}^{m_i-{}_cm_i} \dfrac{{}_0E_i^{\,n}}{n!} \left(1 - \dfrac{m_i^{\,m_i-{}_cm_i-n}\,(n+{}_cm_i)!}{m_i!}\right) & 0 \le {}_cm_i < m_i \text{ のとき} \\ 0 & {}_cm_i \ge m_i \text{ のとき} \end{cases}$$

・PSのとき

$$d_i(\vec{x}_i) = \frac{{}_cm_i!}{A_i({}_cm_i)} \prod_{\ell=1}^{L} \frac{{}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}}{{}_\ell m_i!}$$

このとき、平衡状態における混合型待ち行列網の状態が $s=(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_M)$ である確率を $P(s)$ で表わすと、

$$P(s=(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_M)) = \prod_{i=1}^{M} d_i(\vec{x}_i) \Big/ C(\vec{K})$$

となる。ここで

$$C(\vec{K}) = \sum_{s\in F} \prod_{i=1}^{M} d_i(\vec{x}_i)$$

$$F = \left[\, s = (x_1, x_2, \cdots, x_M)\ ;\ K_\ell = \sum_{i=1}^{M} {}_\ell m_i\ ,\ \ell = 1 \sim L \,\right]$$

である。

2.1 閉鎖型部分連鎖に関するセンタiの統計量

正規化定数 $C(\vec{K})$ およびセンタiの閉鎖型部分連鎖に従う客のみに関する状態確率 $P_i(\vec{x}_i)$ は、文献3の方法により計算できる。この値をもとにして、閉鎖型部分連鎖に関するセンタiの平均稼動サーバ数 $SO_c(i)$、平均客数 $QL_c(i)$ を計算する。

いまセンタiにおいて、閉鎖型部分連鎖に従う客数が ${}_cm_i$ のときに開放型部分連鎖に従う客数が ${}_om_i$ である条件付き確率を $P_i({}_om_i/{}_cm_i)$、またそれらの結合確率を $P_i({}_om_i, {}_cm_i)$ であるとし、閉鎖型部分連鎖内の全客数を K_t，$K_t = \sum_{\ell=1}^{L} K_\ell$ とする。このとき、$SO_c(i)$、$QL_c(i)$ は次式で表わされる.

$$SO_c(i) = \sum_{{}_cm_i=1}^{K_t} \sum_{{}_om_i=0}^{\infty} P_i({}_om_i, {}_cm_i) \times \frac{{}_cm_i}{{}_om_i + {}_cm_i} \times \min({}_om_i + {}_cm_i, m_i)$$

$$QL_c(i) = \sum_{n=1}^{K_t} P_i({}_cm_i = n) \cdot n$$

ここで次の関係式を用いると、$SO_c(i)$ はサービス規律毎に付表1に示すようになる。

$$P_i({}_om_i, {}_cm_i) = P_i({}_om_i/{}_cm_i) \cdot P_i({}_cm_i) = \frac{h_i(\vec{x}_i)}{d_i(\vec{x}_i)} \cdot P_i({}_cm_i)$$

また、これらの結果にもとずき、部分連鎖 ℓ の平均稼動サーバ数 $SO_\ell(i)$、平均客数 $QL_\ell(i)$ も付表1に示すようになる。

さらに、閉鎖型部分連鎖 ℓ に属する node r の平均稼動サーバ数 $so(r)$、平均客数 $ql(r)$ は次のようにして求められる.

部分連鎖 ℓ に従う客数が ${}_\ell m_i$ のときに node r ($r \in {}_\ell R_i^+$) の客数が n_{ir} である確率 $P_i(n_{ir}/{}_\ell m_i)$ は

$$P_i(n_{ir}/{}_\ell m_i) = {}_{{}_\ell m_i}C_{n_{ir}}\, E_r^{\,n_{ir}}\, ({}_\ell E_i - E_r)^{{}_\ell m_i - n_{ir}} \Big/ {}_\ell E_i^{\,{}_\ell m_i}$$

であるから、$ql(r)$ は次式のようになる。

$$ql(r) = \sum_{eMi=1}^{K_e} P_i(eMi) \sum_{Mir=1}^{eMi} P_i(Mir/eMi)\cdot Mir = QL_e(i)\times\frac{Er}{eEi}$$

また、サービス規律がＩＳ以外の時に部分連鎖 e に従う客数が eMi の場合を考える。この場合に、部分連鎖 e の客がサービスされていた時に node r の客がサービスされる確率 $Sr(eMi)$ は、

$$Sr(eMi) = \sum_{Mir=1}^{eMi} P_i(Mir/eMi)\times\frac{Mir}{eMi} = \frac{Er}{eEi}$$

となり、eMi の値に関係なく一定である。また、ＩＳの場合には平均稼動サーバ数と平均客数が等しい。したがって、サービス規律に関係なく

$$so(r) = SO_e(i)\times\frac{Er}{eEi}$$

が成り立つ。

ここで、$so(r)$、$ql(r)$ から node r の平均滞在時間 $qt(r)$、平均待ち客数 $wl(r)$、平均待ち時間 $wt(r)$、単位時間当りの平均処理客数 $tp(r)$ を求める。まず、$wl(r)$ は次式で表わされる。

$$wl(r) = ql(r) - so(r)$$

また、リトルの公式から次の関係式が導ける。

$$\frac{ql(r)}{qt(r)} = \frac{wl(r)}{wt(r)} = \frac{so(r)}{st(r)} = tp(r)$$

ここで、$st(r)$ は node r の平均サービス時間であり次式で定義されるので $qt(r)$、$wt(r)$、$tp(r)$ が求まる。

$$st(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu i} & \text{FCFS, FS のとき} \\ \dfrac{1}{\mu ir} & \text{PS, IS, LCFS のとき} \end{cases}$$

ただし、サービス規律がＦＳの場合には、以下に示す $TP_e(i)$, $tp(r)$ を求めることにより、$qt(r)$, $wt(r)$ が求まる。

$$TP_e(i) = \sum_{mi=1}^{Kt} P_i(mi)\cdot\mu i(mi) \sum_{eMi=1}^{mi} P_i(eMi/mi)\frac{eMi}{Mi}$$

$$tp(r) = TP_e(l)\times\frac{Er}{eEi}$$

2.2 開放型部分連鎖に関するセンタ i の統計量

開放型部分連鎖に関するセンタ i の平均稼動サーバ数 $SO_o(i)$、平均客数 $QL_o(i)$ は次式で表わされる。

$$SO_o(i) = \sum_{oMi=1}^{\infty}\sum_{cMi=0}^{Kt} P_i(oMi, cMi)\times\frac{oMi}{oMi+cMi}\times\min(oMi+cMi, Mi)$$

$$QL_o(i) = \sum_{m=1}^{\infty} P_i(oMi=m)\cdot m$$

ここで、次の関係式

$$P_i(oMi) = \sum_{cMi=0}^{Kt} P_i(oMi, cMi)$$

を用いて、サービス規律毎に $SO_o(i)$、$QL_o(i)$ を求めると付表２のようになる。特に $SO_o(i)$ は、サービス規律に関係なく oEi に等しくなることがわかる。

また、開放型部分連鎖 ℓ に属する node r の平均稼動サーバ数 $so(r)$, 平均客数 $q\ell(r)$は、オ2.1項と同様の方法により次式となる.

$$so(r) = SO_\ell(i) \times \frac{E_r}{{}_0E_i}$$

$$q\ell(r) = QL_\ell(i) \times \frac{E_r}{{}_0E_i}$$

その他の統計量 $qt(r)$、$wt(r)$、$w\ell(r)$、$t_{p\ell}(r)$ もオ2.1項の関係式により同様に求まる。

2.3 センタiの統計量

センタi の平均稼動サーバ数 $SO(i)$、平均客数 $QL(i)$、平均待ち客数 $WL(i)$ は次式で表わされる。

$$SO(i) = SO_o(i) + SO_c(i)$$
$$QL(i) = QL_o(i) + QL_c(i)$$
$$WL(i) = QL(i) - SO(i)$$

また、平均滞在時間 $QT(i)$、平均待ち時間 $WT(i)$、単位時間当りの平均処理客数 $TP(i)$ は、

$$\frac{QL(i)}{QT(i)} = \frac{WL(i)}{WT(i)} = \frac{SO(i)}{ST(i)} = TP(i)$$

の関係式から求まる。ここで $ST(i)$はセンタiの平均サービス時間であり、次式より求められる.

$$ST(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_i} & \text{FCFS, FS のとき} \\ SO(i) \Big/ \sum_{\ell=1}^{L} TP_\ell(i) & \text{IS, PS, LCFS, VS のとき} \end{cases}$$

なお、センタiの利用率 $U(i)$ は、サービス規律毎に次式で表わされる.

$$U(i) = \begin{cases} SO(i) & \text{FCFS, PS, LCFS, VS のとき} \\ 1 - P_i({}_cm_i = 0)\cdot e^{-{}_0E_i} & \text{IS のとき} \\ 1 - \dfrac{P_i({}_cm_i=0)}{\sum_{m=0}^{m_i} \dfrac{{}_0E_i{}^m}{m!} + \dfrac{{}_0E_i{}^{m_i+1}}{m!\,(m_i - {}_0E_i)}} & \text{FS のとき} \end{cases}$$

3. QNMAPの概要と計算例

3.1 QNMAPの概要

プログラムQNMAPのゼネラルフローを、次頁に示す。

サブルーチンINPUTは網を定義する各種パラメータを読込む。そこで入力されたデータはサブルーチンCHKで調べられる。もし、網の定義に誤りがあったり不足したりするものがあると、エラーメッセージを出して処理を終了させる。サブルーチンLOADは、各node の E_r, および各センタの ${}_0E_i$、${}_\ell E_i$ ($\ell=1\sim L$) を計算し、平衡状態の解をもつか否かを調べる。解を持たないと判定された場合にはエラーメッセージを出して処理を終了させる。

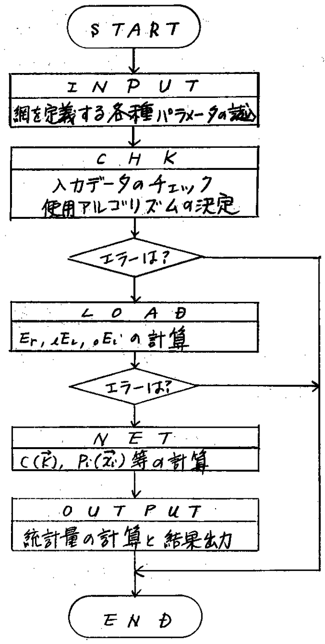
サブルーチンNETは、定義された網の正規化定数 $C(\vec{R})$と、各センタの閉鎖型部分連鎖に従う客に関する状態確率 $P_i(\vec{z}_i)$ を計算し、$SO_c(i)$, $QL_c(i)$, $SO_\ell(i)$, $QL_\ell(i)$, を求める。さらに、サービス規律がVSのセンタに対しては、$TP_\ell(i)$ を求める。

サブルーチンOUTPUTは、NETで計算されたデータに基づき、センタに関する統計量 $SO(i)$, $QL(i)$, $QT(i)$, $WL(i)$, $WT(i)$, $TP(i)$, および各nodeに対する統計量 $so(r)$, $ql(r)$, $qt(r)$, $wl(r)$, $wt(r)$, $tp(r)$ を計算し出力する。

なお、NETは $C(\vec{K})$, $P_i(\vec{x}_i)$ の計算法の違いにより下表に示す3種類のプログラムで構成されている。一般には文献3に基づくNET3が使用されるが、表の条件を満たす場合には計算時間の短縮のために文献4に基づくNET1, NET2が使用される。実行時にどのプログラムを使用して計算するかは、CHKで判定している。

網の条件 \ アルゴリズム	閉鎖型部分連鎖の数	閉鎖型部分連鎖に従う客を扱うサービスセンタのサービス規律
NET1	1	FCFS, PS, LCFSのみ　($i=1\sim M$)
NET2	1	FCFS, PS, LCFSのみ　($i=1\sim M-1$) IS, FS, DSのみ　($i=M$)
NET3	1以上	FCFS, PS, LCFS, IS, FS, DS　($i=1\sim M$)

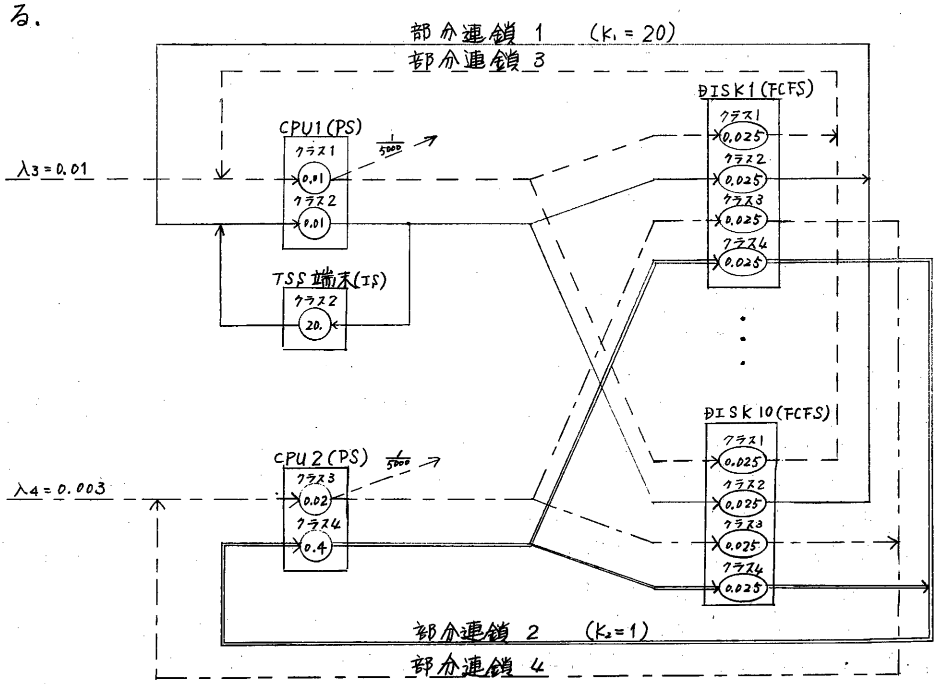
NETプログラムの種類と使用条件



QNMAPのゼネラルフロー

3.2 計算例

ディスクシステム型の複合計算機システムは下図に示すようなモデルで表わすことができる。



計算機システムモデル図

図において、CPU1は会話型処理と小規模バッチ処理を行い、CPU2は2つのジョブクラスのバッチ処理を行う。部分連鎖2を閉鎖型としたのは、そのジョブクラスのジョブが常に混雑している状況を表わすためである。

部分連鎖1の客数 $K_1=20$ はTSS端末数を表わす。端末から投入されたコマンド処理はCPUサービス後1/10の確率で終了するものとし、各ディスクの使用頻度はDISK1〜2に対しては各々40%，DISK3〜10に対しては各々2.5%とする。また、部分連鎖2は客数 $K_2=1$ とし、部分連鎖3,4へのジョブの到着率は $\lambda_3=0.01$，$\lambda_4=0.003$ とする。部分連鎖2〜4に従うジョブの処理はCPUサービス後1/5000の確率で終了するものとし，各ディスクに対する使用頻度は全て等しいものとする。

なお，図中の楕円内の数字はセンタのクラス毎の平均サービス時間を表わす。以上の条件のもとで，QNMAPにより計算すると、以下の結果が得られる。

	SO	QL	QT	WL	WT
CPU 1	0.5973D+00	0.1476D+01	0.2471D-01	0.0	0.0
CLASS 1	0.4999D+00	0.1238D+01	0.2476D-01	0.0	0.0
CLASS 2	0.9738D-01	0.2383D+00	0.2447D-01	0.0	0.0
CPU 2	0.9643D+00	0.1784D+01	0.1071D+00	0.0	0.0
CLASS 3	0.3000D+00	0.8351D+00	0.5568D-01	0.0	0.0
CLASS 4	0.6644D+00	0.9490D+00	0.5714D+00	0.0	0.0
DISK 1 - 2	0.2542D+00	0.3399D+00	0.3343D-01	0.8572D-01	0.8429D-02
CLASS 1	0.1250D+00	0.1674D+00	0.3350D-01	0.4248D-01	0.8499D-02
CLASS 2	0.8764D-01	0.1168D+00	0.3331D-01	0.2911D-01	0.8305D-02
CLASS 3	0.3749D-01	0.5023D-01	0.3350D-01	0.1274D-01	0.8499D-02
CLASS 4	0.4152D-02	0.5533D-02	0.3331D-01	0.1381D-02	0.8315D-02
DISK 3 - 10	0.1721D+00	0.2078D+00	0.3019D-01	0.3573D-01	0.5191D-02
CLASS 1	0.1250D+00	0.1509D+00	0.3019D-01	0.2597D-01	0.5195D-02
CLASS 2	0.5477D-02	0.6613D-02	0.3019D-01	0.1136D-02	0.5185D-02
CLASS 3	0.3749D-01	0.4528D-01	0.3019D-01	0.7790D-02	0.5195D-02
CLASS 4	0.4152D-02	0.4990D-02	0.3005D-01	0.8379D-03	0.5045D-02
TSS TERMINAL	0.1948D+02	0.1948D+02	0.2000D+02	0.0	0.0

実行結果

また、上記の結果より、TSSコマンドの応答時間は約0.5388秒，クラス1クラス3のジョブのターンアラウンドタイムはそれぞれ約278.06秒，432.66秒，クラス4のジョブの処理時間は約3010.51秒になることがわかる。

◀参考文献▶

1) F. Baskett, K.M. Chandy, R.R. Muntz, and F.G. Palacios, "Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers", J. ACM. VOL22, NO2. (1975)

2) 紀 一誠，"混合型待ち行列網の計算方法"，情報処理学会論文誌，VOL.24, NO.3 (1983)

3) R.R. Muntz, J.W. Wong, "Efficient Computational Procedures for Closed Queueing Network Models", Proceedings of the 7th Hawaii International Conference on System Sciences (1974)

4) R.L. Weil, "Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers", C. ACM, VOL16, NO9, (1973)

サービス規律	条件	統計量
FCFS PS LCFS	${}_oE_i=0$	$SO_c(i)=1-P_i({}_cm_i=0)$ $QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}$ $QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\,{}_em_i$
	${}_oE_i>0$	$SO_c(i)=(1-{}_oE_i)[1-P_i({}_cm_i=0)]$ $QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=(1-{}_oE_i)\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}$ $QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\cdot{}_em_i$
IS	${}_oE_i\geq 0$	$SO_c(i)=QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\cdot{}_em_i$
FS	${}_oE_i=0$	$SO_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot\min(m, m_i)$ $QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}\cdot\min({}_cm_i, m_i)$ $QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\cdot{}_em_i$
	${}_oE_i>0$	$SO_c(i)=\sum_{m=1}^{m_i} P_i({}_cm_i=m)\left\{\frac{y_i(m-1)-(m_i-{}_oE_i)\,y_i(m)}{\frac{m_i^{m_i+1}}{m_i!\,(m_i-{}_oE_i)^{m+1}}+y_i(m)}\right\}+(m_i-{}_oE_i)[1-P_i({}_cm_i=0)]$ $QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=\sum_{{}_cm_i=0}^{m_i} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}\left\{\frac{y_i({}_cm_i-1)-(m_i-{}_oE_i)\,y_i({}_cm_i)}{\frac{m_i^{m_i+1}}{m_i!\,(m_i-{}_oE_i)^{{}_cm_i+1}}+y_i({}_cm_i)}\right\}+(m_i-{}_oE_i)\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}$ $QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\cdot{}_em_i$
VS	${}_oE_i=0$	$SO_c(i)=1-P_i({}_cm_i=0)$ $QL_c(i)=\sum_{m=1}^{Kt} P_i({}_cm_i=m)\cdot m$ $SO_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\frac{{}_em_i}{{}_cm_i}$ $QL_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\,{}_em_i$ $TP_e(i)=\sum_{{}_em_i>0} P_i(\vec{x}_i)\,\mu_i(m_i)\frac{{}_em_i}{m_i}$

付表 1　閉鎖型部分連鎖に関する統計量

	条件	
FCFS PS LCFS	${}_cE_i=0$	$SO_o(i)={}_oE_i$ $QL_o(i)=\frac{{}_oE_i}{1-{}_oE_i}$
	${}_cE_i>0$	$SO_o(i)={}_oE_i$ $QL_o(i)=(QL_c(i)+1)\frac{{}_oE_i}{1-{}_oE_i}$
IS	${}_cE_i\geq 0$	$SO_o(i)=QL_o(i)={}_oE_i$
FS	${}_cE_i=0$	$SO_o(i)={}_oE_i$ $QL_o(i)={}_oE_i+\frac{\frac{{}_oE_i^{\,m_i+1}}{(m_i-1)!\,(m_i-{}_oE_i)^2}}{\sum_{m=0}^{m_i}\frac{{}_oE_i^{\,m}}{m!}+\frac{{}_oE_i^{\,m_i+1}}{m_i!\,(m_i-{}_oE_i)}}$
	${}_cE_i>0$	$SO_o(i)={}_oE_i$ $QL_o(i)=\sum_{m=0}^{m_i} P_i({}_cm_i=m)\left\{\frac{y_i(m)-y_i(m)(m+1)\frac{{}_oE_i}{m_i-{}_oE_i}}{\frac{m_i^{m_i+1}}{m_i!\,(m_i-{}_oE_i)^{m+1}}+y_i(m)}\right\}+(QL_c(i)+1)\frac{{}_oE_i}{m_i-{}_oE_i}$

付表 2　開放型部分連鎖に関する統計量