オペレーティング・システム 34−7
（1987・2・27）

コンピュータネットワークにおける負荷分散について

亀田壽夫　櫨山淳雄
電気通信大学

コンピュータネットワークにおいて、システムのパラメータが与えられ、通信による遅延が発信元・着信先のちがいによらないという仮定のもとでシステム全体の平均応答時間を最小とするよう各ノードの負荷を決定する（以下、集中型意志決定と呼ぶ）最適化問題が考えられ、その解が与えられている。本研究では、各ジョブがその応答時間の期待値を最小とするように処理を受けるノードを決めるという分散型意志決定を考えた。そして、各ジョブがその決定を変えても各々の応答時間の期待値が改善されないという均衡状態において負荷がどのようになるかについて調べ、集中型意志決定による結果との比較検討を行った。それによると、分散型意志決定の場合、通信所要時間の増加によりシステム全体の平均応答時間がかえって減少する場合があるという一種の異常現象が見出された。

Load Balancing in Computer Networks

Hisao KAMEDA and Atsuo HAZEYAMA

The University of Electro-Communications
1-5-1, Chofugaoka, Chofushi, Tokyo 182, Japan

Tantawi and Towsley considered a model of computer networks in which the communication delays do not depend on the source-destination pair. They considered a static load balancing policy by which the overall mean response time is minimum, and obtained the way how the load on each node is determined under the policy. (We call such a policy the centralized policy.)

In this study, we consider a completely decentralized policy by which each job determines by itself which node is used to process the job so as to minimize its expected response time. We examine the policy using the same model as above. We show that the system has an equilibrium state in which each node can obtain no less expected response time by changing the node to be processed. We obtain the way of how the load on each node is determined in the equilibrium .

Furthermore, we present the results of numerical examination and some implications of the results.

1．はじめに

近年の半導体技術の進歩によるプロセッサの低価格化及び、ローカルエリアネットワークのような相互接続技術を背景にして、分散配置されたコンピュータを通信ネットワークで結んだコンピュータネットワークに大いに関心が集まるようになった。

コンピュータネットワークの利点は、

i） データ・ソフトウェア・ハードウェア資源の共用

ii） 信頼性の向上

iii） 負荷の分散

などである。

負荷分散とは、システムの負荷を分散することにより、計算資源の共用を行うことである［2］。その目的は応答時間の短縮、資源の利用率の向上などシステムの性能の向上である。

Tantawi とTowsley は、ネットワークの各ノードへのジョブの到着率、各ノードの処理能力といった諸パラメータが与えられ、また、通信による遅延が発信元・着信先のちがいによらないという仮定（この仮定はLAN や衛星通信などの場合に成り立つ）を持つコンピュータネットワークのモデルを考えた。そして、このモデルにおいて、システム全体の平均応答時間を最小とするよう各ノードの負荷を決定する（以下、この決定方針のことを集中型意志決定と呼ぶ）最適化問題の解を求めた。その解においては、ネットワークのすべてのノードが4つの部分集合に分割され、最適解が満たす関係が明らかにされた。また最適な負荷分散に対する通信ネットワークの影響を調べるためのアルゴリズムが考えられた。

本研究では、Tantawi らのモデルと同じわく組において、ノードに到着するジョブが各々その応答時間の期待値を最小とするためにどのノードで処理を受けるかを決めるという分散型意志決定の問題を考えた。すなわち、分散型意志決定による均衡状態においては、どのジョブも処理されるべく決定されたノードを変えても応答時間が改善されない。以下では、この状態のもとで、負荷がどのように決定されるかを調べ、集中型意志決定の場合との比較検討を行う。

2．モデルの記述

コンピュータネットワークはn個のノードから成っており、それらが任意の形態で通信ネットワークに接続される。各ノードは、CPU,I/O などの資源から構成されている。

ジョブは、ノードi(i=1,2,...,n)にポアソン過程により到着する。そして、ノードi に到着したジョブはノードi で処理されるか、通信ネットワークを通じて他のノードj へ転送されて、そこで処理される。各パラメータ及び変数の意味は次のとおりである。

ϕ_i　　ノードiへのジョブの到着率

Φ　　システム全体のジョブの到着率

$(\Phi=\Sigma_i \phi_i)$

ϕ_i, Φは与えられたパラメータである。

β_i　　ノードiで処理されるジョブの割合（負荷）

x_{ij}　　ノードiからノードjへ転送されるジョブの割合（$x_{ii}=0$）

λ　　ネットワークを流れる総トラフィック量

$(\lambda=\Sigma_i|\phi_i-\beta_i|/2)$

β_i, x_{ij}, λは意志決定により変化する変数である。

ノードi のジョブの流れを図1に示す。

ジョブの応答時間は到着ノードiで処理を受ける場合はノードiでの遅延となり、他ノードjへ転送される場合は、ノードjでの遅延と通信による遅延を加えたものとなる。ここで、

$F_i(\beta_i)$　　ノードiでの遅延を表す。$F_i(\beta_i)$は、β_iについて微分可能で、凸な増加関数であるとする

$G(\lambda)$　　通信による遅延を表す。通信による遅延はネットワークを流れる総トラフィック量λに依存し、発信元・着信先のちがいによらない微分可能で、凸な非減少関数であるとする

と、前者の場合の応答時間は$F_i(\beta_i)$となり、後者の場合は $G(\lambda)+F_j(\beta_j)$となる。

システム全体の平均応答時間は平均のノード遅延と平均の通信遅延の和として表される。したがって、システム全体の平均応答時間$D(\underline{\beta})$は次のようになる。

$$D(\underline{\beta})=\Sigma_i \beta_i F_i(\beta_i)/\Phi+\lambda G(\lambda)/\Phi$$

$$\underline{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$$

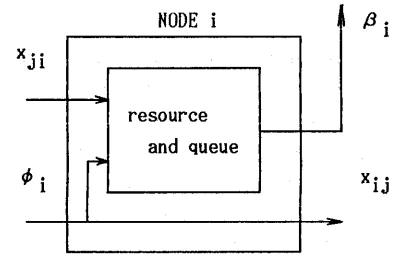


図1．　ノードiのジョブの流れ

３．問題の定式化

３．１　集中型意志決定の問題の定式化

Tantawi らは、前節に示したモデルに対してシステム全体の平均応答時間を最小とするよう各ノードの負荷を決定する問題を考え、その解を求めた。

最小にする目的関数

$$D(\underline{\beta})=\Sigma_i\beta_iF_i(\beta_i)/\Phi+\lambda G(\lambda)/\Phi \quad (1)$$

制約条件

$$\Sigma_i\beta_i=\Phi,$$

$$\beta_i\geq 0\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

ここで、$\lambda=\Sigma_i|\phi_i-\beta_i|/2$ である。

集中型意志決定に対する最適解は次のように表現される。

すべてのノードは次の４つの部分集合に分類される。

the set of idle source nodes(Rd)

他ノードへジョブを送るのみで、自ノードでは処理を行わず、また他ノードからもジョブを受けないノード集合。

the set of active source nodes(Ra)

他ノードへジョブを送るとともに自ノードでも処理を行うが、他ノードからはジョブを受けないノード集合。

the set of neutral nodes(N)

自ノードに外部から到着したジョブのみを処理するノードで他ノードへジョブを送ったり他ノードからジョブを受けないノード集合。

the set of sink nodes(S)

他ノードからジョブを受けるが、他ノードへジョブを送らないノード集合。

各ノードの負荷β_iは次の関係から決定される。

$$f_i(\beta_i)\geqq\alpha+g(\lambda) \qquad \beta_i=0 \qquad (i\in Rd) \quad (2a)$$

$$f_i(\beta_i)=\alpha+g(\lambda) \qquad 0<\beta_i<\phi_i \qquad (i\in Ra) \quad (2b)$$

$$\alpha\leqq f_i(\beta_i)\leqq\alpha+g(\lambda) \qquad \beta_i=\phi_i \qquad (i\in N) \quad (2c)$$

$$\alpha=f_i(\beta_i) \qquad \beta_i>\phi_i \qquad (i\in S) \quad (2d)$$

$$\sum_{i\in S}f_i^{-1}(\alpha)+\sum_{i\in Ra}f_i^{-1}(\alpha+g(\lambda))+\sum_{i\in N}\phi_i=\Phi \quad (3)$$

ここで、αはラグランジュ乗数である。また、$f_i(\beta_i)$,$g(\lambda)$は

$$f_i(\beta_i)=d\beta_iF_i(\beta_i)/d\beta_i,$$

$$g(\lambda)=\ d\lambda G(\lambda)/d\lambda$$

と定義される関数で、それぞれincremental node delay, incremental communication delayと呼ぶ。

３．２　分散型意志決定の問題の定式化

各ジョブがその応答時間の期待値を最小とするノードで処理を受けるといった分散型意志決定のもとでノードｉに到着したジョブが処理を受けるノードは次のように決定されるはずである。

（１）　すべてのノードｊに対して、$F_i(\beta_i)<F_j(\beta_j)+G(\lambda)$の場合、ジョブはノードｉで処理を受ける。

（２）　$F_i(\beta_i)=F_j(\beta_j)+G(\lambda)$の場合、ジョブはノードｉ，ノードｊのどちらで処理を受けてもよい。

（３）　$F_i(\beta_i)>F_j(\beta_j)+G(\lambda)$なるノードｊが１つ以上存在する場合、ジョブは、そのうちでノード遅延が最小のノードで処理を受ける。

以上から、均衡状態（どのジョブも現在決定されているノード以外のノードで処理を受けても応答時間の期待値が改善されない状態）において、次のような関係を得る。

［定理1］　分散型意志決定の均衡状態において、すべてのノードはRd,Ra,N,Sの4つの部分集合に分割され、次の関係が成り立つ。

$$F_i(\beta_i)\geqq R+G(\lambda) \qquad \beta_i=0 \qquad (i\in Rd) \quad (4a)$$

$$F_i(\beta_i)=R+G(\lambda) \qquad 0<\beta_i<\phi_i \qquad (i\in Ra) \quad (4b)$$

$$R\leqq F_i(\beta_i)\leqq R+G(\lambda) \qquad \beta_i=\phi_i \qquad (i\in N) \quad (4c)$$

$$R=F_i(\beta_i) \qquad \beta_i>\phi_i \qquad (i\in S) \quad (4d)$$

$$\sum_{i\in S}F_i^{-1}(R)+\sum_{i\in Ra}F_i^{-1}(R+G(\lambda))+\sum_{i\in N}\phi_i=\Phi \quad (5)$$

［証明］　付録参照。

この定理は次のように解釈することができる。(4d)はすべてのsink node のノード遅延は等しいことを意味している。(4a)はあるノードｉのノード遅延がsink node のノード遅延と通信遅延を加えたものよりも大きい、すなわち、ジョブをその到着ノードで処理するよりも、sink node へ転送して処理を受けるほうが応答時間が短かくなる。このような関係にあるノードi はidle source nodeである。(4b)はあるノードｉのノード遅延がsink node へ転送することによる応答時間と等しい。このような関係を満たすノードｉはactive source nodeである。あるノードｉのノード遅延がsink node のそれよりも大きく、また、一方で、そのノード遅延がsink nodeへ転送することによる応答時間よりも小さい。すなわち、sink nodeでも、source nodeでもないこのようなノードｉはneutral nodeである。

この分散型意志決定のもとでの均衡解の関係は、ノード遅延 $F_i(\beta_i)$，通信遅延 $G(\lambda)$をそれぞれincremental node delay $f_i(\beta_i)$，incremental communication delay $g(\lambda)$におきかえると、TantawiとTowsleyの集中型意志決定の最適解が満たす関係に一致することに注意された

い。このことは、集中型意志決定の解に一つの解釈を与える。すなわち、システム全体の平均応答時間を最小にするためには、各ノードiにおける各ジョブがノードiにおける遅延が$F_i(\beta_i)$でなく、あたかもincremental node delay $f_i(\beta_i)$であり、通信路での平均通信遅延が$G(\lambda)$ではなく、incremental communication delay $g(\lambda)$であると思って、自分自身の応答時間の期待値を最小にするようにふるまう。このような分散型意志決定の均衡解が、システム全体の平均応答時間の最小をもたらすというわけである。

解の安定性について

$F_i(\beta_i)=R+G(\lambda)$なるノード(active source node) の場合、ジョブを自ノードで処理するか、他ノードへ送るかについての自由度があり、$F_i(\beta_i)=R$なるノード(sink node)に対して、各source nodeにおいて、どのsink nodeへ送るべきかについての自由度がある。その選択により、$(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$の均衡値からずれが生じた場合を考える。まず、sink node iの処理要求量β_iが均衡値からずれる場合を考える。過分に送られたsink node の平均応答時間$F_i(\beta_i)$ の値は増大し、過小に送られた方は減少するので、次には少ない方に希望が増え、均衡を回復する方へ戻ろうとする。また、active source nodeにおいて、自ノード処理量が増すと、$F_i(\beta_i)$が増し、$F_i(\beta_i)>R+G(\lambda)$となり、次には、他ノードへ送る量を増す方向となる。自ノード処理が減ると、逆のことがおこり、これも均衡回復の方へ動く。したがって、いずれも回復力が、振動がおこらないようにゆるやかに作用すると、均衡が回復してゆくことがわかる。

3．3　通信ネットワークのパラメータの影響

3．1節及び3．2節で負荷分散の解に対する条件が得られた。解はノード分割により特徴づけられる。ノード分割がわかると、(3)，(5)によりα及びRが求められ、各ノードの負荷が得られる。

この節では、分散型意志決定のノード分割についての通信ネットワークのパラメータ、特に、通信時間パラメータtの影響を調べる。パラメータtが大きくなると、全体として通信所要時間が長くなる。以後、パラメータtを明確に表すために通信遅延を$G(\lambda,t)$と表す。$G(\lambda,t)$ は通信時間パラメータtの増加関数であると仮定する。以下に示す性質は、集中型意志決定における性質と同様に証明することができる。

［性質1］ネットワークを流れるトラフィック量$\lambda(t)$は、tに関する減少関数である。

［性質2］通信所要時間tの増加により、sink node の応答時間R (sink nodeの応答時間は、均衡状態において、(4d)によりどのノードも同一である。逆に、この値Rから各sink nodeの負荷が決定されるのである。β_iと$F_i(\beta_i)$の関係において、各sink nodeの応答時間を結んだラインのことをsink line と呼ぶ)は減少し(sink line は下降する)、一方、source node の応答時間$R+G(\lambda)$ (source nodeの応答時間も均衡状態において、(4b)によりどのノードも同一である。β_iと$F_i(\beta_i)$の関係において、各source nodeの応答時間を結んだラインのことをsource lineと呼ぶ)は増加する(source line は上昇する)。

4．数値実験

この節では、集中型意志決定による負荷分散と分散型意志決定による負荷分散のふるまいをいくつかのシステムモデルについて調べる。

4．1　ノードモデルと通信ネットワークモデル

ノードモデル　　ノードモデルとしてセントラル・サーバモデル(central server model)を考える(図2)。

このモデルは1台のCPU とm台のI/O装置から成り立っている。$p_0, p_j, j=1,...,m$をそれぞれCPU から去った後ジョブを終える確率及び、装置j でI/Oサービスを受ける確率であるとすると、あるジョブの平均応答時間は、

$F(\beta)=\Sigma_j q_j/(\mu_j - q_j\beta)$, $\beta<\mu_j/q_j, j=0,1,...,m$

と表される。ここで、$q_0=1/p_0, q_j=p_j/p_0$で、μ_jはサーバj (j=0,1,...,m) の平均サービス率である。

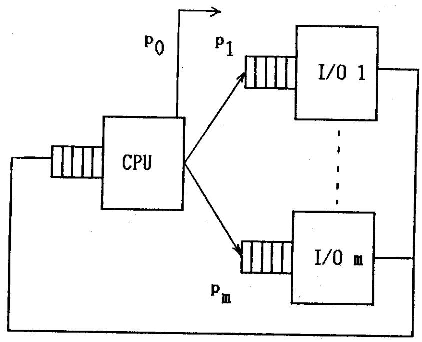


図2．　セントラルサーバモデル

通信ネットワークモデル　　通信ネットワークモデルとしてM/D/∞とM/M/1を用いる。まず、M/D/∞の場合の平均通信遅延は、ネットワークを流れるトラフィック量に依存せず、

$$G(\lambda, t)=t$$

である。一方、M/M/1の場合の平均通信遅延は

$$G(\lambda, t)=1/(1/t-\lambda), \quad \lambda<1/t$$

である。

4．2　実験モデル

数値実験を行うモデルの例として、図3のような構成をしたモデルを対象とする。表1及び表2に各ノードの処理能力、到着率などのパラメータを示す。各ノードのI/O は同一の処理能力をもつとする。

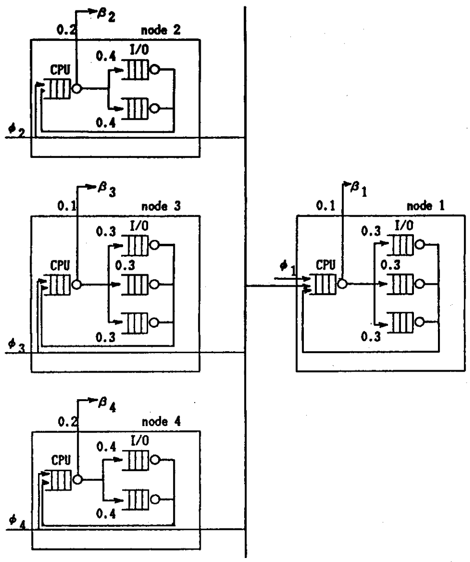


図3．　モデル

表1．　モデルのパラメータ

ノード	処理能力 (jobs/s)	外部到着率(jobs/s)	
		case 1	case 2
ノード1	CPU 1500 I/O 450	~150.0	~150.0
ノード2	CPU 50 I/O 20	1.0	7.0
ノード3	CPU 100 I/O 30	1.0	7.0
ノード4	CPU 60 I/O 24	1.0	7.5

表2．　モデルのパラメータ

ノード	処理能力 (jobs/s)	外部到着率(job/s)	
		case 3	case 4
ノード1	CPU 150 I/O 45	~15.0	~15.0
ノード2	CPU 50 I/O 20	1.0	7.0
ノード3	CPU 100 I/O 30	1.0	7.0
ノード4	CPU 60 I/O 24	1.0	7.5

5．結果

case1とcase2は各ノードの処理能力は同一でノードへの到着率を変えた場合である。case3とcase4も同様である。case1とcase3及び、case2とcase4はノード１の処理能力を変えた場合である。図４及び図５にcase2において、通信ネットワークがM/D/∞の場合の集中型意志決定と分散型意志決定の通信所要時間と応答時間の関係を示す。図６はcase2 において、集中型意志決定と分散型意志決定の平均応答時間及び、ノード１の負荷の比較を示したものである。図７及び図８は、case4 で通信ネットワークがM/D/∞の場合の集中型意志決定と分散型意志決定の通信所要時間と応答時間の関係を示したものである。

6．議論

数値実験の結果、次のような興味深い一種の異常現象(anomaly)が観測された。それは、分散型意志決定の場合、通信所要時間が増加するにもかかわらず、システム全体の平均応答時間がかえって減少することがあるということである。このような現象はcase2において、ノード１への外部到着率ϕ_1が110(jobs/sec)あたりから大きくなるにつれてしだいに顕著に見られる。しかし、ϕ_1が146(jobs/sec)でノード分割が変わり、ノード1がactive source nodeになったとき、この現象は見られなくなる(図5)。また、case3あるいはcase4では顕著には見られない。すなわち、この異常現象はシステム全体の負荷がかなり大きく、負荷が処理能力の大きなノードに過分に殺到する場合におこる。通信所要時間が増加するにつれ、負荷を請け負っていた処理能力の大きなsink node の負荷が軽減されるが、それによりその応答時間も減少する。それゆえに荷重平均によるシステム全体の平均応答時間が減少するものと考えられる。それに対して、集中型意志決定の場合、システム全体の平均応答時間が減少するという異常現象はおこらない(図4）。

分散型意志決定による負荷のわりあては　図6から、通信所要時間が短かい範囲で、すなわち、通信による遅延の影響が少ない範囲で、sink nodeであるノード1に殺到する傾向が見られる。このような負荷のわりあてがノード分割にも反映される。case2で通信所要時間t=0のときのノード分割を見ると、ϕ_1の増加につれ、相対的に処理能力の大きなノード1が他のノードから処理を受ける能力は低下するはずであるが、ϕ_1が110(jobs/sec)の時、集中型意志決定におけるsource nodeはactive source nodeであるのに対し、同一の状況のもとで、分散型意志決定では、source nodeはidle source nodeである。また、システム全体の平均応答時間を比較すると分散型意志決定の場合は集中型意志決定よりもわるくなる。

付録.　定理１の証明

この定理の証明はゲームの理論や経済均衡論におけるようにまず均衡解の存在を示し、次にその解の性質を求めるというように進む。

全体の時間をある程度の長さの時間区間に分けて考える。各々の区間の長さは、システムがほぼ統計的平衡にあり平均値等の統計量が実質的に意味を持つほど長いが、各ノードにおけるジョブが前の区間の統計量に基づいて意志決定を変えたことによる応答時間等の変化を知り、その決定を変更するに至るほど長くはないものとする。

ある時間区間の各ノードのジョブが意志決定により各ノードｉへの負荷β_iが決定される。それより各ノードｉにおける応答時間の期待値$F_i(\beta_i)$が決まる。また、通信路の使用頻度λも$\lambda=\Sigma_i|\phi_i-\beta_i|/2$で決まり、平均の通信遅延$G(\lambda)$も決まる。

$\underline{\beta}$のとり得る領域は、$\beta_i \geq 0\ (i=1,2,\ldots,n)$, $\Sigma_i \beta_i=\Phi$なるすべての点である。 明らかに$\underline{\beta}$のとり得る集合は閉集合である。これをＢと表す。

このような状況下において（すなわち、$F_i(\beta_i)$, $G(\lambda)$ などについての情報が与えられると）引き続く時間区間において各ノードにおけるジョブがどのノードで処理されることを選ぶかの意志決定を考える。それは次のように決められるはずである。

$R=\min_i F_i(\beta_i)$とする。

$F_i(\beta_i)=R$なるiの集合を$\underline{i}$で表す。

各ノードｉの平均応答時間$F_i(\beta_i)$について次の４つの場合があり得る。

ケース	$F_i(\beta_i)$の条件	ノードiのジョブが処理を希望するノード
(1)	$F_i(\beta_i)>R+G(\lambda)$	$\underline{i}$のどれかのノード
(2)	$F_i(\beta_i)=R+G(\lambda)$	ノードi自身か$\underline{i}$のどれかのノード
(3)	$R<F_i(\beta_i)<R+G(\lambda)$	ノードi自身
(4)	$R=F_i(\beta_i)$	ノードi自身（ノードiには他からもジョブがくる）

したがって、次の時間区間における各ノードｉの負荷β'_iがとり得る領域$\phi_i(\underline{\beta})$は次のようになる。

(1)が成り立つiに対し、$\beta'_i=0$ すなわち $\phi_i(\underline{\beta})=\{0\}$

(2)が成り立つiに対し、$0\leq\beta'_i\leq\phi_i$ すなわち $\phi_i(\underline{\beta})=[0,\phi_i]$

(3)が成り立つiに対し、$\beta'_i=\phi_i$ すなわち $\phi_i(\underline{\beta})=\{\phi_i\}$

(4)が成り立つiに対し、$\beta'_i\geq\phi_i$ すなわち $\phi_i(\underline{\beta})=[\phi_i,\Phi]$

ただし、$\Sigma_i\beta'_i=\Phi$

点$(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$を$\underline{\beta}$で表すと、上に示される各$\beta'_i$の領域$\phi_i(\underline{\beta})$は閉じており、$\underline{\beta'}=(\beta'_1,\beta'_2,\ldots,\beta'_n)$の領域は$\underline{\beta}$で決定され、それを$\phi(\underline{\beta})$と表すと、

$\phi(\underline{\beta})=\Pi_i\phi_i(\underline{\beta})\cap B$となる。明らかに$\phi(\underline{\beta})$は閉集合である。

補題　$\phi(\underline{\beta})$はupper semicontinuous(上半連続)である。

証明　$\underline{\beta}^q$, $\underline{\gamma}^q$なる点の列を考える。$\underline{\beta}^q\to\underline{\beta}^0$, $\underline{\gamma}^q\to\underline{\gamma}^0$かつ$\underline{\gamma}^q\in\phi(\underline{\beta}^q)$であるならば、$\underline{\beta}^0\in B$かつ、$\underline{\gamma}^0\in\phi(\underline{\beta}^0)$であるという命題を示せばよい。

まず、Ｂは閉であるから明らかに$\underline{\beta}^0\in B$. $F_i(\beta_i)$, $G(\lambda)$, $R=\min_i F_i(\beta_i)$も$\underline{\beta}$について連続である。

したがって、 $|\beta_i-\beta_i^0|<\varepsilon_i$なる十分小さい$\varepsilon_i$が各iに対して存在し、

$\underline{\beta}^0$について(1)の成り立つiについて$\underline{\beta}$についても(1)が成立し、$\phi_i(\underline{\beta})=\{0\}=\phi_i(\underline{\beta}^0)$

$\underline{\beta}^0$について(2)の成り立つiについて$\underline{\beta}$については(1)か(2)か(3)が成立し、

$\phi_i(\underline{\beta})=\{0\}\cup[0,\phi_i]\cup\{\phi_i\}\subseteq\phi_i(\underline{\beta}^0)$

$\underline{\beta}^0$について(3)の成り立つiについて$\underline{\beta}$についても(3)が成立し、$\phi_i(\underline{\beta})=\{\phi_i\}=\phi_i(\underline{\beta}^0)$

$\underline{\beta}^0$について(4)の成り立つiについて$\underline{\beta}$についても(3)か(4)が成立し、$\phi_i(\underline{\beta})=\{\phi_i\}\cup[\phi_i,\Phi]\subseteq\phi_i(\underline{\beta}^0)$

とするようにできる。すなわち、$|\beta_i-\beta_i^0|<\varepsilon_i$, $i=1,2,\ldots,n$なる十分小さいε_iが存在し、

$\phi_i(\underline{\beta})\subseteq\phi_i(\underline{\beta}^0)$ $i=1,2,\ldots,n$が成り立つ。

したがって、$|\beta_i-\beta_i^0|<\varepsilon_i$ $i=1,2,\ldots,n$なる十分小さいε_iに対し、

$\phi(\underline{\beta})=\Pi_i\phi_i(\underline{\beta})\cap B\subseteq\Pi_i\phi_i(\underline{\beta}^0)\cap B=\phi(\underline{\beta}^0)$

したがって、$\phi(\underline{\beta}^0)$が閉であるので、上述の命題が成り立つことがわかる。(証明終)

対応$\phi(\underline{\beta})$はupper semicontinuousであり、Ｂは閉じてboundedなので、compactである。したがって、Ｂは明らかに空でないcompact convexな部分集合であり、$\phi(\underline{\beta})$もすべての$\underline{\beta}\in B$に対し、convexであるので、 角谷のFixed Point Theoremが成り立つ(たとえば、Debreu [3]参照)。

したがって、$\underline{\beta}\in\phi(\underline{\beta})$なる$\underline{\beta}$が存在する。すなわち、$\underline{\beta}$なる均衡状態の存在が示されたことになる。

この均衡状態において、

(1) $F_i(\beta_i)>R+G(\lambda)$なるiに対し、$\beta_i=0$

(2) $F_i(\beta_i)=R+G(\lambda)$なるiに対し、$0\leq\beta_i\leq\phi_i$

(3) $R<F_i(\beta_i)<R+G(\lambda)$なるiに対し、$\beta_i=\phi_i$

(4) $R=F_i(\beta_i)$　なるiに対し、$\beta_i\geq\phi_i$

ただし、$\Sigma_i\beta_i=\Phi$

が満たされるが、これは次の条件と同等である。

$F_i(\beta_i)\geq R+G(\lambda)$なるノードｉに対し、$\beta_i=0$
（このノードがidle source nodeと呼ばれ、その集合がRd)

$F_i(\beta_i)=R+G(\lambda)$ なるノードiに対し、$0<\beta_i<\phi_i$
(このノードがactive source nodeと呼ばれ、その集合がRa)
$R\le F_i(\beta_i)\le R+G(\lambda)$ なるノードiに対し、$\beta_i=\phi_i$
(このノードがneutral nodeと呼ばれ、その集合がN)
$R=F_i(\beta_i)$ なるノードiに対し、$\beta_i>\phi_i$
(このノードがsink nodeと呼ばれ、その集合がS)
また、次の条件を満たさなければならない。

$$\sum_{i\in Ra} F_i^{-1}(R+G(\lambda))+\sum_{i\in N}\phi_i+\sum_{i\in S} F_i^{-1}(R)=\Phi$$

以上のように定理1の成立が示される。

謝辞

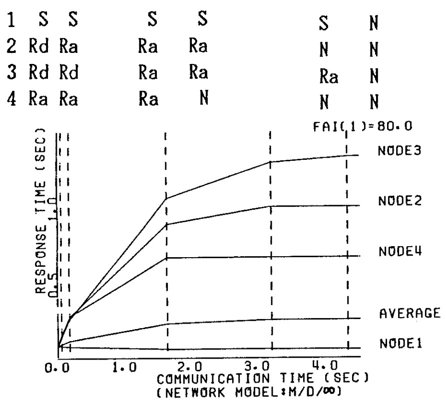
定理1の証明内の補題の証明に関して、電気通信大学渡辺二郎教授より御援助いただいた。ここに記して謝意を表す。

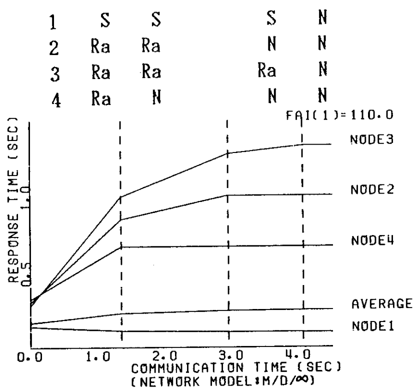
参考文献

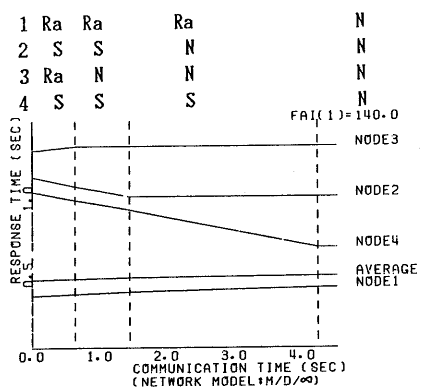
[1] Tantawi,A.N. and Towsley,D. "Optimal Static Load Balancing in Distributed Computer Systems", J.ACM, 32.2 (April 1985) 445-465.

[2] Eager,D.L.,et al. " A Comparison of Receiver-Initiated and Server-Initiated Load Sharing", Performance Evaluation, 6 (1986) 53-68.

[3] Debreu,G. Theory of Value : An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium, Yale University Press, New Heaven and London (1959).







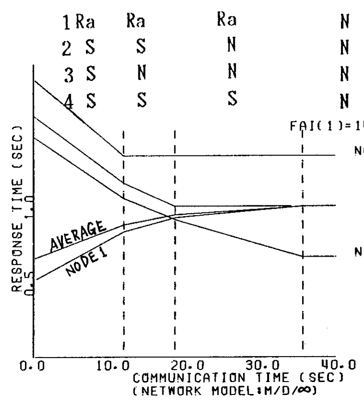


図4．　通信所要時間と応答時間の関係(case2)
(集中型意志決定)

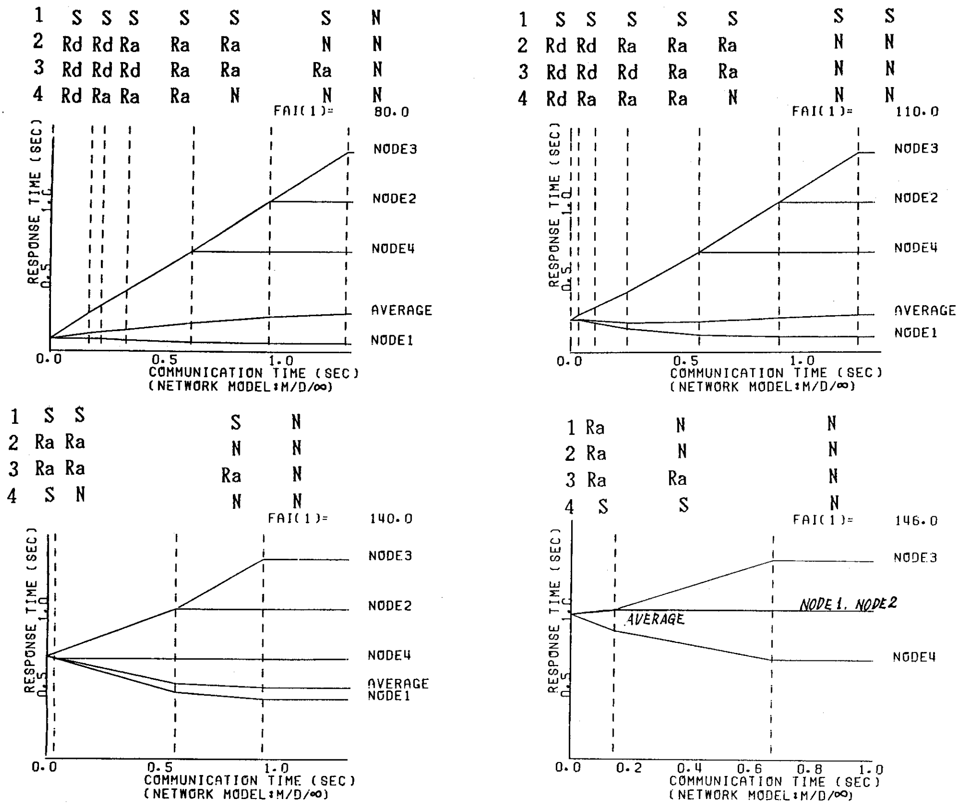
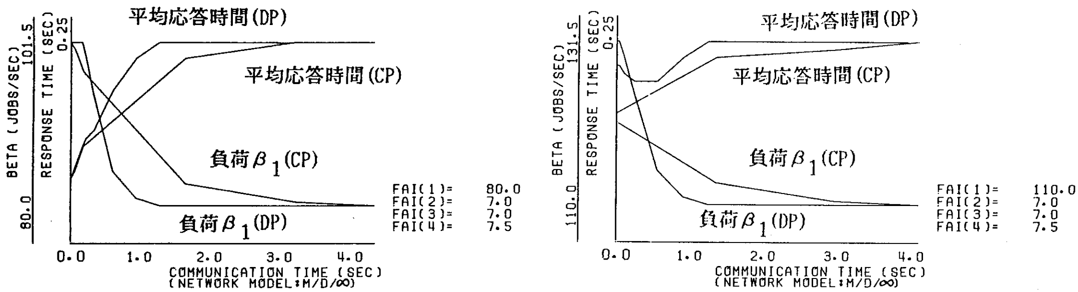


図５．　通信所要時間と応答時間の関係(case2)

(分散型意志決定)



CP: centralized policy

DP: decentralized policy

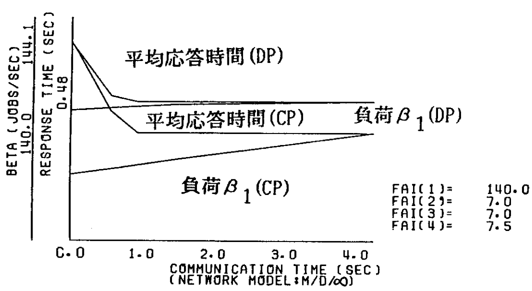


図６．　集中型意志決定と分散型意志決定の平均応答時間の比較(case2)

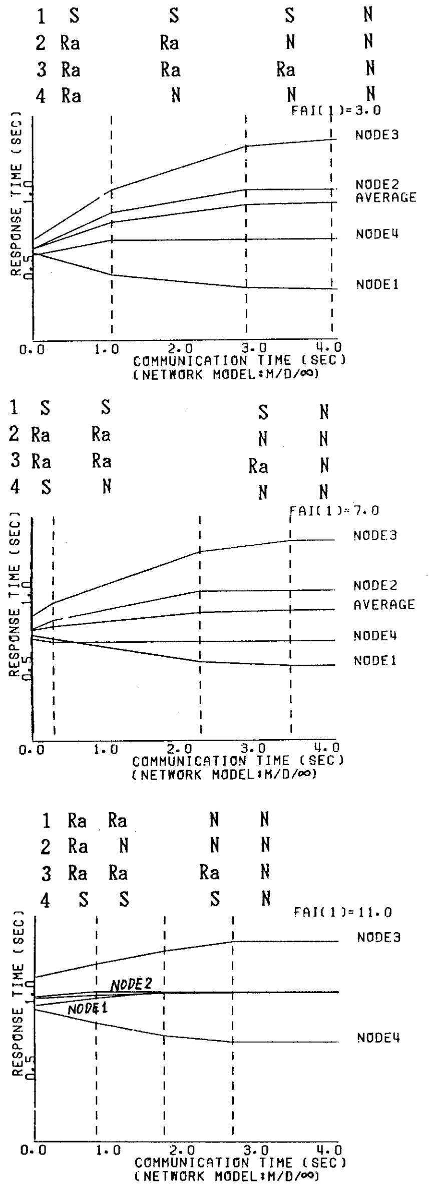


図７．　通信所要時間と応答時間の関係(case4)
(集中型意志決定)

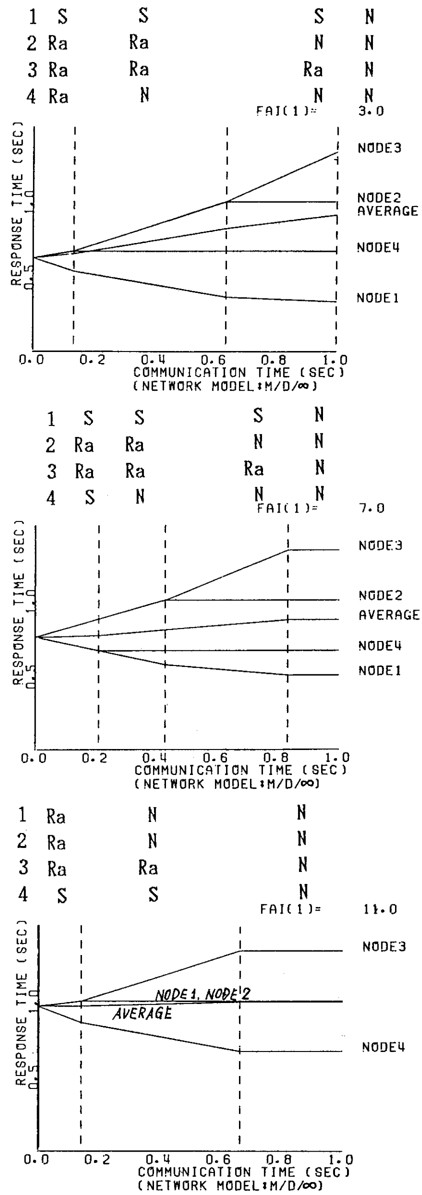


図８．　通信所要時間と応答時間の関係(case4)
(分散型意志決定)