# 1レジスタ機械における直列型プログラムのコード最適化
# CODE OPTIMIZATION OF STRAIGHT LINE PROGRAM FOR A ONE-REGISTER MACHINE

木村　春彦[†]　　原尾　政輝[††]　　野口　正一[††]
Haruhiko KIMURA　　Masateru HARAO　　Shoichi NOGUCHI
[†] 東北大学大学院　　[††] 東北大学電気通信研究所
Postgraduate School of Technology, Tohoku University　　Research Institute of Electrical Communication, Tohoku University

あらまし　1レジスタ機械の直列型プログラムのコード変換については，dag( directed acyclic graph )が2進木の場合には最適なコード変換アルゴリズムがAnderson(1964,1)によって示されている。しかし一般のdagについては未解決であった。本論文ではdagへマーク部分列と呼ぶ概念を用いて，一般のdagの場合も最適コード変換が可能であることを明らかにし，又そのアルゴリズムを示した。更にdagから最適プログラムの命令数を求める式も併せて示す。

## 1. まえがき

コンパイラの設計上で重要な問題として良いオブジエクト・コードの作り方がある。この観点から最適なコードへの変換アルゴリズムが議論されている。その一つとして機械に独立な立場から，直列型プログラムの重要なクラスについて，この最適コード変換アルゴリズムが示されている。直列型プログラムはdag( 閉路を持たない有向グラフ )として表わされるので，まず，1レジスタ機械で2進木dagについては，その最適化アルゴリズムがAnderson(1964,1)によって示された。又，多レジスタ機械で2進木dagについてはMeyers(1965,2)が最適化アルゴリズムを示しており，更にNakata(1967,3)はstore命令を使用しないという条件の下でレジスタ数を最小にするアルゴリズム，及びレジスタ数に制限がある場合にstore命令を最小にするアルゴリズムを示した。SethiとUllman(1970,4)は算術式に交換法則と結合法則を許したときの最適化アルゴリズムを示した。

本論文では1レジスタ機械で一般のdagについての最適コードへの変換アルゴリズムを示し，更にdagから最適なプログラムの命令数を求める式を示す。

まず，第2章で直列型プログラムのモデルを定義し，その表現方法について述べる。第3章では，マーク部分列を定義し，最適なプログラムを得るには何が必要になるかについて論じる。第4章は，その最適なプログラムを生成する為の手段について述べ，第5章で，dagから最適なプログラムの命令数を求める式を示す。

## 2. 直列型プログラムのモデル

高級言語プログラムで演算式からなるプログラムを直列型プログラムと呼び，これを二項演算命令だけからなる中間言語プログラム$\mathcal{B}$に変換する。$\mathcal{B}$からは目的プログラムが一意的に決まるが，本論文では$\mathcal{B}$をdag $D(\mathcal{B})=(X,U)$に変換し，$D(\mathcal{B})$で表現される中間言語プログラムの中から，命令数が最小の目的プログラム$P_0$を生成する中間言語プログラム$\mathcal{B}'$を導く問題を考える(図1)。ただし，Xは頂点集合で，

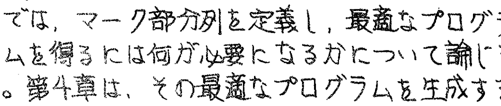


図1．最適化の概要
Fig. 1—Optimization Scheme.

Uは弧集合である。これら$\mathcal{B}$から$\mathcal{B}'$までの一連の操作が最適コード変換で，求める$\mathcal{B}'$を最適プログラムと呼ぶ。

［定義1］ ステートメント$S_i$を$x_i \leftarrow B_{i1}\ \theta_i\ B_{i2}$とするとき，中間言語プログラム$\mathcal{B}$は$(P, I, U)$であり，

(i) Pはステートメント$S_1; S_2; \cdots; S_e$のリスト，

(ii) Iは入力変数の集合，

(iii) Uは出力変数の集合である。

ただし，$x_i, B_{i1}, B_{i2}$は変数で，$\theta_i$は二項演算子である。 ∎

AhoとUllman (1972，5) は自然な方法で$\mathcal{B}$を表現する$D(\mathcal{B})$をみつけることが可能であることを示した。本論文でも同じ定義を用いる。

［定義2］ 頂点$x$から下向きへ出る2本の弧の終点を左から$B_1$, $B_2$とするとき，それぞれ$x$の左直子孫，右直子孫と呼び，$LDD(x)=B_1$，$RDD(x)=B_2$と定義する。 ∎

［定義3］ 与えられた$\mathcal{B}=(P, I, U)$に対し，$D(\mathcal{B})$は次のように構成される有向グラフである。

(i) $B \in I$ に対し，ラベルBを持つ頂点を作る。

(ii) 任意の$S_i \in P$に対し，$S_i$が$x_i \leftarrow B_{i1}\ \theta_i\ B_{i2}$であれば，$LDD(x_i)=B_{i1}$，$RDD(x_i)=B_{i2}$となるラベル$x_i$を持つ頂点を加える。

以上のような頂点集合をXで表わし，弧集合$\{(x_i, B_{ij}) \mid i=1,2,\cdots,e,\ j=1,2\}$をUとする。但し，頂点のラベルは全て異なる。 ∎

このようにして構成されたグラフ$D(\mathcal{B})=(X, U)$を$\mathcal{B}$のdagと呼ぶ。ただし，$\mathcal{B}$を指定する必要がない場合はdagを単にDで表わす。

本論文では$D(\mathcal{B})$の変形を許さないので，dagは一意的に決まる。したがって，出力結果が変化しないようにステートメントの実行順序を変えて$\mathcal{B}'$を求めれば良いことになる。

Dの葉点以外の頂点$x$を評価するには，$LDD(x)$の値をアキュムレータへ移し，この値と記憶番地に格納されている$RDD(x)$の値とを作用させて演算する。ACCをアキュムレータの内容とし，記憶番地Mの内容をC(M)で表わすと，アセンブラ命令は

(i) LD M (ACC←C(M)；load命令)

(ii) ST M (C(M)←ACC；store命令)

(iii) OP M (ACC←(ACC θ C(M))；演算命令)

の3つの型で，コード発生機(Code Generator)は$S_i: x_i \leftarrow B_{i1}\ \theta_i\ B_{i2}$を次のようなアセンブラ命令に変換する。

LD $B_{i1}$ (1)
OP $B_{i2}$
ST $x_i$ (2)

このとき，$S_{i-1}$で$B_{i1}(=x_{i-1})$がアキュムレータの中に割り当てられているならば，(1)は不要である。同様に$x_i$の値が$S_{i+1}$の$B_{i+1,1}$の値ならば，(2)は不要であるが，将来$x_i$の値が参照されるのであれば，(2)は必要になる。又，$x_i$が出力変数であれば$S_{e+1}$で参照されるとする。

## 3. 最適コード変換

$\mathcal{B}$のステートメントと$D(\mathcal{B})$の葉点以外の頂点とは，dagの構成方法から対応することがわかる。著者らは$D(\mathcal{B})$から$\mathcal{B}'$を生成する為に，$\mathcal{B}'$のステートメント・リストに対応する頂点のコード化順序を導かなければならない。これは(1)，(2)が最小となるように並べられる頂点系列であり，次に定義するマーク部分列により，マーク部分列の系列として決定することができる頂点系列である。

［定義4］ 頂点のコード化順序を$\mathcal{L}=\langle x_1, x_2, \cdots, x_e \rangle$とするとき，次の条件を全て満足する頂点系列$x_j, x_{j+1}, \cdots, x_{j+k}$をマーク部分列と呼ぶ。

(i) $LDD(x_j) \neq x_{j-1}$

(ii) $0 \leq i \leq k-1$に対し，$LDD(x_{j+i+1})=x_{j+i}$

(iii) $LDD(x_{j+k+1}) \neq x_{j+k}$

(iv) $x_{j+k}$は次のいずれかである。

(a) $x_{j+k} \in \{x \mid x \in X,\ LDD(y)=x$ となる$y$がない$\}$ (3)

(b) $x_{j+k} \in \{x \mid x \in X,\ (x$の直接の祖先の個数$) \geq 2\}$ (4) ∎

$\mathcal{L}$をマーク部分列の系列とすると，余分なstore命令が不要になるので，本論文では$\mathcal{L}$をマーク部分列の系列となるように作る。

［定理1］ $\mathcal{L}$のマーク部分列の数が最小であるならば，$\mathcal{L}$をコード変換してできるプログラムは最適プログラムである。

(証明) load命令を必要とする頂点はマーク部分列の始点だけなので，仮定からload命令数が最小となる。又，store命令を必要とする

頂点は定義4の(3),(4)に相当する頂点，及び出力変数のラベルを持つ頂点だけなので，store命令数はマーク部分列の数によって変化することはない。故に定理1が成立する。 ∎

この結果，マーク部分列の数を最小にする$\mathcal{L}$を生成すれば良いことになる。

## 4. マーク部分列の数が最小の$\mathcal{L}$の生成

$\mathcal{L}$のマーク部分列の数を最小にする為に必要になる，dagに関連した諸定義を述べ，マーク部分列の性質からマーク部分列の数を最小にする一連の操作について述べる。

### 4.1 dagに関連した諸定義

Dの弧の列$\mu=(u_1, u_2, \cdots, u_q)$で，その各弧が一つの端点を一つ前の弧と共有し，他の端点を次の弧と共有するものを道と呼び，すべての弧$u_i$ $(i<q)$に対して$u_i$の終点が$u_{i+1}$の始点に一致する$\mu$を有向道と呼ぶ。更に同一の頂点に二度以上出会わない有向道$\mu_i$を初等的有向道と呼ぶ。[8] この$\mu_i$は弧の集合で完全に決まり，$\mu_i=(A_i, U_i)$ $(A_i \subset X, U_i \subset U)$と書いたり，$\mu_i=U_i$と書いたりする。又，始点$x_1$，終点$x_{q+1}$の任意の1本の初等的有向道$\mu$を$\mu=\mu[x_1, x_{q+1}]$と書いたり，頂点集合がわかっているときには$\mu=[x_1, x_2, \cdots, x_{q+1}]$のように頂点系列で書いたりする。

［定義5］ $\mu_l=(A_l, U_l)$, $\mu_m=(A_m, U_m)$間のP−切断集合を$\omega(A_l, A_m)$で表わし，

$$\omega(A_l, A_m)=\omega^+(A_l, A_m)\cup\omega^-(A_l, A_m) \quad (5)$$

と定義する。ただし，$\mu[x_i, x_i']=(A_x, U_x)$とするとき，

$$\omega^+(A_l, A_m)=\{\mu[x_i, x_i'] \mid x_i\in A_l,\ x_i'\in A_m,\ A_x\cap A_l=\{x_i\},\ A_x\cap A_m=\{x_i'\}\} \quad (6)$$

$$\omega^-(A_l, A_m)=\{\mu[x_i, x_i'] \mid x_i\in A_m,\ x_i'\in A_l,\ A_x\cap A_m=\{x_i\},\ A_x\cap A_l=\{x_i'\}\} \quad (7)$$ ∎

［記法］ 頂点$x_k$が頂点$x_j$の子孫であることを$x_j \geqslant_p x_k$で表わす。 ∎

$\omega(A_l, A_m)$の元に規則1を用いて大小関係を付け，大きい方から順に$\mu_{l,1}, \mu_{l,2}, \cdots, \mu_{l,s}$と呼ぶ。

［規則1］ $\mu[x_j, x_j'], \mu[x_k, x_k']\in\omega(A_l, A_m)$の向きを取った道をそれぞれ$\pi_j, \pi_k$とし，$\pi_j=\pi(n_j, n_j')$, $\pi_k=\pi(n_k, n_k')$で表わす。ただし，$n_j$, $n_k$ $(\in A_l)$は始点であり，$n_j', n_k'$ $(\in A_m)$は終点である。$\pi(n_j, n_j'), \pi(n_k, n_k')$に対し，

(i) $n_j \geqslant_p n_k$, $n_j \neq n_k$ならば，

$$\mu[x_j, x_j'] > \mu[x_k, x_k']$$

(ii) $n_j=n_k$ならば，

(a) $n_j' \geqslant_p n_k'$のとき，$\mu[x_j, x_j'] > \mu[x_k, x_k']$

(b) $n_k' \geqslant_p n_j'$のとき，$\mu[x_k, x_k'] > \mu[x_j, x_j']$

(iii) $n_k \geqslant_p n_j$, $n_k \neq n_j$ならば，

$$\mu[x_k, x_k'] > \mu[x_j, x_j']$$ ∎

［定義6］ $\boldsymbol{\omega}(A_l, A_m) \triangleq (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_s)$

ただし， (8)

$$\omega_i=\begin{cases}+1 & (\mu_{l,i}\in\omega^+(A_l, A_m)\text{のとき})\\ -1 & (\mu_{l,i}\in\omega^-(A_l, A_m)\text{のとき})\end{cases} \quad (9)$$ ∎

［定義7］ $\boldsymbol{\omega}(A_l, A_m)$の$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_s$が同じ符号を持つとき，$\omega(A_l, A_m)$をP−有向切断集合と呼ぶ。 ∎

### 4.2 最小数のマーク部分列を作る為の規則

最小数のマーク部分列を作る為に，頂点集合がマーク部分列となるような，互いに素な最小数の初等的有向道を求める為の規則を示す。この規則はマーク部分列の性質から導いているので，まずこの性質を述べる。

［定義8］ LDD($x$)，RDD($x$)が既にコード化されているとき，$x$はコード変換可能であると言う。又，少なくとも一方がコード化されていないとき，$x$はコード変換不可能であると言う。 ∎

［性質1］ マーク部分列$M_i (\subset X)$の性質：

(i) D中の任意の$M_l, M_m$を結ぶ初等的有向道の向きは，全て同一方向である。

(ii) $y \notin M_i$, $x \in M_i$で，$x \geqslant_p y \geqslant_p z$とするとき，$z \notin M_i$。

（証明） マーク部分列は始点から終点までに対し，連続してコード変換可能なので(i)が成立する。又，$z \in M_i$とすると，連続にはコード変換不可能なので(ii)が成り立つ。 ∎

最小数のマーク部分列からなる$\mathcal{L}$を作るには，そのような$\mathcal{L}$のマーク部分列を頂点集合とする初等的有向道をいかにして導くかが問題になる。

その為に，重複しても良いから，dagから次の条件を全て満足する初等的有向道$\mu_j$を全て導く。

［ 条件1 ］ $\mu_j=[n_i, n_{i+1}, \cdots, n_{i+k}]$ に関し，
（i） $n_i \in \{x \mid x \in X$, $LDD(y)=x$ となる $y$ がない$\}$
（ii） $0 \leqq t \leqq k-1$ に対し，$LDD(n_{i+t})=n_{i+t+1}$ ;
（iii） $LDD(n_{i+k}) \in I$ ∎

そして，頂点集合がマーク部分列となるように，性質1を用いてこれらの $\mu_j$ を分割し，互いに素な最小数の初等的有向道を求める。

それには，まず，条件1を満足する $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i$ を次のようにして，互いに素な初等的有向道に変換する。

$\mu_j=(A_j, U_j)$ とするとき，$A_1, A_2, \cdots, A_i$ の内，頂点の集合Nを共有する $A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,l_k}$ を捜し出し，この中から $\forall x \in A_{k,t}$ に対し，$x$ の子孫が $A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,t-1}, A_{k,t+1}, \cdots, A_{k,l_k}$ には含まれない $A_{k,t}$ を捜し出して，$A_{k,1}, A_{k,2}, \cdots, A_{k,t-1}, A_{k,t+1}, \cdots, A_{k,l_k}$ をそれぞれNで差し引く。この操作を $A_1, A_2, \cdots, A_i$ が互いに素になるまで繰り返す。

次に，2種類のラベルを導入して，マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求める為の規則を示す。

［ 定義9 ］ $x_k \in A_l$ とする。このとき，D中の全ての $\boldsymbol{\omega}(A_l, A_m)$ において，$\mu_{l,j}=\mu[x_k, x'_k]$，$\mu_{l,j+1}=\mu[x'_{k-p}, x_{k-p}]$，$\mu_{l,j-t}=\mu[x_{k+u}, x'_{k+u}]$，$\mu_{l,j+g}=\mu[x'_{k-r}, x_{k-r}]$ とする $j=1, 2, \cdots, S-1$ に対し，$\omega_j=1$，$\omega_{j+1}=-1$ となる箇所を捜し出し，
（i） $x'_k \geqslant_p x'_{k-p}$ ならば，$x_k$, $x_{k-p}$ のそれぞれに $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ を付ける。（これら $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ を反交差ラベルと呼ぶ）
（ii） $x'_{k-p} \geqslant_p x'_k$ $(x'_{k-p} \neq x'_k)$ ならば，
 (a) $x_k$, $x_{k-p}$ のそれぞれに $\langle x_k, m\rangle_l$, $\langle x_k, m\rangle'_l$ を付ける。（これら $\langle x_k, m\rangle_l$, $\langle x_k, m\rangle'_l$ を交差ラベルと呼ぶ）
 (b) $\{\omega_{j+g} \mid \omega_{j+g}=-1, x'_k \geqslant_p x'_{k-r}\} \ni$ （$g$ が最小の $\omega_{j+g}$）に対し，$x_k$, $x_{k-r}$ のそれぞれに $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ を付ける。
 (c) $\{\omega_{j-t} \mid \omega_{j-t}=+1, x'_{k+u} \geqslant_p x'_{k-p}\} \ni$ （$t$ が最小の $\omega_{j-t}$）に対し，$x_{k+u}$ に $[x_{k+u}, m]_l$ が付いていなければ，$x_{k+u}$, $x_{k-p}$ のそれぞれに $[x_{k+u}, m]_l$, $[x_{k+u}, m]'_l$ を付ける。

（図2，図3を参照） ∎

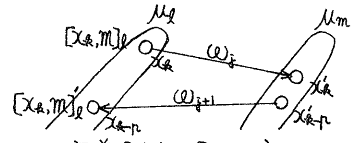


図2．定義9(i)のDの一部
Fig. 2—A section of D for def. 9(i).

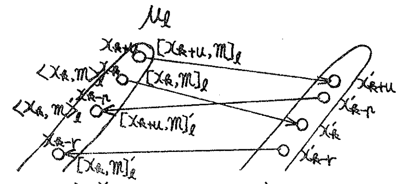


図3．定義9(ii)のDの一部
Fig. 3—A section of D for def. 9(ii).

［ 命題1 ］ $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ 及び $\langle x_k, m\rangle_l$, $\langle x_k, m\rangle'_l$ の付け方は一意的である。

（証明） $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ 及び $\langle x_k, m\rangle_l$, $\langle x_k, m\rangle'_l$ の $l$, $m$ が意味する $\boldsymbol{\omega}(A_l, A_m)$ は一意的に決まるから，$\omega_j=+1$, $\omega_{j+1}=-1$ に対し，定義9から $[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$ 及び $\langle x_k, m\rangle_l$, $\langle x_k, m\rangle'_l$ が一意的に付けられる。 ∎

$[x_k, m]_l$, $[x_k, m]'_l$, $\langle x_k, m\rangle_l$ 及び $\langle x_k, m\rangle'_l$ はそれぞれ一つの頂点だけに付けられる。今，頂点 $x_k$ に $[x_k, m]_l$ が付いているとき，$[x_k, m]'_l$ が付けられている頂点を示すのに $\#[x_k, m]_l$ で表わし，$x_k$ に $\langle x_k, m\rangle_l$ が付いていれば，$\langle x_k, m\rangle'_l$ が付けられている頂点を $b\langle x_k, m\rangle_l$ で表わす。

［ 性質2 ］ $\#[x_k, m]_l$ が示す頂点は一意的である。

［ 性質3 ］ $b\langle x_k, m\rangle_l$ が示す頂点は一意的である。

性質2，3は命題1から明らかである。

［ 定義10 ］ $x_k \in A_l$ のとき，
（i） $[\![[x_k, m]_l]\!] \triangleq \mu[x_k, \#[x_k, m]_l] \subset \mu_l$ (10)
（ii） $[\![\langle x_k, m\rangle_l]\!] \triangleq \mu[x_k, b\langle x_k, m\rangle_l] \subset \mu_l$ (11)
∎

［ 定義11 ］ $x_k, x_{k-p} \in A_l$, $b\langle x_k, m\rangle_l = x_{k-p}$, $\mu_{l,j}=\mu[x_k, x'_k]$, $\mu_{l,j+1}=\mu[x'_{k-p}, x_{k-p}]$ とするとき，

$$\rho\langle x_k, m\rangle_l \triangleq \mu[x'_{k-p}, x'_k] \subset \mu_m \qquad (12)$$
∎

［ 規則2 ］ ラベル付けされたDに対し，
（i） $[\![[x_k, m]_l]\!]$ の(4)を終点とする任意に選んだ

1つの弧に切点を設けて初等的有向道を分割する。

(ii) $[\![\langle x_k, m\rangle_\ell]\!]$, 又は $P\langle x_k, m\rangle_\ell$ のいずれかから，(4)を終点とする弧を任意に1つ選び，それに切点を設けて初等的有向道を分割する。 ||

［補題1］ マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道は，規則2を用いて求めることができる。

（証明） 性質1(i)から $\omega(M_\ell, M_m)$ はP–有向切断集合である。それ故，$\omega_j=1$, $\omega_{j+g}=-1$ となる箇所を見つけ，$\omega(A_\ell, A_m)$ の全要素の符号が同じになるようにしなければならない。このような箇所は図4，図5の場合だけであるから，図4の場合には $\mu[x_k, x_{k-p}]$ or $\mu[x'_k, x'_{k-p}]$，図5の場合には $\mu[x_k, x_{k-p}]$ or $\mu[x'_{k-p}, x'_k]$ から任意に1つの弧を選び，それに切点を設けて分割すればP–有向切断集合になる。

しかし，性質1(ii)から，図4の場合には $\mu[x_k, x_{k-p}]$ の弧を選ばなくてはならないことがわかる。又，定義4(iV)から，切点は(4)を終点とする弧に設けなければならない。

以上のことを満足するように切点を設ければ，全ての初等的有向道は頂点集合をマーク部分列とし，切点の設け方によって初等的有向道を最小数にすることがわかる。又，図4，図5の双方とも $\omega_j=+1$, $\omega_{j+g}=-1$ の関係を満足する一番近い $\mu_{\ell,j}$, $\mu_{\ell,j+g}$ の対だけを考えれば十分であるので補題1が成り立つ。

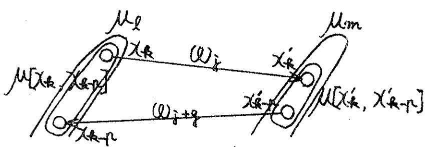


図4. Dの一部

Fig. 4—A section of D.

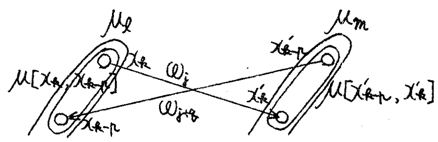


図5. Dの一部

Fig. 5—A section of D.

## 4.3 センターと切点

規則2を用いて，マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求めるには，切点を決めねばならない。最適な切点の位置を求めることは重要であり，その為のアルゴリズムを与える。

［定義12］

$$\Delta \triangleq \{[\![[x_n, V]_\ell]\!] \mid [\![[x_k, m]_\ell]\!] \cap [\![[x_n, V]_\ell]\!] \neq \phi\} \cup \{[\![\langle x_n, V\rangle_\ell]\!] \mid [\![[x_k, m]_\ell]\!] \cap [\![\langle x_n, V\rangle_\ell]\!] \neq \phi\} \quad (13)$$

$$\mathcal{C} = \{C_\Lambda \mid {}^\exists\Lambda \subseteq \Delta,\ C_\Lambda = \bigcap_{r\in\Lambda} r \neq \phi,\ C_\Lambda \cap \{S\} = \phi,\ {}^\forall S \in \Delta - \Lambda\} \quad (14)$$

とするとき，$\mathcal{C}$ の元 $C_t$ を $[\![[x_k, m]_\ell]\!]$ のセンターと呼ぶ。又，(13)の $[\![[x_k, m]_\ell]\!]$ を $[\![\langle x_k, m\rangle_\ell]\!]$ とした $\mathcal{C}$ の元 $C_t$ を $[\![\langle x_k, m\rangle_\ell]\!]$ のセンターと呼ぶ。ただし，$[\![[x_n, V]_\ell]\!]$, $[\![[x_k, m]_\ell]\!]$, $[\![\langle x_n, V\rangle_\ell]\!]$, $[\![\langle x_k, m\rangle_\ell]\!] \subset U$ とする。 ||

従って，いくつかのセンターの終弧に切点を設ければ，規則2が実行されたことになる。

センターは次のアルゴリズムから求められる。

［アルゴリズム1］

入力：ラベル付けされた $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_i$
ただし，$\mu_j = [x_{j,1}, x_{j,2}, \cdots, x_{j,P_j}]$

出力：センター $C_1, C_2, \cdots, C_f$

```
begin
  Let L(x) be the label of node x;
  f←1;
  for j=1 still i do
    for k=1 still P_j do
      if k=1 then Δ'←μ_j;
      W←{⟦[x_{j,k}, V]_j⟧ | [x_{j,k}, V]_j ∈ L(x_{j,k})} ∪
          {⟦⟨x_{j,k}, V⟩_j⟧ | ⟨x_{j,k}, V⟩_j ∈ L(x_{j,k})};
      if W=φ then W←{⟦[x_{j,t}, V]_j⟧ | [x_{j,t}, V]'_j
      ∈ L(x_{j,k})} ∪ {⟦⟨x_{j,t}, V⟩_j⟧ | ⟨x_{j,t}, V⟩'_j ∈ L(x_{j,k})};
      if W=φ then go to NEXT;
      ARC←∩_{w∈W} w;
      Δ''←Δ' ∩ ARC;
      if Δ''=φ then do
        C_f←Δ'; f←f+1; Δ'←ARC;
      end
      else Δ'←Δ'';
      if k=P_j then C_f←Δ';
NEXT: end
    end
end
```
||

［命題2］$⟦[x_k, m]_\ell⟧$ 及び $⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$ のセンターは一意的に決まる。

（証明）定義12から明らかである。 ∎

［性質4］$⟦[x_k, m]_\ell⟧$（$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$）のセンター $C_1, C_2, \cdots, C_t$ に関し，

$$\forall v \in \Delta,\ \bigcup_{f=1}^{t} C_f \cap v \neq \phi$$

（証明）$v_{f,i} \in \Delta$ とするとき，$C_f = v_{f,1} \cap v_{f,2} \cap \cdots \cap v_{f,k_f}$。又，$v_{f,i}$ はセンターを導くときに必ず使われるので，性質4が言える。 ∎

［定義13］$x_k \in A_\ell$, $x_n \in A_m$ とするとき，

$\Gamma\langle x_k, m\rangle_\ell \triangleq \{\langle x_n, \ell\rangle_m \mid P\langle x_k, m\rangle_\ell$ に付けられている $\langle x_n, \ell\rangle_m$ で，$P\langle x_n, \ell\rangle_m \supsetneqq ⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧\} \cup \{\langle x_n, \ell\rangle'_m \mid P\langle x_k, m\rangle_\ell$ に付けられている $\langle x_n, \ell\rangle'_m$ で，$P\langle x_n, \ell\rangle_m \supsetneqq ⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧\}$ (15)

∎

［補題2］$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$ の(4)を終点とする任意に選んだ1つの弧に切点を設けると，$\Gamma\langle x_k, m\rangle_\ell$ は切点の取り方に関与しない。

（証明）$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$ に切点を設けることは $\forall P\langle x_n, \ell\rangle_m \in \{P\langle x_n, \ell\rangle_m \mid \langle x_n, \ell\rangle_m \in \Gamma\langle x_k, m\rangle_\ell\}$ に切点を設けることになる。それ故，$\langle x_n, \ell\rangle_m$, $\langle x_n, \ell\rangle'_m$ の役目は果たされたことになるので，$\Gamma\langle x_k, m\rangle_\ell$ は切点の取り方に関与しない。つまり消去できる。 ∎

次にマーク部分列を頂点集合とする，最小数の初等的有向道を求める手続きを以下に示す。

［補題3］マーク部分列を頂点集合とする，最小数の初等的有向道を求める為には，$⟦[x_k, m]_\ell⟧$ のセンターが $C_1$ だけのとき，$C_1$ の終弧に切点を設けて初等的有向道を分割することが最適である。又，このとき $⟦[x_k, m]_\ell⟧$ に含まれる各 $[x_n, V]_\ell$, $[x_n, V]'_\ell$, $\langle x_n, V\rangle_\ell$, $\langle x_n, V\rangle'_\ell$, 及び $\Gamma\langle x_n, V\rangle_\ell$ は切点の取り方に関与しない。

（証明）$C_1$ の終弧に切点を設ければ，$⟦[x_k, m]_\ell⟧$ のセンターが1つの為，各 $⟦[x_n, V]_\ell⟧$, $⟦\langle x_n, V\rangle_\ell⟧$ にも切点を設けたことになり，各 $[x_n, V]_\ell$, $[x_n, V]'_\ell$, $\langle x_n, V\rangle_\ell$, $\langle x_n, V\rangle'_\ell$ は切点の取り方に関与しない。又，補題2から $\Gamma\langle x_n, V\rangle_\ell$ も切点の取り方に関与しない。そして，この終弧の終点は(4)であるから補題3が成り立つ。 ∎

［補題4］$P\langle x_k, m\rangle_\ell$ に切点があれば，$\langle x_k, m\rangle_\ell$, $\langle x_k, m\rangle'_\ell$ は切点の取り方に関与しない。

又，$⟦[x_k, m]_\ell⟧$ に切点があれば，$[x_k, m]_\ell$, $[x_k, m]'_\ell$ は切点の取り方に関与しない。

（証明）規則2から明らかである。 ∎

補題3,4の操作だけで，頂点集合がマーク部分列である初等的有向道を求めることができなければ，次に定義する単純グラフ $G$ とクラスターから，マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求める。

［定義14］単純グラフ $G$ を次のように構成する。各 $\mu_j$ に対しセンターを求め，全てのセンターを写し出す。そして写し出した各センターを単点に縮約する。次に，$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$ と $P\langle x_k, m\rangle_\ell$ に含まれるセンターの数がそれぞれ1つの対を全て捜し出し，$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$, $P\langle x_k, m\rangle_\ell$ のセンターに対応する単点を1本の辺で結ぶ。この結果できるグラフを $G$ と呼ぶ。 ∎

［定義15］次の頂点の集合をクラスターと呼ぶ。

(i) $⟦[x_k, m]_\ell⟧$ にある2つ以上のセンターに対応する $G$ の頂点の集合。

(ii) $⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$, $P\langle x_k, m\rangle_\ell$ の少なくとも一方に含まれるセンターの数が2つ以上である，$⟦\langle x_k, m\rangle_\ell⟧$, $P\langle x_k, m\rangle_\ell$ のセンターに対応する $G$ の頂点の集合。

∎

$G$ の分割規則を次に示す。

［規則3］単純グラフ $G$ に対し，

(i) 切点を持たない頂点に切点を持たない頂点が隣接しないように切点を設ける。

(ii) クラスターから少なくとも頂点を1つ選び切点を持たせる。 ∎

［補題5］$D$ を $G$ に変換すると，規則2は規則3に変化する。

（証明）規則2と定義14,15から明らかである。 ∎

［補題6］$Cl_i$, $Cl_j$ をクラスターとするとき，$Cl_i \supset Cl_j$ ならば，$Cl_i$ に規則3(ii)を適用する必要はない。

（証明）規則3(ii)から，$Cl_j$ の頂点に切点を持たせれば，$Cl_i$ の頂点に切点を持たせたことになるので補題6が成り立つ。 ∎

$G$ の連結成分の集合 $F = \{F_1, F_2, \cdots, F_g\}$ の元 $F_k$ における，規則3(i)を満足する切点の設け方の集合 $\zeta_k$ を $\zeta_k = \{H_{k,1}, H_{k,2}, \cdots, H_{k,t_k}\}$ とし，$\zeta_k$ 内の切点が最小数の切点の設け方の集合 $\zeta_k$ を $\zeta_k$

$=\{E_{k,1}, E_{k,2}, \cdots, E_{k,t_k}\}$とする（$|E_{k,1}|=|E_{k,2}|=\cdots=|E_{k,t_k}|\leq|H_{k,f}|$）。ただし，$H_{k,f}$，$E_{k,t}$は切点を持たせる候補になる頂点の集合である。このとき，

［補題7］マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求める為には，クラスターに含まれる頂点を持たない各$F_k$に対し，任意に$E_{k,t}$を選び，$E_{k,t}$の全頂点に切点を持たせることが最適である。

（証明）クラスターに含まれる頂点を持たない連結成分は，他の連結成分と独立に切点を設けることができるので補題7が成り立つ。∎

［補題8］マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求める為には，$F_k$の少なくとも1つの頂点を含むクラスターに関し，これらのクラスターの頂点を少なくとも1つずつ含む$E_{k,t}$が存在するならば，$E_{k,t}$の全頂点に切点を持たせることが最適である。又，この結果これらのクラスターは切点の取り方に関与しない。

（証明）この$F_k$は$E_{k,t}$の全頂点に切点を持たせると，他の連結成分とは独立に最小数の切点を設けることができる。又，規則3(ii)から，これらのクラスターは切点の取り方に関与しないので補題8が成り立つ。∎

残りの依存する連結成分に対しては、各$F_k$の全ての組合せを考えなければならない。しかし，$G$の各連結成分の位数が少ない為，ごく少数の有限ステップで規則3を満足する最小数の切点を捜し求めることができる。

以上の一連の手続きにより，頂点集合がマーク部分列である互いに素な最小数の初等的有向道を求めることができる。

## 4.4 最適プログラムの生成

頂点集合がマーク部分列である互いに素な最小数の初等的有向道を$\mu_1^*, \mu_2^*, \cdots, \mu_i^*$とし，次に最適プログラムの生成アルゴリズムを示す。

［アルゴリズム 2］

(i) リスト$\mathcal{L}$を構成する。始めに$\mathcal{L}\leftarrow\phi$。

(ii) $\mu_t^*=(A_t, U_t)$ $(1\leq t\leq i)$とするとき，$K=\{A_1, A_2, \cdots, A_i\}$から$\forall x\in A_t$に対して，$x$の子孫が$A_t$以外の$K$の元に含まれない$A_t$を捜し出し，$\mu_t^*=[x_{t,1}, x_{t,2}, \cdots, x_{t,p_t}]$を逆順にして$\mathcal{L}$へ加える。もし$K=\phi$ならば(iv)へ飛ぶ。

(iii) $K\leftarrow K-\{A_t\}$。(ii)へ飛ぶ。

(iv) $\mathcal{L}$の頂点に対応するステートメントを順にアセンブラ命令に変換して並べる。∎

［定理2］アルゴリズム2により生成されるプログラムは、最適プログラムである。

（証明）定理1と$\mathcal{L}$のマーク部分列の数が最小であることから，定理2が成り立つ。∎

［例］図6のdagを最適コード変換する。

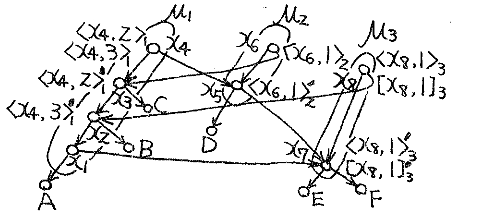


図6．ラベル付けされたdag
Fig.6—Labeled dag.

補題3から，弧$(x_8, x_7)$に切点を設けて$\mu_3$を分割し，$[x_8,1]_3$，$[x_8,1]_3^{\circ}$，$\langle x_8,1\rangle_3$，$\langle x_8,1\rangle_3^{\circ}$，$\langle x_4,3\rangle_1$，$\langle x_4,3\rangle_1^{\circ}$を消去する。次に，単純グラフ$G$を作り，頂点集合がマーク部分列である最小数の初等的有向道を求める。（図7）

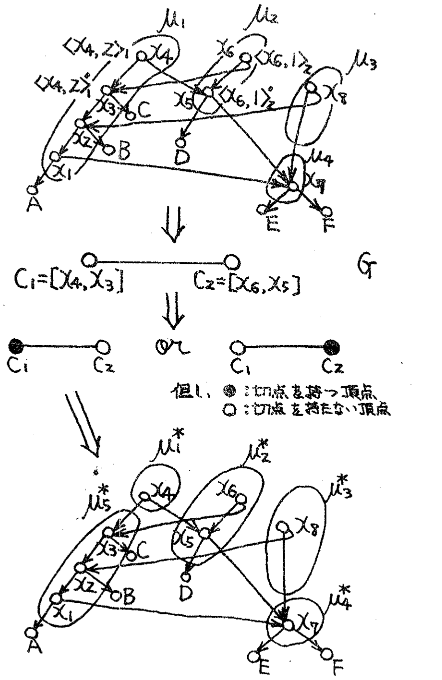


図7．Gに対する分割例
Fig.7—An example of dividing for G.

アルゴリズム2より，$\mathcal{L}=x_7, x_1, x_2, x_3, x_8, x_5, x_6, x_4$ となる。これに対応するステートメント・リストは$P'$であり，$\mathcal{B}'=(P', \{A,B,C,D,E,F\}, \{x_4,x_6,x_8\})$となる。したがって$P_0$は次のように与えられる。

| $P'$ | | $P_0$ | |
|---|---|---|---|
| $x_7 \leftarrow E\,\theta_7\,F$ | $\Longrightarrow$ | LD | $E$ |
| $x_1 \leftarrow A\,\theta_1\,x_7$ | | OP | $F$ |
| $x_2 \leftarrow x_1\,\theta_2\,B$ | | ST | $x_7$ |
| $x_3 \leftarrow x_2\,\theta_3\,C$ | | LD | $A$ |
| $x_8 \leftarrow x_7\,\theta_8\,x_2$ | | OP | $x_7$ |
| $x_5 \leftarrow D\,\theta_5\,x_7$ | | OP | $B$ |
| $x_6 \leftarrow x_5\,\theta_6\,x_3$ | | ST | $x_2$ |
| $x_4 \leftarrow x_3\,\theta_4\,x_5$ | | OP | $C$ |
| | | ST | $x_3$ |
| | | LD | $x_7$ |
| | | OP | $x_2$ |
| | | ST | $x_8$ |
| | | LD | $D$ |
| | | OP | $x_7$ |
| | | ST | $x_5$ |
| | | OP | $x_3$ |
| | | ST | $x_6$ |
| | | LD | $x_3$ |
| | | OP | $x_5$ |
| | (命令数20) | ST | $x_4$ |

∎

## 5. 最適プログラムの命令数

dag から最適なプログラムの命令数を求める式を示す。これは第3章の結果に基づいている。

[定理3] 最適プログラムの命令数を$O_n$とすると，

$$O_n = L+O+S = M+n+(S_1+S_2+S_3) \qquad (15)$$

ただし，

load命令数 $L$ = マーク部分列の数$M$ (16)

演算命令数 $O$ = 葉点以外の頂点数$n$ (17)

store命令数 $S$ = ((3)の個数$S_1$)+((4)の個数$S_2$)+((3),(4)以外の出力変数を持つ頂点数$S_3$) (18)

(証明) 定義4と定理1から明らかである。∎

## 6. むすび

マーク部分列の概念を用いて，代数法則を認めない一般のdagについての，1レジスタ機械の最適コード変換アルゴリズムを示し，更に，dagから最適プログラムの命令数を求める式を示した。これにより，2進木以外のdagについての最適コード変換が可能になった。

BrunoとSethi(1976,7)は本論文の問題が，NP完全性問題(Nondeterministic Polynomial complete problem)となることを示しており，又，dagが2進木の1レジスタ機械の最適コード変換については，AhoとJohnson(1975,6)が簡単な多項式時間(polynomial time)で生成できることを示している。ここで，興味ある問題は，コード生成を困難にするdagや機械の固有な性質についてである。つまり，どのようなdagのクラスに対して，多項式時間でコード生成ができるかである。本論文のアルゴリズムでは，補題3,4の操作だけを用いて，マーク部分列を頂点集合とする最小数の初等的有向道を求めることが可能であるdagのクラスに対し，多項式時間でコード生成ができる。尚、多項式時間でコード生成ができる最大限のdagのクラスについては，今後の課題である。

謝辞　日ごろ御討論を頂く野口研究室の諸氏に感謝する。

文献

[1] Anderson, J.P. [1964], 'A note on some compiling algorithms'. Comm. ACM 7:3, 149-150.

[2] Meyers, W.J. [1965], 'Optimization of computer code', unpublished memorandum G.E. Research Center.

[3] Nakata, I. [1967], 'On compiling algorithms for arithmetic expressions'. Comm. ACM 12:2, 81-84.

[4] Sethi, R., and J.D. Ullman [1970], 'The generation of optimal code for arithmetic expressions'. J.ACM

[5] Aho, A.V. and J.D. Ullman [1972], 'Optimization of straight line code'. SIAM J. on Computing 1:1.

[6] Aho, A.V., and Johnson, S.C. [1975], 'Optimal code generation for expression trees', Seventh Annual ACM Symposium on Theory of Comm.

[7] Bruno, J., and Sethi, R., [1976], 'Code generation for a one-register machine'. J.ACM 23:3.

[8] C.ベルジュ著，伊理正夫他訳 [1976], 'グラフの理論I' サイエンス社.