

ゲーム Otrio の 3 人および 4 人プレイの解析

松崎 公紀^{1,a)} 寺村 舞童華^{2,b)}

概要 : Otrio は, 2~4 人で行うボードゲームであり, 4 色 (3 人プレイ時は 3 色) の駒を用いた立体三目並べと同様のゲームである. Otrio は, プログラミング・シンポジウムの GPCC (Games and Puzzles Competitions on Computers) の 2019 年の問題のひとつである. 著者らは, これまでに Otrio の 2 人プレイの場合について解析を行い, 第 42 回情報処理学会ゲーム情報学研究会 (2019 年 7 月) において発表した. 本研究では, 3 人プレイおよび 4 人プレイの場合について解析を行う. 一般に, 多人数ゲームでは二人ゲームと異なり, 各プレイヤーの選好順序 (どのプレイヤーを優先して勝たせたいか) とプレイヤー間の結託がゲームの勝敗に大きく影響する. そこで, 本研究では特に結託のある場合について詳しく解析を行った. その結果, 3 人プレイでは, 結託により勝つプレイヤーを決定可能であること, 4 人プレイでは最初に着手するプレイヤーが他のプレイヤーと結託すると勝てることなどが分かった.

キーワード : Otrio, 3 人ゲーム, 4 人ゲーム, 弱解決, 選好順序, 結託

1. はじめに

Otrio [5] は, プレイ人数 2~4 人で行う有限零和確定完全情報ゲームであり, Tic-Tac-Toe を 3 次元 (実際の盤上では 3 次元目はコマの大きさで表現される)・4 色のコマに拡張したものと考えることができる (図 1). ルールが単純であるものの, 3 次元であること, 3 人以上のプレイが可能であることが興味深いゲームであり, 情報処理学会プログラミング・シンポジウムの GPCC (Games and Puzzles Competitions on Computers) において 2019 年の問題として採用されている.

著者らは先行研究 [11] において, 2 人プレイに限定して解析を行った. その結果, 標準の Otrio のルールでは先手勝ちであること, 先手の初手に



図 1 ゲーム Otrio

よっては後手勝ちとなりうることなどが分かった. 本研究では, 3 人・4 人プレイを対象として解析を行う.

ゲームの解析によって得られる結果には様々なレベルのものがある. ゲームの解決レベルの階層としてよく知られたものに, Allis による以下の 3 つがある [2], [10].

¹ 高知工科大学情報学群

² 高知工科大学大学院工学研究科

a) matsuzaki.kiminori@kochi-tech.ac.jp

b) 235065a@gs.kochi-tech.ac.jp

超弱解決 (ultra weakly solved) 初期局面の勝敗は分かっているものの、どのような指し手を選択すればよいかは分からない。

弱解決 (weakly solved) 初期局面の勝敗が分かっており、その証明に必要な局面の最善手も分かっている。

強解決 (strongly solved) ゲームの全局面について勝敗と最善手が分かっている。

Tic-Tac-Toe は非常に簡単なゲームであり、強解決することは容易である。Tic-Tac-Toe を 3 次元に拡張したゲーム 3D Tic-Tac-Toe [4] は、大きさが $3 \times 3 \times 3$ のものは強解決可能であり、大きさが $4 \times 4 \times 4$ のもの (Qubic) は弱解決されている [6]。Otrio の 2 人プレイ (各プレイヤーが 2 色ずつ用いる) も先行研究において弱解決された [11]。

本研究では、Otrio の 3 人・4 人プレイを対象とするが、このような多人数ゲームは 2 人ゲームと以下の 2 点で大きく異なる。

選好順序 各プレイヤーは、自分を含めプレイヤー間で勝たせたい順序をもつ。これを選好順序と呼ぶ。一般に多人数ゲームでは、他プレイヤーの選好順序の違いにより自分の結果が変わることがありうる。

結託 あるプレイヤーの組が互いに高い選好順序である状態を結託と呼ぶ。多人数ゲームにおいて、結託が勝敗に与える影響の大きさは重要である。

本研究の主要な貢献は以下の 3 つにまとめられる。

- Otrio の状態数をある程度正確に推定した。これにより、Otrio の解決の困難さを議論できる。
- Otrio の 3 人プレイについて、結託のある場合について弱解決し、結託により勝つプレイヤーを決定可能であることなどを明らかにした。結託のない場合についても、いくつかの局面に対して引き分けとなることが分かった。
- Otrio の 4 人プレイについて、結託のある場合の多くの設定で弱解決した。プレイヤー 1 を含む 2 プレイヤーの結託、もしくは 3 プレイヤーの結託により勝つことが分かった。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 節では、Otrio のルールについて説明し、状態数を求める方法とその結果を述べる。第 3 節では、本研究で作成したプログラムについて説明する。第 4 節では、Otrio の 3 人プレイの場合について解析した結果を示す。第 5 節では、Otrio の 4 人プレイの場合について解析した結果を示す。第 6 節で関連研究を述べ、第 7 節で本論文をまとめる。

2. Otrio

Otrio は、プレイ人数 2~4 人の有限零和確定完全情報ゲームである。本節では、Otrio のルールおよび棋譜の記法を説明した後、ゲームの状態数を見積る。

2.1 ルール

Otrio は、 3×3 の大きさの盤面上に大・中・小のコマを置いていくゲームである。盤面の各マスには、大・中・小のコマをひとつずつ置くことができる。コマには、赤・緑・紫・青の 4 色があり、それぞれの色のコマが大・中・小それぞれ 3 つずつある。ゲームの初期状態では、盤面にはコマは置かれていない。

2 人プレイの際には、プレイヤー 1 が赤と紫、プレイヤー 2 が緑と青のコマを持ち、赤・緑・紫・青の順にプレイする。3 人プレイの際には、プレイヤー 1 が赤、プレイヤー 2 が緑、プレイヤー 3 が紫のコマを持ち、その順にプレイする。4 人プレイの際には、プレイヤー 1 が赤、プレイヤー 2 が緑、プレイヤー 3 が紫、プレイヤー 4 が青のコマを持ち、その順にプレイする。3 人プレイでは青のコマは使用しない。2 人プレイ・4 人プレイでは、盤面に置けるコマの数よりも多くのコマを使用する。

手番の回ってきたプレイヤーは、自分の持っているコマから任意のひとつを選び盤面に置く。このとき、すでにコマが置かれている場所には置くことができず、また置かれているコマを動かすこともできない。手番においてどのコマも置くことができない場合にはパスとなる。

あるプレイヤーがコマを置いた際に、以下のいずれかの条件を満たしたならば、そのプレイヤーの勝

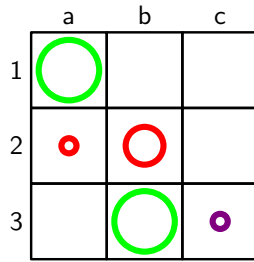


図 2 3 人プレイにおいて 5 手 (b2M, a1L, c3S, a2S, b3L) 進めた後の盤面

ちとなる.

- 同じマスに同色の大・中・小のコマが揃っている. (9 通り)
- 縦・横・斜めのいずれかの直線上に, 同色の同じ大きさのコマが並んでいる. (24 通り)
- 縦・横・斜めのいずれかの直線上に, 同色のコマが大・中・小の順 (またはその逆) に並んでいる. (16 通り)

以上の勝利条件を満たすことなく, 盤面の全てのマスに大・中・小のコマが置かれた状態になったならば, 引き分けとする.

2.2 棋譜の表記

本論文では, 各プレイヤーの手を順に記すことで Otrio の棋譜を表現する. ここで, 各手は, 横方向の座標 (a, b, c), 縦方向の座標 (1, 2, 3), およびコマの大きさ (L (大), M (中), S (小)) の 3 文字を並べたものである. 例えば, 3 人プレイにおいて棋譜 b2M, a1L, c3S, a2S, b3L が表す盤面を図 2 に示す.

2.3 状態数

ゲームが弱解決可能かどうか, 強解決可能かどうかを考えるにあたり, 状態数, すなわちゲームのとりうる盤面の数, がひとつの指標となる. そこで, ある程度正確な状態数を求めたい^{*1}.

まず, 初期盤面から 1 手ごとに全ての盤面を列挙した. この際, 回転, 反転, および, 大小コマの

^{*1} コマを配置できる場所の数, コマの色数, および対称性から状態数の上界を簡単に求めると, 2 人・4 人プレイでは $5^{27}/16 \leq 4.66 \times 10^{17}$, 3 人プレイでは $4^{27}/16 \leq 1.13 \times 10^{15}$ となる.

表 1 盤面数

手数	3 人プレイ	4 人プレイ
1	6	6
2	69	69
3	1 257	1 257
4	13 860	27 270
5	154 326	306 540
6	1 677 276	3 345 210
7	11 691 756	35 025 306
8	76 496 640	349 889 370

反転による 16 通りの対称な盤面については, そのいずれかのみ列挙し重複して数えないようにした. また, あるプレイヤーの勝ちが確定した盤面については, それ以上先の盤面を生成しないようにした. このようにして数え上げた正確な盤面数を表 1 に示す. 使用した計算機のメモリの制限 (32GB) より, 正確な盤面数を求められたのは 8 手までであった.

9 手より先の盤面数を正確に求めることができなかったため, そこから先についてはサンプリングによる推定を行った. ある手数 n の盤面を推定するのに以下の手順で行った.

- (1) 手数 $n-1$ の盤面からランダムに 10^6 盤面を選ぶ. 重複する盤面がないようにしてサンプリングを 2 回行い, 得られた集合を A_n と B_n とする. $C_n = A_n \cup B_n$ とする.
- (2) A_n , B_n , および, C_n のそれぞれについて, 1 手進めた盤面を生成し重複を除去する. これにより得られた盤面の集合をそれぞれ A_{n+1} , B_{n+1} , C_{n+1} とする.
- (3) 平均盤面数 $x = (|A_{n+1}| + |B_{n+1}|)/2$ と非重複率 $r = (2x - |C_{n+1}|)/x$ を求める.
- (4) 手数 n の盤面数 E_n を, 手数 $n-1$ の盤面数 E_{n-1} と上記の値から

$$E_n = \frac{x(1 - r^{(E_{n-1}/10^6)})}{1 - r}$$

により推定する.

この手順により 9 手から 24 手まで順に推定した結果について, 3 人プレイの場合を表 2 に, 4 人プレイの場合を表 3 に示す. 25 手以降については, サンプリングに用いた元集合が小さすぎることもあり, 非重複率がそれまでと大きく変わって

表 2 3 人プレイの盤面数の推定

手数	平均盤面数	非重複率	推定盤面数
9	17.11×10^6	0.9603	412×10^6
10	15.93×10^6	0.9709	546×10^6
11	15.10×10^6	0.9790	719×10^6
12	14.11×10^6	0.9793	682×10^6
13	12.37×10^6	0.9834	743×10^6
14	11.12×10^6	0.9969	3185×10^6
15	10.55×10^6	0.9982	5643×10^6
16	8.96×10^6	0.9989	7897×10^6
17	7.85×10^6	0.9979	3717×10^6
18	7.09×10^6	0.9954	1528×10^6
19	5.67×10^6	0.9942	965×10^6
20	4.63×10^6	0.9943	809×10^6
21	3.98×10^6	0.9876	321×10^6
22	2.88×10^6	0.9833	171×10^6
23	2.22×10^6	0.9749	87×10^6
24	1.78×10^6	0.9391	29×10^6

表 3 4 人プレイの盤面数の推定

手数	平均盤面数	非重複率	推定盤面数
9	17.49×10^6	0.9745	685×10^6
10	16.84×10^6	0.9860	1196×10^6
11	16.21×10^6	0.9911	1821×10^6
12	15.48×10^6	0.9914	1796×10^6
13	13.91×10^6	0.9892	1285×10^6
14	12.63×10^6	0.9979	5537×10^6
15	11.85×10^6	0.9997	28700×10^6
16	11.03×10^6	0.9997	35235×10^6
17	9.66×10^6	0.9995	16885×10^6
18	8.54×10^6	0.9993	11896×10^6
19	7.61×10^6	0.9980	3675×10^6
20	6.67×10^6	0.9954	1435×10^6
21	5.24×10^6	0.9965	1486×10^6
22	4.35×10^6	0.9961	1094×10^6
23	3.60×10^6	0.9936	557×10^6
24	2.88×10^6	0.9914	329×10^6

しまったため本論文には掲載していない。いずれの場合も、16 手まで推定盤面数が増えていき、その後減っていつている。この推定により得られた総盤面数は、3 人プレイの場合およそ 2.8×10^{10} 、4 人プレイの場合およそ 1.2×10^{11} となった。これは、脚注 *1 の値よりもずっと小さい。

3. 解析プログラム

本節では、本研究で作成した Otrio の 3 人・4 人プレイ解析のためのプログラムについて説明する。

3.1 解析プログラムの概要

本研究で作成したプログラムは、深さ優先探索によるゲーム木探索と枝刈りを併用したものである。プログラムには以下の情報を入力として与える。

- プレイヤ数
- 各プレイヤの選好順序
- 勝ちを判定するプレイヤ
- 結託処理の有効／無効
- 開始盤面への棋譜

プログラムの出力は、ゲーム木の各節点（開始盤面から一定の深さまで）における結果（勝ちとなるプレイヤまたは引き分け）と探索ノード数である。

選好順序は、各プレイヤについて独立に与えることができる。Otrio では引き分けもあるため、選好順序は各プレイヤの勝ちと引き分けを並べて指定する。例えばプレイヤ $P1$ について、(a) 引き分けよりも優先する勝ちは自分自身と $P2$ 、(b) 自分自身と $P2$ では $P2$ の勝ちを優先する、(c) $P3$ の勝ち引き分けよりも優先しないとする。このとき、その選好順序は $P2 > P1 > D > P3$ となる。（ D は引き分けを表す。）このように、自分自身の勝ちを最優先としなくてもよい。

第 2.3 節で示した状態数より、ゲーム木全体を探索することは非現実的であるため、効果的に枝刈りを行うことが重要である。一般に必ず安全である枝刈りは、「ある部分木を探索して選好順序の最初のものが得られた場合にその兄弟部分木を枝刈りする」というものである。本研究で作成したプログラムでは、勝ちを判定するプレイヤを限定する（残りのプレイヤの勝ち引き分けとして扱う）ことにより枝刈りがより多く起こるようにした。たとえば、プレイヤ $P1$ の選好順序が $P2 > P1 > D > P3$ であり、 $P1$ の手番である部分木の探索結果が引き分けであったとする。このとき、通常の探索では兄弟部分木を枝刈りすることはできない。しか

表 4 評価値の計算方法

部分スコア	条件
+10000	置けば勝利条件を満たす
+100	相手のリーチを阻止する
+10	自分がリーチをかける
+2	自分が将来的に勝利条件を満たせる
+1	相手が将来的に勝利条件を満たすのを阻止する
-2	自分の将来的な勝利条件（別の色）を阻止する
-100	自分のリーチ（別の色）を阻止する
0	それ以外の場合

し、勝ちを判定するプレイヤーが $P3$ のみであれば、選好順序を $P2 = P1 = D > P3$ と解釈でき、引き分けを $P2$ の勝ちと同一視して枝刈りができる。

複数のプレイヤーが結託している場合には、さらに枝刈りできる条件が増える。同様にプレイヤー $P1$ の選好順序が $P2 > P1 > D > P3$ であり、勝ちを判定するプレイヤーが $P1$ と $P2$ であるとする。 $P1$ の手番である部分木を探索して、 $P1$ の勝ちという結果が得られたとする。通常の探索では、 $P2$ の勝ちがないことを確認する必要があるため、まだ枝刈りができない。しかし、 $P1$ と $P2$ が結託していてプレイヤー間で勝ちを区別しない場合には、選好順序を $P2 = P1 > D > P3$ と解釈でき、 $P1$ の勝ちという結果でも枝刈りができる。

3.2 その他の工夫

ムーブオーダリング

ムーブオーダリングは、各プレイヤーにとって良い手（評価値の高い手）を先に調べることで、枝刈りがより効きやすくする手法のことである。本研究では、先行研究 [11] と同じ評価値の計算方法を用いた。具体的には、置こうとするコマと同一マスまたは直線上にある他のコマの状況に応じて、表 4 のスコアを与え、そのスコアの総和を手の評価値とした。

局面のキャッシュ

同一局面に対する重複する探索を避けるため、探索の際に出現した盤面について、その結果（と探索局面数）を記憶し結果を再利用するようにした。実行環境のメモリ 32GB に収まらないこともあっ

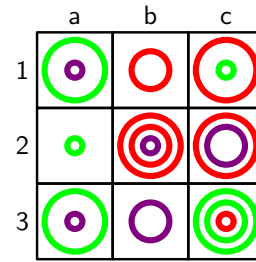


図 3 必ず引き分けとなる局面。プレイヤー 3（紫）の手番。プレイヤー 1（赤）およびプレイヤー 2（緑）の大きなコマが残っていないため、b1 や a2 の位置も勝利条件を満たせない。

たため、12 手進んだ局面を探索する度にキャッシュを破棄することとした。

引き分けの判定

ゲームの終盤では、それ以降どのような手を選ばれても必ず引き分けとなる局面が出現する。3 人プレイにおける具体例を図 3 に示す。この例のように、全てのマスまたは直線について、どのプレイヤーも勝利条件を満たせない場合には必ず引き分けとなる。

15 手以降の局面において、必ず引き分けとなる盤面であるかを判定することで、より早い段階で枝刈りするようにした。

4. 3 人プレイでの解析

3 人プレイでの解析結果は、表 5 にまとめる。

4.1 2 プレイヤーが結託する場合

まず、3 プレイヤーのうちの 2 プレイヤーが結託した場合について解析を行った。3 人プレイにおいて 2 プレイヤーが結託するというのは非常に有利になるため、結託することで特定のプレイヤーを勝たせることが可能かを調査する。

プレイヤー $P2$ と $P3$ が結託

プレイヤー $P2$ と $P3$ が結託して、 $P2$ を勝たせたいとする。そこで、以下の条件で解析を行った。

勝ちの判定プレイヤー: $P2$ のみ

$P1$ の選好順序: $P1 = D = P3 > P2$

$P2$ の選好順序: $P2 > P3 = D = P1$

$P3$ の選好順序: $P2 > P3 = D = P1$

表 5 3 人プレイでの解析結果

結託	勝ち判定	開始盤面への棋譜	結果	探索ノード数
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	a1L, b2M, c3S	$P2$ 勝ち	29 566
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	a1M, b2M, c3S	$P2$ 勝ち	9 119 811
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	b1L, b2M, c3S	$P2$ 勝ち	388 621
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	b1M, b2M, c3S	$P2$ 勝ち	12 196 103
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	b2L, b2M, c3S	$P2$ 勝ち	315 473
$P2$ と $P3$	$P2$ のみ	b2M, a1L, c3S	$P2$ 勝ち	819 764 910
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	a1L, c3S, b2M	$P3$ 勝ち	121 078
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	a1M, c3S, b2M	$P3$ 勝ち	80 923
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	b1L, c3S, b2M	$P3$ 勝ち	27 272
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	b1M, c3S, b2M	$P3$ 勝ち	2 311 510
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	b2L, c3S, b2M	$P3$ 勝ち	1 168 499
$P2$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, c3S, a1L	$P3$ 勝ち	159 374 110
$P1$ と $P2$	$P1$ のみ	b2M	$P1$ 勝ち	1 202
$P1$ と $P2$	$P2$ のみ	a1L, b2M	$P2$ 勝ち	984 475
$P1$ と $P3$	$P1$ のみ	b2M	$P1$ 勝ち	722
$P1$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, a1L	$P3$ 勝ち	21 171 170
$P1$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, a1M	$P3$ 勝ち	8 551 880 364
$P1$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, b1L	$P3$ 勝ち	8 699 544
$P1$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, b1M	$P3$ 勝ち	40 869 927 056
$P1$ と $P3$	$P3$ のみ	b2M, b2L	$P3$ 勝ち	24 069 159
結託なし (直前優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c1L	引き分け	376 900 311
結託なし (直前優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c1S	引き分け	2 404 838 090
結託なし (直前優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c3S	引き分け	51 653 183
結託なし (直後優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c3S, a1S	引き分け	4 906 850 984
結託なし (直後優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c3S, b2L	引き分け	72 533 014 041
結託なし (直後優先)	全プレイヤ	b2M, a1L, c1S, a1S	引き分け	52 900 335 927

$P1$ のすべての初手に対して $P2$ と $P3$ の妥当な着手についてプログラムを実行した。その結果、 $P1$ のいずれの手に対しても $P2$ の勝ちとなった。

次に、プレイヤ $P2$ と $P3$ が結託して、 $P3$ を勝たせたいとする。 $P1$ のすべての初手に対して $P2$ と $P3$ の妥当な着手についてプログラムを実行した。その結果、同様に $P1$ のいずれの手に対しても $P3$ の勝ちとなった。

以上より、プレイヤ $P2$ と $P3$ が結託した場合、 $P2$ と $P3$ のどちらを勝たせるかまで決定できることが分かった。

プレイヤ $P1$ と $P2$ が結託

プレイヤ $P1$ と $P2$ が結託する場合は、 $P2$ と $P3$ の結託よりも有利であると予想できるが、改めて調査を行った。

プレイヤ $P1$ と $P2$ が結託して、 $P1$ を勝たせたいとする。初手 b2M から始めてプログラムを実行した結果、 $P1$ の勝ちとなった。

次に、プレイヤ $P1$ と $P2$ が結託して、 $P2$ を勝たせたいとする。 $P2$ が有利になるよう、 $P1$ が中央の大きさ中 b2M を空けてプレイする場合のみ調査した。その結果、最初の 2 手 a1L, b2M に対して $P2$ の勝ちとなった。

以上より、プレイヤ $P1$ と $P2$ が結託した場合、 $P1$ と $P2$ のどちらを勝たせるかまで決定できることが分かった。

プレイヤ $P1$ と $P3$ が結託

プレイヤ $P1$ と $P3$ が結託して、 $P1$ を勝たせたいとする。初手 b2M から始めてプログラムを実行した結果、 $P1$ の勝ちとなった。

次に、プレイヤー $P1$ と $P3$ が結託して、 $P3$ を勝たせたいとする。プレイヤー $P1$ が b2M から始めて、全ての $P2$ の手について調査した。その結果、いずれの場合においても $P3$ の勝ちとなった。

以上より、プレイヤー $P1$ と $P3$ が結託した場合、 $P1$ と $P3$ のどちらを勝たせるかまで決定できることが分かった。

4.2 結託しない場合

プレイヤー間がまったく結託しない場合について調査を行った。プレイヤーが結託しない場合には、勝ちを判定するプレイヤーを限定することができないため、探索空間が大きくなってしまう。そのため、最初の手数について有望そうな手に絞って調査を行う。

どちらかといえば直前のプレイヤーを勝たせたい場合

どちらかといえば勝たせたい相手が直前のプレイヤーである状況を考える。つまり、各プレイヤーが、自分自身の勝ちを最優先し、次に引き分けとし、引き分けにもできない場合には直前にプレイするプレイヤーの勝ちを優先する。以下の条件により、この設定を実現できる。

勝ちの判定プレイヤー: $P1, P2, P3$

$P1$ の選好順序: $P1 > D > P3 > P2$

$P2$ の選好順序: $P2 > D > P1 > P3$

$P3$ の選好順序: $P3 > D > P2 > P1$

この設定において、3通りの初期局面に対してプログラムを実行した。これらは、 $P1$ が中央に中コマ、 $P2$ が角に大コマを置いた場合のうちの3つの場合である。その結果、いずれの初期局面に対しても引き分けの結果となった。

このことから、どちらかといえば直前のプレイヤーを勝たせたい場合において全てのプレイヤーが最善を尽した場合には引き分けとなることが予想される。

どちらかといえば直後のプレイヤーを勝たせたい場合

次にどちらかといえば勝たせたい相手が直後のプレイヤーである状況を考える。つまり、各プレイヤーが、自分自身の勝ちを最優先し、次に引き分け

とし、引き分けにもできない場合には直後にプレイするプレイヤーの勝ちを優先する。

この設定では、さらに探索ノード数が増え、3手進んだ局面に対して結果を得ることができなかった(60時間以上経ったところで停止した)。結果を得ることのできた、4手進んだ3局面に対する結果を示す。これらの結果から、どちらかといえば直後のプレイヤーを勝たせたい場合においても全てのプレイヤーが最善を尽した場合には引き分けとなることが予想されるが、もう少し調査が必要である。

以上により、プレイヤーが結託しない場合には、Otrio の3人プレイは最善を尽せば引き分けとなるというのが、著者の予想である。

5. 4人プレイでの解析

4人プレイにおいては、2プレイヤーもしくは3プレイヤーが結託した場合のみ調査した。4人プレイでの解析結果は、表 6 にまとめる。

5.1 2プレイヤーが結託する場合

プレイヤー $P1$ と $P3$ が結託した場合

プレイヤー $P1$ と $P3$ が結託し、かつ、 $P2$ と $P4$ が結託したときには、通常の Otrio の2人プレイと同じ状況となる。Otrio の2人プレイは、先手が b2M に置いて先手勝ちとなるため、 $P1$ と $P3$ のいずれかが勝つようにできる。

では、 $P1$ と $P3$ が結託したときに、勝つプレイヤーを決定できるかが次の疑問になる。まず、 $P1$ と $P3$ が結託し、 $P1$ を勝たせたいとする。この状況を、以下の条件で調査する。

勝ちの判定プレイヤー: $P1$ のみ

$P1$ の選好順序: $P1 > P3 = D = P2 = P4$

$P2$ の選好順序: $P4 = P2 = D = P3 > P1$

$P3$ の選好順序: $P1 > P3 = D = P2 = P4$

$P4$ の選好順序: $P4 = P2 = D = P3 > P1$

この設定でプログラムを実行したが、現実的な時間では結果を得ることができなかった。

同様に、 $P1$ と $P3$ が結託したときに、 $P3$ を勝たせることができるかについても調査したが、こちらも結果を得ることができなかった。

表 6 4 人プレイでの解析結果

結託	勝ち判定	開始盤面への棋譜	結果	探索ノード数
$P1$ と $P3$	$P1$ と $P3$	b2M	勝ち	139 087 487
$P1$ と $P4$	$P1$ と $P4$	b2M	勝ち	152 579 365
$P1$ と $P2$	$P1$ と $P2$	b2M, a1L	勝ち	116 059 055
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	a1L	$P2$ 勝ち	2 299 460
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	a1M	$P2$ 勝ち	82 020
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b1L	$P2$ 勝ち	288 608
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b1M	$P2$ 勝ち	102 357
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b2L	$P2$ 勝ち	5 274 189
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b2M	$P2$ 勝ち	11 666 901 735
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	a1L	$P3$ 勝ち	5 337 495 301
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	a1M	$P3$ 勝ち	6 343 501 736
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	b1L	$P3$ 勝ち	4 172 861 966
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	b1M	$P3$ 勝ち	2 208 435 676
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	b2L	$P3$ 勝ち	5 005 010 620
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P3$ のみ	b2M	$P3$ 勝ち	562 073 712
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P4$ のみ	a1L	$P4$ 勝ち	59 405 011 031
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P4$ のみ	a1M	$P4$ 勝ち	11 596 370 154
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P4$ のみ	b1L	$P4$ 勝ち	6 234 866 258
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b1M	$P4$ 勝ち	36 947 061 192
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b2L	$P4$ 勝ち	3 088 020 124
$P2$ と $P3$ と $P4$	$P2$ のみ	b2M	$P4$ 勝ち	27 174 291 209

したがって、プレイヤー $P1$ と $P3$ が結託した場合には、そのどちらかが勝つことは確かだが、勝つプレイヤーを決定できるかは未解決である。

プレイヤー $P1$ と $P4$ が結託した場合

プレイヤー $P1$ と $P4$ が結託した場合は、 $P1$ と $P3$ が結託したときよりも不利であることが想像される。とくに、 $P1$ と $P4$ が結託し、 $P2$ と $P3$ が結託した場合は、先手の初手はコマ 1 つだけ置き、それ以降交互にコマを 2 つずつ置く 2 人プレイとして捉えることができる^{*2}。この状況についても、同様に調査した。

勝ちの判定プレイヤーを $P1$ と $P4$ とした場合には、初手 b2M により勝ちと判定された。しかし、勝ちの判定プレイヤーを $P1$ のみ、もしくは、 $P4$ のみとした場合には結果を得ることができなかった。

したがって、プレイヤー $P1$ と $P4$ が結託した場合にも、そのどちらかが勝つことは確かだが、勝つプレイヤーを決定できるかは未解決である。

プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が結託した場合

プレイヤー $P1$ と $P2$ が結託すると、 $P1$ と $P3$ が結託したときよりも有利であることが想像される。実際、勝ちの判定プレイヤーを $P1$ と $P2$ とした場合には、棋譜 b2M, a1L により勝ちと判定された。

勝ちの判定プレイヤーを $P1$ のみ、もしくは、 $P2$ のみとした場合には、3 手進んだ局面に対しても結果を得ることができなかった。したがって、プレイヤー $P1$ と $P2$ が結託した場合に、勝つプレイヤーを決定できるかも未解決となった。

以上より、Otrio の 4 人プレイにおいて、プレイヤー $P1$ が他のいずれかのプレイヤーと結託した場合には、最善のプレイによりそのいずれかのプレイヤーの勝ちとできる。また、プレイヤー $P2$, $P3$, $P4$ のうち 2 プレイヤーが結託しても勝つことができない。(残りのプレイヤーが $P1$ と結託すれば、そちらが必ず勝つため。)

5.2 3 プレイヤーが結託する場合

プレイヤー $P1$ がいずれかのプレイヤーと結託する

^{*2} 互いにコマを 2 つずつ置くが先手初手のみコマ 1 つというゲームには Connect6 というゲームがある。

と必ず勝てることが分かったが、次の疑問はプレイヤー 1 以外の 3 プレイヤが結託した場合にどれだけ有利かである。

例えば、 P_2, P_3, P_4 が結託し、 P_2 を勝たせるとする。この状況を以下の条件により調査する。

勝ちの判定プレイヤー: P_2 のみ

P_1 の選好順序: $P_1 = D = P_4 = P_3 > P_2$

P_2 の選好順序: $P_2 > P_3 = P_4 = D = P_1$

P_3 の選好順序: $P_2 > P_3 = P_4 = D = P_1$

P_4 の選好順序: $P_2 > P_3 = P_4 = D = P_1$

プレイヤー P_1 のすべての着手に対してプログラムを実行した結果、 P_2 の勝ちという結果を得た。

同様に、 P_2, P_3, P_4 が結託して、 P_3 と P_4 をそれぞれ勝たせることが可能であることも分かった。したがって、3 プレイヤ P_2, P_3, P_4 が結託すると、勝つプレイヤーを決定することが可能であるという結論を得た。

6. 関連研究

はじめに述べたように、ゲームの解決には超弱解決、弱解決、強解決の 3 つの段階がある。これまで様々なゲームが、弱解決または強解決されてきた。表 7 はそのような弱解決または強解決されたゲームのいくつかについて、状態数と解決状況を示したものである。

Otrio と同様に Tic-Tac-Toe に類似したゲームのひとつに Qubic (3D Tic-Tac-Toe) がある。Qubic の盤面サイズを $3 \times 3 \times 3$ にしたものは先手必勝であり、また両者が中央に置けない場合にも先手必勝であることが分かっている [1]。盤面サイズ $4 \times 4 \times 4$ の Qubic の場合については、Patashnik [6] により弱解決されている。

コマの色が 4 色ある Otrio は、状態数が比較的多い。第 2.3 節で述べたように、3 人プレイの場合の状態数はおよそ 2.8×10^{10} 、4 人プレイの場合の状態数はおよそ 1.2×10^{11} と見積られる。これを参考に表 7 を見ると、本研究で解決を試みた Otrio の状態数は Awari と同程度であり、6x6 Reversi よりも小さい。Awari や 6x6 Reversi が強解決されていることを考えると、Otrio についても強解決することができるかもしれない。ただし、

表 7 ゲームの状態数と解決。状態数は [10] より転載、もしくは、著者による計算

ゲーム	状態数	解決
Tic-tac-toe	10^3	強解決
シンバイ	10^8	強解決 [8]
どうぶつしょうぎ	10^8	強解決 [9]
Otrio 3 人プレイ	2.8×10^{10}	(本研究)
Awari	10^{11}	強解決 [2]
Otrio 2 人プレイ	1.2×10^{11}	弱解決 [11]
Otrio 4 人プレイ	1.2×10^{11}	(本研究)
6x6 Reversi	$\leq 10^{16}$	強解決 [3]
Checkers	10^{20}	弱解決 [7]
Qubic	$\leq 10^{28}$ (?)	弱解決 [6]

それには Otrio の（比較的疎な）盤面を適切にインデックス付けする方法を考える必要がある。

7. おわりに

本研究では、Otrio の 3 人・4 人プレイを対象とし、とくにプレイヤーが結託した場合について焦点をあてて解析を行った。

3 人プレイにおいては、プレイヤーが結託した場合について弱解決した。とくに、3 人プレイで 2 プレイヤが結託すると、結託したプレイヤーのいずれかが勝つだけでなく、勝つプレイヤーを決定できることが分かった。これは、プレイヤーの結託が非常に大きく影響することを意味する。プレイヤーが結託しない場合については、3 手または 4 手進めたいくつかの局面について、引き分けとなることが分かった。著者はプレイヤーが最適なプレイを行った場合には引き分けとなると予想するが、その確認にはより数百～数千倍の計算時間が必要となる。

4 人プレイにおいては、プレイヤー P_1 が他のいずれかのプレイヤーと結託することにより、そのいずれかが必ず勝つようにできることが分かった。未解決なのは、プレイヤー P_1 と P_2 が結託した際に、勝つプレイヤーを決定可能であるか、についてである。3 プレイヤ P_2, P_3, P_4 が結託した場合には、勝つプレイヤーを決定可能であることが分かった。4 人プレイで結託のない場合については、いくつかの開始局面から試してみたものの、現実的な時間では結果が得られなかった。そのため、4 人プレイでの弱解決はまだ困難であるように考える。

参考文献

- [1] 3D tic-tac-toe, https://en.wikipedia.org/wiki/3D_tic-tac-toe. Viewed on 27 Jun, 2019.
- [2] Allis, V.: Searching for Solutions in Games and Artificial Intelligence, PhD Thesis, University of Limburg, Maastricht, The Netherlands (1994).
- [3] Feinstein, J.: 6×6 Othello weakly solved, <https://web.archive.org/web/20091101013931/http://www.feinst.demon.co.uk/Othello/6x6sol.html>. Viewed on 27 Jun, 2019.
- [4] Golomb, S. W. and Hales, A. W.: Hypercube Tic-Tac-Toe, *More Games of No Chance*, Vol. 42, pp. 167–182 (2002).
- [5] Master, S.: Marbles Otrio, https://www.spinmaster.com/product_detail.php?pid=p21211. Viewed on 27 Jun, 2019.
- [6] Patashnik, O.: Qubic: $4 \times 4 \times 4$ Tic-Tac-Toe, *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 4, pp. 202–216 (1980).
- [7] Schaeffer, J., Burch, N., Björnsson, Y., Kishimoto, A., Müller, M., Lake, R., Lu, P. and Sutphen, S.: Checkers Is Solved, *Science*, Vol. 317, No. 5844, pp. 1518–1522 (2007).
- [8] 田中哲朗：ボードゲーム「シンペイ」の完全解析, 情報処理学会論文誌, Vol. 48, No. 11, pp. 3470–3476 (2007).
- [9] 田中哲朗：「どうぶつしょうぎ」の完全解析, 情報処理学会研究報告ゲーム情報学, Vol. 2009-GI-22(3), pp. 1–8 (2009).
- [10] 田中哲朗：ゲームの解決, 数学, Vol. 65, No. 1, pp. 93–102 (2013).
- [11] 寺村舞童華, 松崎公紀：Otrio の 2 人ゲームにおける先手必勝な盤面についての調査, 情報処理学会第 42 回ゲーム情報学研究会, Vol. 2019-GI-42(5) (2019).