オペレーティング・システム 34−6
（１９８７・２・２７）

非対称呼源を持つＣＳＭＡ／ＣＤの性能解析

滝根哲哉、高橋豊、長谷川利治

京都大学工学部

本稿では非対称呼源を持つ連続時間のＣＳＭＡ／ＣＤの性能解析を行う。従来の性能評価に関する研究では、各端末が同質であると仮定のもとで解析されてきた。しかしこの仮定は現実的ではなく実際のシステムの性能予測には適さない。そこでより一般的な解析モデルを提案し、このモデルに対して厳密な解析を行う。しかし、この解析は端末数の増加と共に計算量が増大する。それゆえ、この様な場合を扱うことのできる２つの近似解析を提案する。これらの近似解は厳密解と比較され、その結果非常に良い近似を与えることが判明した。

Performance Analysis of a CSMA/CD System

with Heterogeneous Stations

Tetsuya TAKINE, Yutaka TAKAHASHI and Toshiharu HASEGAWA

Faculty of Engineering, Kyoto University
Kyoto 606, Japan

We consider a CSMA/CD (Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection) system with heterogeneous stations. Previous analyses of CSMA/CD systems assume that each station has stochastically identical characteristics. This assumption is not realistic and not suitable for performance prediction in actual systems, though analytical treatment is simplified. We propose a mathematical model with heterogeneous stations and provide an exact analysis. The computational effort for this analysis, however, becomes large according to the increase of the number of stations. Therefore, we propose two approximate methods. Numerical examples show the surprising agreement between approximations and exact results.

1．はじめに

パケット無線網やＬＡＮで用いられるランダムアクセス方式は多くの文献で提案されている[TANE81],[KLEI85]。CSMA/CDは最も効率の良い伝送方式の１つとして良く知られており、その性能解析は多くの文献に見いだすことができる[TOBA82],[COYL85],[TAKAG85],[HEYM86],[TAKAH86]。そこではシステムが同質の端末から成るという仮定の元でスループットや平均メッセージ遅延のみならず、出力時間間隔分布やメッセージ遅延分布も導かれている[TOBA82],[TAKAH86]。ところが実際のシステムでは各端末の性質は本質的に異なるため、より現実的なモデルの解析が望まれる。

本稿では従来より一般的な非対称呼源を持つ解析モデルを提案する。システムは有限個の端末から成り、各端末はその性質により複数のグループに分類される。それゆえ同じグループの端末は同じ到着率、再送率、送信時間を持ち、これらはグループ間で一般に異なる。なお、このモデルはALOHA等の他のランダムアクセス方式にも適用できる。本稿では、このモデルを用いてCSMA/CDの厳密な解析が示される。しかし、この解析はグループ数あるいは端末数が増加するに従って、計算量が急速に増加する。そこで計算量の少ない２つの近似解法を提案する。近似解法の精度は厳密解との比較により検証される。

２節では非対称呼源を持つCSMA/CDシステムの解析モデルを記述する。３節でこのモデルに対する厳密解を示す。更に２つの近似解法が４節で提案される。５節では提案された近似解法の精度が厳密解との比較により議論される。

2．モデル

回線に接続されている端末はグループ１からグループｇまでのｇ個のグループに分類される。グループｋはM_k個の端末から成る。グループｋの各端末は送信すべきメッセージを持っているか否かによって空状態か保留状態のいずれかを取る。グループｋの空状態にある端末は独立にパラメータλ_kの指数分布に従って新しいメッセージを生み出す。新しいメッセージを生み出した端末は保留状態になり回線をセンスする。もし回線が空きならばこの端末は直ちにメッセージの送信を開始する。一方もし他の端末から最大伝播遅延、D、の間に送信がなければ、この送信は成功する。この場合、回線は送信開始からT_k＋D後に再び空きに成る。ここでT_kはグループｋの端末によって生み出されるメッセージの送信時間であり、一定長であるとする。もし他の端末が送信開始後Ｄ以内にメッセージの送信を開始したならば衝突が起こる。全ての端末は衝突を知ることができ、衝突を起こしたメッセージの送信を中止する。解析を簡単化するため、全ての端末が再び空の回線をセンスするまでの時間（T_k＋D）は一定であるとする。衝突に関与したグループｋの端末はパラメータγ_kの指数分布に従う時間だけ待って、再び回線をセンスする。一方、回線が送信中であるとセンスした保留状態の端末はあるランダム時間待って、再び回線をセンスする。この時間間隔もパラメータγ_kの指数分布に従うものとする。

次節以降、システムは既に定常状態にあるものとして扱われる。

3．厳密解析

この節では２節で記述されたモデルに対する厳密な解析を与える。システムの状態ベクトルは次式で定義される。

$$I = (i_1, \cdots, i_g) \tag{1}$$

ここで、i_kはグループｋの保留状態にある端末数を表す。回線の状態は空きと送信中が交互に現れる。そこで観察点を送信中の期間（成功、衝突双方を含む。）の終了直後に取る。ある観察点においてシステムの状態がＩであったとき、それに続く空の期間は平均MI_Iの指数分布に従う。ここで、

$$MI_I = 1/\sum_{k=1}^{g} \beta_I(k) \tag{2}$$

但し、

$$\beta_I(k) = (M_k - i_k)\lambda_k + i_k\gamma_k \qquad (k=1,\cdots,g)$$

まず、２つの連続する観察点間の状態遷移を考える。記述を簡単化するため以下の事象を定義する。

NEW_k＝最後の観察点でグループｋの空状態の端末が送信を開始する。

OLD_k＝最後の観察点でグループｋの保留状態の端末が送信を開始する。

S ＝送信が成功する。

F ＝送信が失敗する（衝突が起こる）。

これらの記号を用いて、２つの連続する観察点間の状態遷移確率を以下のように定義する。

$$S_{I,J}^{N,k} = \mathrm{Prob}\{NEW_k \cap S \cap \text{next state is } J \mid I\}$$

$$S_{I,J}^{O,k} = \mathrm{Prob}\{OLD_k \cap S \cap \text{next state is } J \mid I\}$$

$$F_{I,J}^{N,k} = \mathrm{Prob}\{NEW_k \cap F \cap \text{next state is } J \mid I\}$$

$$F_{I,J}^{O,k} = \mathrm{Prob}\{OLD_k \cap F \cap \text{next state is } J \mid I\}$$

$S_{I,J}^{N,k}$ は以下の式で与えられる。

$$S_{I,J}^{N,k} = \frac{(M_k - i_k)\lambda_k}{\sum_{n=1}^{g} \beta_I(n)} \exp[-(\sum_{n=1}^{g} \beta_I(n) - \lambda_k)D]$$

$$\cdot\{\prod_{n\neq k} B(M_n - i_n, j_n - i_n, \lambda_n, T_k)\} B(M_k - i_k - 1, j_k - i_k, \lambda_k, T_k) \tag{3}$$

ただし、

$$B(m,n,\lambda,T) = \begin{cases} \binom{m}{n}\exp[-(m-n)\lambda T](1-\exp[-\lambda T])^n & (0\leq n\leq m) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$S_{I,J}^{O,k}$ も同様にして得ることができる。また、$F_{I,J}^{N,k}$ は次の式で与えられる。

$$F_{I,J}^{N,k} = \frac{(M_k - i_k)\lambda_k}{\sum_{n=1}^{g} \beta_I(n)} \{(\prod_{n\neq k} B(M_n - i_n, j_n - i_n, \lambda_n, T_c + D))$$

$$\cdot B(M_k - i_k - 1, j_k - i_k - 1, \lambda_k, T_c + D)$$

$$-\left(\prod_{n=1}^{g}\exp[-i_n\gamma_n D]\right)\left(\prod_{n\neq k}\exp[-(M_n-i_n)\lambda_n D]\right)\cdot\exp[-(M_k-i_k-1)\lambda_k D]$$

$$\cdot\left(\prod_{n\neq k}B(M_n-i_n,j_n-i_n,\lambda_n,T_c)\right)\cdot B(M_k-i_k-1,j_k-i_k-1,\lambda_k,T_c)\} \tag{4}$$

この式は送信が失敗した場合に対応しており、この場合、少なくとも1つのメッセージが最初の送信からD以内に開始されなければならない。また $F_{I,J}^{O,k}$ も同様にして得ることができる。よって、連続する2つの観察点間の状態遷移確率、$P_{I,J}$ 、は

$$P_{I,J} = \sum_{k=1}^{g}(S_{I,J}^{N,k} + S_{I,J}^{O,k} + F_{I,J}^{N,k} + F_{I,J}^{O,k}) \tag{5}$$

で与えられる。よって、観察点における定常状態確率、π 、は次式を解くことにより得られる。

$$\pi = \pi P \tag{6}$$

ただし、

$$[\pi]_I = \pi_I\ ,\quad \sum_I \pi_I = 1 \qquad [P]_{I,J} = P_{I,J}$$

次に各グループの回線利用率及び平均メッセージ遅延を導く。まず、S_I^k をある観察点でシステムの状態がIであるという条件のもとで、グループkの送信が成功するという条件付確率とすると、これは

$$S_I^k = \sum_J (S_{I,J}^{N,k} + S_{I,J}^{O,k})$$

$$= \frac{(M_k-i_k)\lambda_k}{\sum_{n=1}^{g}\beta_I(n)}\exp[-(\sum_{n=1}^{g}\beta_I(n)-\lambda_k)D]$$

$$+ \frac{i_k\gamma_k}{\sum_{n=1}^{g}\beta_I(n)}\exp[-(\sum_{n=1}^{g}\beta_I(n)-\gamma_k)D] \tag{7}$$

で与えられる。2つの連続する観察点間の長さをサイクルと呼ぶ。平均サイクル長、MC、は次式で与えられる。

$$MC = T_c + D + \{\sum_I \pi_I(MI_I + \sum_{k=1}^{g} S_I^k(T_k - T_c))\} \tag{8}$$

これを用いて、グループkの回線利用率、U_k、は、

$$U_k = \sum_I \pi_I S_I^k T_k / MC \tag{9}$$

で与えられる。同じグループ内の端末は同じ確率的性質を持つことを考慮すると、グループkの平均メッセージ遅延、D_k、は次式で与えられる。

$$D_k = M_k T_k / U_k - 1/\lambda_k \tag{10}$$

4．近似解析

3節では提案されたモデルに対する厳密な解析が与えられたが、グループ数あるいは端末数の増加に伴い、計算量が急激に増加する。特に、多くのグループから成るシステムを扱うには膨大な記憶領域を必要とする。これは厳密な解析が結合確率分布を扱わなければならないことに起因する。それゆえ、より少ない記憶領域で扱うことのできる解析が必要となるが、これは周辺確率分布を直接扱うことにより達成できる。この節では、このような統一された視点から2つの近似解析を提案する。これらの近似解析では3節と同じ時点が観察点に選ばれる。周辺確率分布を得るため、1つのグループのみの状態遷移が注目される。他のグループが注目されているグループに与える影響はそのグループが埋め込まれている確率的な環境として考慮される。

4．1．一定の負荷による近似

観察点において、各端末は空状態か保留状態のいずれかにある。ある観察点においてグループkの端末が保留状態にある確率をb_kで表す。これを用いてグループkの端末の平均負荷、α_k、は、

$$\alpha_k = (1-b_k)\lambda_k + b_k\gamma_k \tag{11}$$

で与えられる。グループkの回線利用率を得るために、グループn（n≠k）の各端末は、観察点における状態にかかわらず、一定の率、α_n、で回線をセンスすると仮定する。この仮定のもとでグループkの状態遷移確率を導く。ここでシステムの状態をグループkの保留状態にある端末の数で定義する。また次に示される事象、

AC_n=グループnの端末により送信が開始される。

を用いて以下の連続する2つの観察点間のグループkに対する状態遷移確率を定義する。

$$S_k^N(i,j) = \mathrm{Prob}\{NEW_k \cap S \cap \text{next state is } j \mid i\}$$

$$S_k^O(i,j) = \mathrm{Prob}\{OLD_k \cap S \cap \text{next state is } j \mid i\}$$

$$\overline{S}_{k,n}(i,j) = \mathrm{Prob}\{AC_n \cap S \cap \text{next state is } j \mid i\}$$

$$F_k^N(i,j) = \mathrm{Prob}\{NEW_k \cap F \cap \text{next state is } j \mid i\}$$

$$F_k^O(i,j) = \mathrm{Prob}\{OLD_k \cap F \cap \text{next state is } j \mid i\}$$

$$\overline{F}_k(i,j) = \mathrm{Prob}\{(\bigcup_{n\neq k} AC_n) \cap F \cap \text{next state is } j \mid i\} \tag{12}$$

$S_k^N(i,j)$ は次の式で与えられる。

$$S_k^N(i,j) = \frac{(M_k-i)\lambda_k}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k}M_n\alpha_n}\exp[-\{\beta_k(i)-\lambda_k + \sum_{n\neq k}M_n\alpha_n\}D]B(M_k-i-1,j-i,\lambda_k,T_k) \tag{13}$$

ただし、

$$\beta_k(i) = (M_k-i)\lambda_k + i\gamma_k$$

$S_k^O(i,j)$ も同様にして得られる。$\overline{S}_{k,n}(i,j)$ は、

$$\overline{S}_{k,n}(i,j) = \frac{M_n\alpha_n}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k}M_n\alpha_n}\exp[-\{\beta_k(i) + \sum_{\ell\neq k}M_\ell\alpha_\ell - \alpha_n\}D]B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_n) \tag{14}$$

で与えられる。一方、$F_k^N(i,j)$ は、

$$F_k^N(i,j) = \frac{(M_k-i)\lambda_k}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} \{B(M_k-i-1,j-i-1,\lambda_k,T_c+D) - \exp[-(\beta_k(i)-\lambda_k+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n)D] \cdot B(M_k-i-1,j-i-1,\lambda_k,T_c)\} \tag{15}$$

で与えられ、$F_k^0(i,j)$ も同様である。最後に $\overline{F}_k(i,j)$ は、

$$\overline{F}_k(i,j) = \frac{\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} \{B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_c+D) - \exp[-(\beta_k(i)+\xi_k)D] \cdot B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_c)\} \tag{16}$$

で与えられる。ただし、

$$\xi_k = \sum_{\ell\neq k} \{\frac{M_\ell\alpha_\ell}{\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} (\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n-\alpha_\ell)\} = \sum_{n\neq k} M_n\alpha_n - \frac{\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n^2}{\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n}$$

なお、ξ_kの第一項はグループk以外のグループから送信が開始されたという条件の元でその送信がグループlのものであるという確率であり、第二項は最初に送信した端末を除くグループn（n≠k）のアクセス率の和である。このようにして、２つの連続する観察点間のグループkに対する状態遷移確率、P_k（i，j）、は、

$$P_k(i,j) = S_k^N(i,j) + S_k^0(i,j) + \sum_{n\neq k} S_{k,n}(i,j) + F_k^N(i,j) + F_k^0(i,j) + \overline{F}_k(i,j) \tag{17}$$

で与えられる。よってグループkの定常状態確率、π_kは、以下の式を解くことにより得られる。

$$\boldsymbol{\pi}_k = \boldsymbol{\pi}_k \mathbf{P}_k \tag{18}$$

ただし、

$$[\boldsymbol{\pi}_k]_i = \pi_k(i) \quad \sum_{k=1}^{M_k} \pi_k(i) = 1 \quad [\mathbf{P}_k]_{ij} = P_k(i,j)$$

それ故、α_kは次式より得ることができる。

$$\alpha_k = \sum_{i=0}^{M_k} \beta_k(i)\pi_k(i)/M_k \tag{19}$$

α_kはα_n（n≠k）の関数として与えられている。しかし、α_k（k＝1，・・・，g）の値は以下の反復法により、数値的に得ることができる。適当な初期値をα_k（k＝1，・・・，g）に与え、次の各グループに対するα_kの値を式（18）と（19）を用いて順次計算する。これにより新しいα_k（k＝1，・・・，g）の値を得る。この操作を適当な収束条件を満たすまで続けることにより、最終的にα_k及びグループkの定常状態確率π_kを得ることができる。これらの値を用いて、各グループの回線利用率及び平均メッセージ遅延は以下に示される式により得られる。

まず、グループkに関する平均サイクル長、MC_k、は

$$MC_k = T_c + D + \sum_{i=1}^{M_k} \pi_k(i)\{MI_k(i) + (T_k-T_c)S_k(i) + \sum_{n\neq k} (T_n-T_c)\overline{S}_{k,n}(i)\} \tag{20}$$

で与えられる。ただし、$MI_k(i)$はグループkの状態がiであったときの回線の空きである期間の平均長であり、$S_k(i)$（$S_{k,n}(i)$）は、グループkの状態がiであるという条件のもとでの、グループk（グループn（n≠k））の送信が成功する確率であり、これらは以下の式で与えられる。

$$MI_k(i) = 1/(\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n) \tag{21}$$

$$S_k(i) = \sum_{j=0}^{M_k} \{S_k^N(i,j) + S_k^0(i,j)\} = \frac{(M_k-i)\lambda_k}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} \exp[-\{\beta_k(i)-\lambda_k+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n\}D] + \frac{i\gamma_k}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} \exp[-\{\beta_k(i)-\gamma_k+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n\}D] \tag{22}$$

$$\overline{S}_{k,n}(i) = \sum_{j=0}^{M_k} \overline{S}_{k,n}(i,j) = \frac{M_n\alpha_n}{\beta_k(i)+\sum_{n\neq k} M_n\alpha_n} \exp[-\{\beta_k(i)+\sum_{\ell\neq k} M_\ell\alpha_\ell-\alpha_n\}D] \tag{23}$$

なお、グループkの定常状態確率は他のグループの端末がその状態にかかわらず一定の率で回線をセンスするという仮定もとで導かれているため、MCkの値は各グループで互いに異なる。式（25）を用いて各グループkの回線利用率、U_k、及び平均メッセージ遅延、D_k、は以下の式で与えられる。

$$U_k = \sum_{i=0}^{M_k} \pi_k(i)S_k(i)T_k/MC_k \tag{24}$$

$$D_k = M_kT_k/U_k - 1/\lambda_k \tag{25}$$

４．２．可変の負荷による近似

4.1節では注目しているグループ以外の端末が一定の負荷で回線にアクセスするという仮定の元での近似解法を与えた。この解析は$\lambda_k=\gamma_k$のとき厳密解を与えるので、各グループのλ_kとγ_kの差が小さい場合、良い近似解を与えるものと思われる。この節では、λ_kとγ_kの差が大

きい場合にも良い精度を与えると考えられる、もう1つの近似解法を提案する。

4.1節と同様に、グループkに注目し、ある観察点における状態をグループkの保留状態にある端末の数で定義する。各端末の状態に依存する負荷の変動を解析に取り込むために、グループn（n≠k）の各端末は観察点において確率b_nで保留状態にあると仮定する。それゆえ、ある観察点においてグループnの端末の内i_n個が保留状態にある確率分布、$B_n(i_n)$、は、

$$B_n(i_n) = \binom{M_n}{i_n} b_n^{i_n}(1-b_n)^{M_n-i_n} \tag{26}$$

なる二項分布で与えられる。この仮定の元で、式（12）で定義された遷移確率を得ることができる（付録参照）。このようにして、式（17）から2つの連続する観察点間の状態遷移確率を得ることができ、これを用いてグループkに関する定常状態確率、π_kを式（18）より計算できる。よって、グループkの端末が観察点において保留状態にある確率、b_k、は次式で与えられる。

$$b_k = \sum_{i=0}^{M_k} i\pi_k(i)/M_k \tag{27}$$

なお、b_kはb_n（n≠k）の関数である。このためb_k及びπ_kの値を数値的に得るためには、4.1節と同様の反復法が必要である。

性能評価量は以下の様にして導くことができる。まず、グループkに関する回線の平均空き時間、MI_k、は、

$$MI_k = \sum_{i=0}^{M_k} \pi_k(i)\Big(\sum_{\mathbf{I}_k(i)} \{\prod_{n\neq k} B_n(i_n)\}/\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)\Big) \tag{28}$$

で与えられる。ただし、

$$\mathbf{I}_k(i) = (i_1,\cdots,i_{k-1},\ i,\ i_{k+1},\cdots,i_g)$$

また、グループkに関する状態がiであるという条件のもとでのグループk並びにグループn（n≠k）が送信に成功する確率$S_k(i)$、$S_{k,n}(i)$は以下の式で与えられる。

$$\begin{aligned}S_k(i) &= \sum_{j=0}^{M_k}\{S_k^N(i,j) + S_k^O(i,j)\} \\ &= \sum_{\mathbf{I}_k(i)}\Big(\prod_{\ell\neq k} B_\ell(i_\ell)\Big\{\frac{(M_k-i)\lambda_k}{\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)} \cdot \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\lambda_k)D] \\ &\quad + \frac{i\gamma_k}{\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}\exp[-(\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\gamma_k)D]\Big\}\Big)\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_{k,n}(i) &= \sum_{j=0}^{M_k}\overline{S}_{k,n}(i,j) \\ &= \sum_{\mathbf{I}_k(i)}\Big(\prod_{\ell\neq k} B_\ell(i_\ell)\Big\{\frac{(M_n-i_n)\lambda_n}{\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}\exp[-(\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\lambda_n)D] \\ &\quad + \frac{i_n\gamma_n}{\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}\exp[-(\sum_{\ell=1}^{g}\beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\gamma_n)D]\Big\}\Big)\end{aligned} \tag{30}$$

これらを用いて、グループkに関する平均サイクル長、MC_k、は式（20）より得られる。それゆえ、グループkの回線利用率、U_k，並びに平均メッセージ遅延、D_k、はそれぞれ式（24）、（25）により与えられる。

5．数値結果

この節では近似手法の精度が数値結果を通して議論される。まずg＝2の場合、厳密解を数値的に得ることができるので、この場合について近似解を厳密解と比較する。また非対称なトラヒックがスループット及び平均メッセージ遅延に与える影響についても議論される。このため再送率は全ての端末で同一とする。LANにおいては端末間で共通のバックオフアルゴリズムが用いられているため、この設定は現実的と思われる。さらにこの設定は到着率及び送信時間の差がシステムの性能に与える影響をより際だたせると考えられる。

多種にわたるパラメータの設定に対して数値実験が行われた。すなわち、M_1=20、M_2=1, 5, 10、$\gamma_1=\gamma_2$=0.05, 0.1, 0.2, 0.4、G_1=0.2, 0.4、G_2=0.2、T_2=1.0, 2.0, 4.0、D＝0.1, 0.05 （ここで$G_i=M_i\lambda_i T_i$、T_1＝1．0）。よって、上で示された3つの解析の各々に対して144の異なる結果を得た。これらの結果を元にして提案された2つの近似手法の精度について議論し、続いて非対称なトラヒックが性能に及ぼす影響について考察する。

5．1．近似の精度

表1はg＝2の場合の近似精度に関する典型的な結果を示している。最初に4.1節で提案された一定の負荷による近似（以後近似1と呼ぶ）の精度のついて議論する。衝突が希なとき（$\gamma_1=\gamma_2$=0.05)、平均メッセージ遅延に対する厳密解と近似1との相対誤差はおよそ数パーセントである。全ての表において厳密解と近似解との相対誤差（%）は（　）で示されており、＊は小数点以下4桁以上の一致を示している。再送率が大きいとき（$\gamma_1=\gamma_2$=0.4）、衝突が頻繁に起こり端末間の干渉が増す。このとき平均メッセージ遅延の相対誤差は約12パーセントである。スループットに関しては全ての場合において1パーセント以下である。近似1は、簡単な考え方に基づいているが、期待されたよりも良い結果を与えている。

一方、可変の負荷による近似（以後近似2と呼ぶ）はあらゆる状況において厳密解と驚くべき一致を示している。再送率が小さいときには厳密解とほとんど差がない。再送率が大きいときでさえ相対誤差は平均メッセージ遅延に対して2パーセント以内である。

表2は幾つかの特別な場合（$\lambda_2=\gamma_2$、M_2＝1）ににについての結果が示されている。これらの場合、2つの近似解法はグループ1に対して厳密な解を与える。なぜ

ならグループ２からの回線にかかる負荷はその状態にかかわらず一定であるからである。それゆえ、２つの近似解法から得られるグループ２に対する結果は同じ b_1 の値（厳密解から得られるものと等しい）に基づいて導かれている。よって、これらの表で示される結果は各々の近似解法の基本的な精度を示している。一定の負荷による近似は端末間の干渉が少ないときには良い結果を与える。さらなる近似精度の改善は可変の負荷による近似を用いて達成されるが、後者による近似は前者に比べて多くの計算量を必要とする。

注意

我々が行った全ての数値実験において、一定の負荷による近似は各々のグループに対する回線利用率の下限（及び平均メッセージ遅延の上限）を与えた。この理由は以下のように説明できるかもしれない。厳密な解析では回線にかかる負荷の一時的な変動が考慮されている。一時的な負荷が高いとき、衝突がしばしば起こり、各衝突に関与するメッセージの数も大きくなる。一方、一時的な負荷が低いときには、衝突はあまり起こらず、これに関与するメッセージの数も少ない。我々のモデルでは衝突は関与したメッセージの個数に関わらず一定の期間 T_c で解消されると仮定されている。一定の負荷による近似は変動する負荷を時間に関して一様に分散させていると見なすことができる。それゆえ、回線はいつでも衝突を起こしやすくなっている。結果として各グループの回線利用率は低く見積られていると考えられる。またこれらの考察より、一定の負荷による近似に比べて可変の負荷による近似がより正確であることも説明できる。

TABLE 1 Accuracy of Approximaions.

$M_1=20$, $M_2=10$, $T_1=T_2=1.0$, $G_1=G_2=0.2$, $\gamma_1=\gamma_2$, $D=0.1$

$\gamma_1=\gamma_2$		U_1	D_1	U_2	D_2
0.05	exact	0.1747	14.4280	0.1560	14.0816
	approxi. 1	0.1746	14.5155	0.1556	14.2613
		(0.06)	(0.61)	(0.26)	(1.28)
	approxi. 2	0.1747	14.4199	0.1560	14.0833
		(*)	(0.06)	(*)	(0.01)
0.1	exact	0.1838	8.8091	0.1706	8.5842
	approxi. 1	0.1834	9.0077	0.1698	8.8639
		(0.22)	(2.25)	(0.47)	(3.26)
	approxi. 2	0.1838	8.7835	0.1707	8.5708
		(*)	(0.29)	(0.06)	(0.16)
0.2	exact	0.1895	5.5011	0.1806	5.3608
	approxi. 1	0.1890	5.8009	0.1794	5.7024
		(0.26)	(5.45)	(0.66)	(6.37)
	approxi. 2	0.1896	5.4537	0.1807	5.3241
		(0.05)	(0.86)	(0.06)	(0.68)
0.4	exact	0.1929	3.6652	0.1866	3.5779
	approxi. 1	0.1922	4.0479	0.1851	4.0022
		(0.36)	(10.4)	(0.80)	(11.9)
	approxi. 2	0.1930	3.5987	0.1868	3.5198
		(0.05)	(1.81)	(0.11)	(1.62)

TABLE 2 Accuracy of Approximations.

$M_1=20$, $M_2=1$, $T_1=1.0$, $G_1=0.4$, $G_2=0.2$, $\gamma_1=\gamma_2$, $D=0.1$

$\gamma_1=\gamma_2=0.05$, $T_2=4.0$	U_1	D_1	U_2	D_2
exact	0.2926	18.3418	0.1066	17.5208
approxi. 1	0.2926	18.3418	0.1061	17.6837
			(0.47)	(0.93)
approxi. 2	0.2926	18.3418	0.1065	17.5418
			(0.09)	(0.12)

$\gamma_1=\gamma_2=0.1$, $T_2=2.0$	U_1	D_1	U_2	D_2
exact	0.3259	11.3500	0.0990	10.1990
approxi. 1	0.3259	11.3500	0.0973	10.5510
			(1.72)	(3.45)
approxi. 2	0.3259	11.3500	0.0987	10.2510
			(0.30)	(0.51)

$\gamma_1=\gamma_2=0.2$, $T_2=1.0$	U_1	D_1	U_2	D_2
exact	0.3497	7.1857	0.0927	5.7809
approxi. 1	0.3497	7.1857	0.0886	6.2857
			(4.42)	(8.73)
approxi. 2	0.3497	7.1857	0.0920	5.8672
			(0.76)	(1.49)

５．２．非対称トラヒックの影響

非対称トラヒックが性能に与える影響が表３に示されている。この表において T_2 の増加と共に U_2 が増加している。またグループ２の平均待が増加している。またグループ２の平均待ち時間(D_2-T_2)は T_2 の長さにあまり影響されない。これらの理由は、CSMA/CDにおいて送信時間が長いほど回線利用率が大きくなる[BUX84]という良く知られた事実による。一方、グループ１の振舞いはもっと複雑である。U_1 の値は $T_1=T_2$ のとき最も小さく、$T_2=2T_1$ のとき最も大きくなっている。それゆえ、グループ１に関しては比 T_2/T_1 に対する単調な性質は見いだせない。表４はトラヒックの非対称性が性能に与える影響を示している。M_2 の増加に従いトラヒックは対称に近づくが、それに伴って、U_2、D_2 も大きくなっている。これは次のように説明できる。新しく到着したメッセージは端末が保留状態ならば捨てられる。それゆえ、到着するメッセージをより多くの端末に振り分けることにより呼損となるメッセージの数を減らすことができるが、端末間の干渉は大きくなる。前者は U_2 の増加を導き、後者は D_2 の増加を引き起こす。グループ１に関しては端末間の干渉の増加によって、U_1 が減少する。しかし、全体での回線利用率（U_1+U_2）は M_2 の増加に

従って大きくなっている。

6．結論

本稿では非対称呼源を持つＣＳＭＡ／ＣＤの厳密な解析を行った。しかしこの解析はグループ数あるいは端末数が大きくなると非常に大きな記憶領域を必要とする。それゆえ、大きな端末数あるいはグループ数を扱うことのできる２つの近似解析を提案した。これらの近似の精度は厳密解との比較により議論され、一定の負荷による近似は端末間の干渉が少ないとき良い近似を与えることが示された。５節で述べたように、この近似は我々が行った144の異なる全ての場合に対して各グループの回線利用率の下限を与えた。可変の負荷を持った近似はあらゆる状況で素晴らしい精度を示し、厳密解との相対誤差は平均メッセージ遅延に関して数パーセント以下であった。

ＣＳＭＡ／ＣＤの性能解析の現状は実際のシステムの性能予測を行うにはまだまだ不十分であり、実際のシステムの状況を反映しているような数学モデルが必要である。本稿での解析は、より現実的なシステムの性能評価を可能にすると思われる。非対称でかつバッファを持つＣＳＭＡ／ＣＤシステムの性能解析が今後の課題として残されている。

付録

可変の負荷による近似の場合の状態遷移確率（式（12）で定義）は以下の式で与えられる。

$$S_k^N(i,j) = \sum_{I_k(i)} \{ \prod_{\ell \neq k} B_\ell(i_\ell) \} \cdot \frac{(M_k - i)\lambda_k}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{I_k(i)}(\ell)} \cdot \exp\left[-\left(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{I_k(i)}(\ell) - \lambda_k\right)D\right] B(M_k - i - 1, j - i, \lambda_k, T_k)$$

TABLE 3 Effect of Heterogeneous Traffic Characteristics on Performance.

$M_1=20,\ M_2=10,\ T_1=1.0,\ G_1=0.4,\ G_2=0.2,\ \gamma_1=\gamma_2=0.4,\ D=0.1$

		U_1	D_1	U_2	D_2
$T_1=T_2$ (balanced)	exact	0.3523	6.7564	0.1761	6.7564
$T_2=2T_1$	exact	0.3535	6.5721	0.1858	7.6273
	approxi. 1	0.3491	7.2804	0.1841	8.5942
		(1.24)	(10.8)	(0.91)	(12.7)
	approxi. 2	0.3543	6.4449	0.1860	7.4942
		(0.23)	(1.94)	(0.11)	(1.78)
$T_2=4T_1$	exact	0.3524	6.7403	0.1906	9.8355
	approxi. 1	0.3473	7.5771	0.1896	10.9360
		(1.45)	(12.4)	(0.52)	(11.2)
	approxi. 2	0.3534	6.5815	0.1907	9.6845
		(0.28)	(2.36)	(0.05)	(1.54)

TABLE 4 Effect of Heterogeneous Traffic Characteristics on Performance.

$M_1=20,\ T_1=T_2=1.0,\ G_1=G_2=0.2,\ \gamma_1=\gamma_2=0.4,\ D=0.05$

		U_1	D_1	U_2	D_2
$M_2=1$	exact	0.1947	2.7201	0.1435	1.9685
	approxi. 1	0.1946	2.7692	0.1383	2.2289
		(0.05)	(1.81)	(3.62)	(13.2)
	approxi. 2	0.1947	2.7145	0.1434	1.9721
		(*)	(0.21)	(0.07)	(0.18)
$M_2=5$	exact	0.1940	3.0589	0.1793	2.8790
	approxi. 1	0.1936	3.2994	0.1773	3.1937
		(0.21)	(7.86)	(1.12)	(10.9)
	approxi. 2	0.1941	3.0338	0.1794	2.8619
		(0.05)	(0.82)	(0.06)	(0.59)
$M_2=10$	exact	0.1938	3.1579	0.1883	3.0909
	approxi. 1	0.1933	3.4601	0.1871	3.4223
		(0.26)	(9.57)	(0.64)	(10.7)
	approxi. 2	0.1939	3.1259	0.1884	3.0628
		(0.05)	(1.01)	(0.05)	(0.91)
$M_2=20$ (balanced)	exact	0.1937	3.2207	0.1937	3.2207

$$\overline{S}_{k,n}(i,j) = \sum_{\mathbf{I}_k(i)} \{\prod_{\ell\neq k} B_\ell(i_\ell)\}\{\frac{(M_n-i_n)\lambda_n}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}$$

$$\cdot \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\lambda_n)D]$$

$$+ \frac{i_n\gamma_n}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)} \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\gamma_n)D]\}$$

$$\cdot B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_n)$$

$$F_k^N(i,j) = \sum_{\mathbf{I}_k(i)} \{\prod_{\ell\neq k} B_\ell(i_\ell)\}\frac{(M_k-i)\lambda_k}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}$$

$$\cdot\{B(M_k-i-1,j-i,\lambda_k,T_c+D)$$

$$- \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\lambda_k)D]$$

$$\cdot B(M_k-i-1,j-i,\lambda_k,T_c)$$

$$\overline{F}_k(i,j) = \sum_{\mathbf{I}_k(i)} \{\prod_{\ell\neq k} B_\ell(i_\ell)\} \sum_{n\neq k} (\frac{(M_n-i_n)\lambda_n}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)}$$

$$\cdot\{B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_c+D)$$

$$- \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\lambda_n)D]$$

$$\cdot B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_c)\}$$

$$+ \frac{i_n\gamma_n}{\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)} \{B(M_k-i,j-i,\lambda_k T_c+D)$$

$$- \exp[-(\sum_{\ell=1}^{g} \beta_{\mathbf{I}_k(i)}(\ell)-\gamma_n)D]$$

$$\cdot B(M_k-i,j-i,\lambda_k,T_c)\})$$

なお$S_k^0(i,j)$($F_k^0(i,j)$) は$S_k^N(i,j)$($F_k^N(i,j)$) の場合と同様にして得ることができる。

参考文献

[BUX84] W.BUX, "Performance Issues in Local-Area Networks," IBM Systems Journal, vol.23, pp.351-374, Apr. 1984.

[COYL85] E.J.Coyle and B.Liu, "A Matrix Representation of CSMA/CD Networks," IEEE Trans. Communi., vol.COM-33, pp.53-64, Jan. 1985.

[HEYM86] D.P.Heyman, "The Effect of Random Message Sizes on the Performance of the CSMA/CD Protocols," IEEE Trans. Communi., vol.COM-34, pp. 547-553, Jun. 1986.

[KLEI85] L.Kleinrock, "On Queueing Problems in Random-Access Communications," IEEE Trans. Inform. Theory, vol.IT-31, pp.166-175, Mar. 1985.

[TAKAG85] H.Takagi and L.Kleinrock "Throughput Analysis for Persistent CSMA Systems," IEEE Trans. Communi., vol.COM-33, pp.627-638, Jul. 1985.

[Takah86] Y.Takahashi, Y.Matsumoto and T.Hasegawa, "Probability Distributions of Delay and Interdeparture Time in Non-slotted CSMA/CD, Local Communi. Sys. : LAN and PBX, J.P.Cabanel et al. (eds), pp.423-435, North-Holland, Nov. 1986.

[TANE81] A.S.Tanenbaum, Computer Networks, Prentice-Hall, 1981.

[TOBA82] F.A.Tobagi, "Distributions of Packet Delay and Interdeparture Time in Slotted ALOHA and Carrier Sense Multiple Access," J.ACM., vol.29, pp.907-927, Oct. 1982.