

E 2 有理式の数式処理のための標準型

石 黒 美 佐 子 (原子力研)

本稿では、有理式の内部表現として、有理式を部分分数分解した形を用いることを提案し、これが標準型 (canonical normal form) となることを証明し、数式処理上の問題点等を合わせて述べる。

1. Introduction

1.1 数式の標準型と単純化との関連

多項式を例にとれば、数式

$$(1) \quad 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$$

を因数分解して

$$(2) \quad (x+1) \cdot (3 \cdot x - 1)$$

と表現する方が都合の良い場合もあるし、数値計算の誤差を少なくすることを目的として

$$(3) \quad x \cdot (3 \cdot x + 2) - 1$$

と表現したい時もあるだろう。しかしながら多項式の一連の数式処理の中で、その時の都合でいく通りも表現形式を取ると、同類項の整理といったいわゆる数式の単純化ができなくなるばかりでなく数式処理の目的を見失うことにもなる。やはり前もって定められた数式の表現形式があって、その表現形式に向って数式を変形していくことが数式の単純化であり、1つの数式処理の過程である。このような意味から表現形式そのものが大いに問題となるので、数式処理の立場から見て処理効率の良い数式の表現方法を以下に論じ、標準型を定めよう。

1.2 標準型の定義

ここでの記号、定理その他は、文献〔1〕に従うことにする。

ε を数式のクラスとする。

E_1, E_2 を ε の要素とする。

E_1 と E_2 が同じ一連の文字で作成されている時、 E_1 と E_2 は同一 (identical) であると云い、 $E_1 \equiv E_2$ と書く。

E_1 と E_2 が、両方の数式の対応する変数に、同じ数値を代入すると、同じ値が得られる時、同等 (equivalent) であると云い、 $E_1 = E_2$ と書く。

たとえば、1.1 の (1), (2), (3) の3つの式は、同等であるが同一ではない。

数式のクラス ε が f -normal form であるとは、 ε から ε への写像 f があって、すべての ε の要素 E に対して、次の2つの条件が満足されることである。

$$(i) \quad f(E) = E$$

(ii) $E=0$ なら $f(E) \equiv 0$

クラス ε が, f -canonical form であるとは, 上の 2つの条件にさらに次の条件を附加する.

(iii) E_1, E_2 が ε の要素で, $E_1 = E_2$ なら, $f(E_1) \equiv f(E_2)$ となる.

E が $f(E) \equiv E$ で表現されている時, E は canonical (normal) form であると呼び, 我々はこれを標準型と呼ぶ. 1.1 でのべた多項式の 3つの表現形式も, 表現のボタンをうまく定式化できれば, 標準型となり得るものである. (1)式は多項式の項を高次の順に並べたもので, これが多項式の標準型としては最も一般的なものである. (2)式は, 多項式を因数分解して得られるが, 因子の並べ方の順序を前もって定義しておき, これに従って並べることにする. (3)式は

$$a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を $x(x(x(\cdots(a_n x + a_{n-1}) + a_{n-2}) + \cdots) + a_1) + a_0$ と書くことにより, 標準型とすることができる.

次に, 標準型を定義する上で役立つ定理を文献〔1〕から引用する.

定理: ε を数式のクラスで乗算に閉じているものとする. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を次の 2条件を満たすサブ・クラスとする.

(i) ε_1 は標準型 f_1 を持ち, ε_2 は標準型 f_2 を持つ.

(ii) $f_2(\varepsilon_2)$ は ε_1 で 1 次独立である.

さらに $f_2(\varepsilon_2): f_1(\varepsilon_1)$ を $A_i, X_i \quad i=1, 2, \cdots, n$ に対し, 次の 3条件を満たす数式の集合

$$\{A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + \cdots + A_n \cdot X_n\}$$

であると定義する.

(i) $A_i \in f_1(\varepsilon_1), X_i \in f_2(\varepsilon_2)$

(ii) $A_i \neq 0, \quad i=1, 2, \cdots, n$

(iii) $i < j$ なら, $X_i \ll X_j$, ただし記号 $\ll$ は ε_2 の全順序である.

そして, f を ε から $f_2(\varepsilon_2): f_1(\varepsilon_1) \cup \{0\}$ への $f(E) = E$ なる計算可能な写像であるとすれば, f は ε の標準型である.

注* f が計算可能であるとは, 正確には M. デーヴィス著 計算の理論 に論じられている. 直観的には, f は大型計算機が実行できるようなプログラムを用意することにより計算できるということである.

1.3 多項式の標準型

著者らによって開発された多項式処理プログラム〔2〕の内部表現は, 多変数多項式の 1つの標準型のボタンをなしている. これに従えば, r -変数多項式 $P(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ は次のように表現される.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{i=1}^m P_i(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^{e_i},$$

$$e_i > e_{i-1} \geq 0, P_m \neq 0$$

この表現が多項式の標準型となることは明らかであるが、先の定理の意味を説明するために、この表現を分析してみる。

ε_r を r -変数多項式のクラスとする。帰納法により証明する。今 ε_{r-1} が標準型 $f^{(r-1)}$ を持つとする。 X_r を、

$$X_r = \{1, x_r, x_r^2, \dots, x_r^n, \dots\}$$

とする。 x_r の各要素は、 ε_{r-1} で明らかに 1 次独立である。さらに $i > j$ なら $x^{e_i} \gg x^{e_j}$ と定める。そして $f^{(r)}$ として次の写像を考える。

$$\varepsilon_r \xrightarrow{f^{(r)}} \left\{ \sum_{i=1}^m P_i(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^{e_i} \right\}$$

定理の結論から $f^{(r)}$ は ε_r の標準型である。1 変数多項式に対しては、1.1 節の(1)を標準型として選ぶことにする。

このように、定理は、すでに存在する標準型を基礎に新たな標準型を定めることを目的としている。

2. 有理式の標準型

ここでは、1 変数有理式の標準型のパターンを 4 つ載げ、それらが標準型になっていることを確かめる。実係数の有理式 $R(x)$ を対象とする。

$$2.1 \quad R(x) \xrightarrow{f_1} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$R(x)$ を分数式 $P(x)/Q(x)$ と表わし、 $P(x)$ 、 $Q(x)$ が次の 3 条件を満たすならば、 f_1 は多項式の標準型となっている。

(i) $P(x)$ と $Q(x)$ は多項式で、1.3 節で述べた多項式の標準型により表現されている。

(ii) $P(x)$ と $Q(x)$ は互に素。

(iii) $Q(x)$ の最高次の係数 (leading coefficient) は 1 である。

[f_1 が標準型となることの証明]

1.2 節の標準型の定義 (i), (ii), (iii) のうち (i), (ii) は明らかに満たすから条件 (iii) が成立することを確認めれば良い。

E_1, E_2 を有理式とし、 $E_1 = E_2$ なら $f_1(E_1) \equiv f_2(E_2)$ を示す。

明らかに $f(E_1) = f(E_2)$ であるから

$$f_1(E_1) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \quad f_1(E_2) = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{とおけば}$$

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{となり,}$$

$P_1(x)$ と $Q_1(x)$ は互に素で, $P_2(x)$ と $Q_2(x)$ も互に素であり, 且つ $Q_1(x)$ と $Q_2(x)$ の最高次の係数が 1 であるから, 明らかに $P_1(x) \equiv P_2(x)$, $Q_1(x) \equiv Q_2(x)$ である. 従って $f_1(E_1) \equiv f_1(E_2)$ となる.

$$2.2 \quad f_1(R(x)) \xrightarrow{F_2} F(x) + \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$f_2 = F_2 \cdot f_1$ と定義する. f_2 が次の条件を満たす変換なら, 標準型をなす.

- (i) $F(x)$ は多項式で, 1.3 節で述べた多項式の標準型により表現されているものとし, $R(x)$ の分子多項式を分母多項式で割った商を表わす. $P(x)/Q(x)$ は $R(x)$ から $F(x)$ を分離した残りである. 作り方から, $P(x)$ の次数は $Q(x)$ の次数より小さい.
- (ii) $P(x)$, $Q(x)$ は 2.1 節の 3 条件を満たす.

[f_2 が標準型となることの証明]

前節と同じ理由で E_1 , E_2 を有理式とすれば, $E_1 = E_2$ なら $f_2(E_1) \equiv f_2(E_2)$ を証明すればよい. $f_2(E_1) = f_2(E_1)$ より, 仮りに

$$f_2(E_1) = F_1(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

$$f_2(E_2) = F_2(x) + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{とおけば,}$$

$$F_1(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = F_2(x) + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

通分すれば

$$\frac{F_1(x) Q_1(x) + P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{F_2(x) Q_2(x) + P_2(x)}{Q_2(x)}$$

明らかに両辺の分子, 分母は互に素である. しかも $Q_1(x)$ と $Q_2(x)$ の最高次の係数は共に 1 である. よって $Q_1(x) \equiv Q_2(x)$ これを $Q(x)$ とおけば,

$$F_1(x) Q(x) + P_1(x) = F_2(x) Q(x) + P_2(x)$$

$$Q(x) \{F_1(x) - F_2(x)\} = P_2(x) - P_1(x)$$

左辺は $Q(x)$ の約数であるが, 右辺は $Q(x)$ の約数ではない. 従って $F_1(x) = F_2(x)$, $P_1(x) = P_2(x)$. 多項式は定められた標準型で表現されているので, $F_1(x) \equiv F_2(x)$, $P_1(x) \equiv P_2(x)$.

$$2.3 \quad f_2(R(x)) \xrightarrow{F_3} F(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

$f_3 = F_3 \cdot f_2$ とし, f_3 が次のような有理式の変換なら, 標準型である.

- (i) $R(x)$ を f_2 により

$$R(x) \rightarrow F(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \text{ とする.}$$

(iii) $Q(x)$ を実数の範囲で因数分解すると 1 次と 2 次の因子に分解される. $Q_1(x)$ を 1 次の因子から作り, $Q_2(x)$ を 2 次の因子から作るとする.

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x)$$

$$Q_1(x) = (x+a_1)^{n_1} \cdot (x+a_2)^{n_2} \cdots (x+a_N)^{n_N}$$

$$Q_2(x) = (x^2+p_1 \cdot x+q_1)^{m_1} \cdot (x^2+p_2 \cdot x+q_2)^{m_2} \cdots (x^2+p_M \cdot x+q_M)^{m_M}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

と部分分数分解する.

[f_3 が標準型となることの証明]

$E_1 = E_2$ なら $f_3(E_1) \equiv f_3(E_2)$ となることを示す.

$$f_3(E_1) = F_1(x) + \frac{P_1^1(x)}{Q_1^1(x)} + \frac{P_2^1(x)}{Q_2^1(x)}$$

$$f_3(E_2) = F_2(x) + \frac{P_1^2(x)}{Q_1^2(x)} + \frac{P_2^2(x)}{Q_2^2(x)}$$

において, f_2 の場合と同様に行なう.

作り方から

$$F_1(x) \equiv F_2(x), \quad Q_1^1(x) \equiv Q_1^2(x), \quad Q_2^1(x) \equiv Q_2^2(x)$$

$$\frac{P_1^1(x) - P_1^2(x)}{Q_1^1(x)} + \frac{P_2^1(x) - P_2^2(x)}{Q_2^1(x)} = 0$$

$Q_1^1(x)$ と $Q_2^1(x)$ は互に素で, 第 1 項, 第 2 項の分数は共に分母は分子で割切れないから,

$$P_1^1(x) = P_1^2(x), \quad P_2^1(x) = P_2^2(x)$$

これらは多項式だから, 定まった標準型で表現されているから,

$$P_1^1(x) \equiv P_1^2(x), \quad P_2^1(x) \equiv P_2^2(x) .$$

$$2.4 \quad f_3(R(x)) \xrightarrow{F_4} F(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \frac{C_{k,i}}{(x+a_k)^i} + \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i}x + B_{k,i}}{(x^2+p_kx+q_k)^i}$$

ここで, $F(x)$ は多項式, $C_{k,i}, A_{k,i}, B_{k,i}, a_k, p_k, q_k$ は実数で $p_k^2 - 4q_k < 0$.

$f_4 = F_4 \cdot f_3$ とし, $R(x)$ を次のように部分分数分解するなら, f_4 は標準型をなす.

(1) $R(x)$ を f_3 により

$$R(x) \xrightarrow{f_3} F(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$$

(2) $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ を 3.1 で述べる手順で部分分数分解する．有理式の部分分数分解

定理から，次のように部分分数分解できる．

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \frac{C_{k,i}}{(x+a_k)^i},$$

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{k,i} \cdot x + B_{k,i}}{(x^2 + p_k \cdot x + q_k)^i}$$

(3) 部分分数の各項に順序をつける．

まず部分分数の分母に順序をつける．部分分数の分母は，もとの分母の既約因子かまたはその累乗になっている．まず既約因子に順序をつける．

(i) 1次式が2次式に先行する．

(ii) 1次式を $x+a$ とし， a の値が小さい程^{**} 先行する．

(iii) 2次式を $x^2+p \cdot x+q$ とおくと， p の値が小さい程先行する． p の値が等しい時は， q の値が小さい程先行する．

既約因子に順序がついたら，既約因子の順序の位置に，既約因子の累乗を冪の小さい順に並べる．かくして部分分数の分母に順序がつけられた．部分分数の各項は，その分母の順序により並べられるものとする．

注** 係数の大小を比較するにあたり次の点を考慮した．ここで扱うのは係数が実数の有理式なので当然のことながら誤差が問題となる．そこで前もって係数に精度を与え，すなわち絶対誤差を与え，2つの係数の差が誤差の範囲に入っているならそれらを等しいとみなすことにした．我々の実験では，多項式をBairstow法により2次式に因数分解することを要するが，その誤差が 10^{-5} 程度なので一応 10^{-5} すなわち小数以下5桁を有効桁として実験した．

以上のようにして得られた有理式の部分分数分解は，やはり有理式の標準型の1つのパターンとなっていることを次に示そう．

[f_4 が標準型をなすことの証明]

$R(x)$ を f_3 より

$$R(x) \rightarrow F(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \quad \text{とする.}$$

$F(x), \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ がそれぞれ標準型 g_0, g_1, g_2 を持つなら， f_4 を次のよう

に定義すれば，

$$R(x) \xrightarrow{f_4} g_0 \{F(x)\} + g_1 \left\{ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right\} + g_2 \left\{ \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \right\}$$

f_4 は標準型となる. なんとならば,

$$E_1 = E_2 \text{ とすれば } f_3(E_1) \equiv f_3(E_2) \text{ となる.}$$

より $f_4(E_1) \equiv f_4(E_2)$ となる.

そこで $F(x)$ の標準型として 1.3 節で示した多項式の標準型を用い, $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}$ に対しては,

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \xrightarrow{g_1} \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{(x+a_k)^{n_k}}$$

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \xrightarrow{g_2} \sum_{k=1}^M \frac{a_k x + b_k}{(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}}$$

になるような g_1, g_2 を用いることにしよう.

g_1, g_2 が次に示す有理式のクラス $\varepsilon^1, \varepsilon^2$ に対する標準型となっていることを示そう.

$$\varepsilon^1 = \left\{ \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \mid Q_1(x) = \prod_{k=1}^N (x+a_k)^{n_k}, P_1(x) \text{ は } Q_1(x) \text{ と互に素で, } Q_1(x) \text{ より次数が低い多項式とする.} \right\}$$

$$\varepsilon^2 = \left\{ \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \mid Q_2(x) = \prod_{k=1}^M (x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}, p_k^2 - 4q_k < 0, P_2(x) \text{ は } Q_2(x) \text{ と互に素で } Q_2(x) \text{ より次数が低い多項式とする.} \right\}$$

[g_1 が ε^1 の標準型となっていることの証明]

1.2 節の定理を適用する.

クラス ε^1 に対し, サブクラス $\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^1$ を次のように定める.

$$\varepsilon_1^1; \{ \text{実数} \}$$

$$\varepsilon_2^1; \left\{ \frac{1}{(x+a)^i} \mid a; \text{実数} \right\}$$

ε_1^1 は実数, ε_2^1 は 2.2 節の f_2 を標準型として持つから, 定理の第 1 条件を満たす. ε_2^1 が ε_1^1 で 1 次独立であることも明らかだから, 第 2 条件も満たす. 従って

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \xrightarrow{g_1} \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{(x+a_k)^{n_k}} \text{ は, } \varepsilon^1 \text{ の標準型である.}$$

[g_2 が ε^2 の標準型をなすことの証明]

$$\varepsilon_1^2; \{ ax+b \mid a, b \text{ 実数} \}$$

$$\varepsilon_2^2; \left\{ \frac{1}{(x^2+p \cdot x+q)^i} \mid p, q \text{ 実数} \right\}$$

として同様に証明できる.

3. 部分分数分解による有理式の標準型

3.1 部分分数分解定理

分子の次数が分母の次数より低い分数式 $P(x)/Q(x)$ は部分分数の和に分解され、部分分数の分母は、もとの分数の分母 $Q(x)$ の因数分解から得られる既約多項式の累乗に等しくなるようにできる〔3〕。

分母 $Q(x)$ が次のように因数分解されたとすると、

$$Q(x) = P_1(x)^{t_1} \cdot P_2(x)^{t_2} \cdots P_h(x)^{t_h}$$

分数式 $P(x)/Q(x)$ は次のように部分分数分解できる。

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^h \sum_{i=1}^{t_k} \frac{S_{ki}}{\{P_k(x)\}^i}$$

この部分分数の分子 $S_{ki}(x)$ の次数は、分母 $P_k(x)$ の次数より小さい。

3.2 部分分数分解の方法

(1) 2.2節にもとずき、有理式 $R(x)$ を

$$R(x) = F(x) + \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{とする。}$$

(2) 実係数多項式の因数分解

実係数の代数方程式を解く方法の1つに Bairstow-Hitchcock法〔4〕があり、これは多項式をまず2次式に分解して、2次方程式から根を求める方法である。ここでは Bairstow-Hitchcock法の計算過程のうち、多項式を2次式に分解する部分を利用する。2次方程式が実根を持てば、さらに2つの1次式に分解し、持たなければ2次式のまま置くことにより多項式を1次と2次の既約因子に分解する。かくして有理式 $R(x)$ の分母 $Q(x)$ が次式のように分解できる。

$$Q(x) = (x+a_1)^{n_1} \cdot (x+a_2)^{n_2} \cdots (x+a_N)^{n_N} \\ \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{m_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{m_2} \cdots (x^2+p_Mx+q_M)^{m_M}$$

ここで各因子の順序は、2.4節の(3)で述べたとおりに並べることにする。

処理手続(3), (5), (6)の大筋は、〔3〕の有理整関数の部分分数分解のところで述べられていることがらである。

(3) 1次式を分母とする項の算出

各々の1次の既約因子に対して、1次式の累乗を冪の高い順に分母から分離し、それによって次々と分母の次数を下げていく。まず

$$Q(x) = (x+a_1)^{n_1} g(x)$$

とすると

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x+a_1)^{n_1} g(x)} = \frac{b}{(x+a_1)^{n_1}} + \frac{P(x) - b \cdot g(x)}{(x+a_1)^{n_1} g(x)}$$

b を定めるには、右辺の第2項の分数の分子が $x+a_1$ で割切れるようにする。

$$P(-a_1) - b \cdot g(-a_1) = 0 \quad b = \frac{P(-a_1)}{g(-a_1)}$$

となり、 $P(x) - b \cdot g(x) = (x + a_1) \cdot P_1(x)$ となるから、第2項の分数を $x + a_1$ で簡約し、以後

$$\frac{P_1(x)}{(x + a_1)^{n_1-1} g(x)}$$

に対して同じことをくりかえす。 $n_1 = 1$ になれば $(x + a_2)^{n_2}$ を分母とする項の分離に取りかかる。このように、1次因子を分母とする項はすべて固めることができる。

残りは、2次因子を分母とするものである。

2次因子を分母とする項を求めるために手続(4), (5), (6)がある。

(4) 互に素な実数を係数とする多項式を $g(x)$, $h(x)$ とすると、最大公約元に関する代数学の定理から、 $c(x)$, $d(x)$ が存在して

$$c(x) \cdot g(x) + d(x) \cdot h(x) = 1$$

となる。

さて、この $c(x)$ と $d(x)$ を計算するための実際の方法を以下に述べよう。

ユークリッドの互除法により最大公約元を算出するアルゴリズムは次のとおりである。

2つの要素 a_0 , a_1 が与えられ、 $a_1 \leq a_0$ とする。割算を行なって、

$$a_0 = q_1 \cdot a_1 + a_2$$

$$a_1 = q_2 \cdot a_2 + a_3$$

.....

$$a_{s-2} = q_{s-1} \cdot a_{s-1} + a_s$$

$$a_{s-1} = q_s \cdot a_s$$

となったとする。すると a_s は a_0 と a_1 の最大公約元である。

a_0 と a_1 が互に素な場合は、最大公約元が1だから次のように書換えられる。

$$a_0 \geq a_1$$

$$a_0 = q_1 a_1 + a_2$$

$$a_1 = q_2 a_2 + a_3$$

.....

$$a_{n-1} = q_n a_n + 1$$

$$\text{さて等式} \quad a_{n-1} - q_n a_n = 1$$

(3-1)

より出発して $s a_0 + r a_1 = 1$ となる r , s を求めよう。

いま $s_n = 1$, $r_n = -q_n$ とおけば、(3-1)式は

$$s_n a_{n-1} + r_n a_n = 1 \quad \text{となる。}$$

$$a_n = a_{n-2} - a_{n-1} r_{n-1} \quad \text{を代入すれば}$$

$$r_n a_{n-2} + (s_n - r_n q_{n-1}) a_{n-1} = 1$$

よって $s_n = 1$

$$r_n = -q_n$$

$$\begin{cases} s_i = r_{i+1} \\ r_i = s_{i+1} - r_{i+1} q_i \end{cases}$$

により s_i, r_i を, $i = n$ から 1 まで計算すれば

$$s_i a_{i-1} + r_i a_i = 1$$

がすべての i について満足する. $i = 1$ の時

$$s_1 a_0 + r_1 a_1 = 1$$

が成立する.

- (5) 互に素な実数を係数とする多項式を $g(x), h(x)$ とし, $g(x)$ の次数を $a, h(x)$ の次数を b とする. $f(x)$ を次数 $a+b$ より低い多項式とすると, 算式

$$f(x) = r(x) \cdot g(x) + s(x) \cdot h(x) \quad (3-2)$$

が成立する. その上 $r(x)$ の次数は b より小で, $s(x)$ の次数は a より小である.

(3-2) 式の両辺を $g(x) \cdot h(x)$ で割ると, 分数 $f(x) / \{g(x) \cdot h(x)\}$ を 2 つの部分分数の和に分解することができる.

$$\frac{f(x)}{g(x) \cdot h(x)} = \frac{r(x)}{h(x)} + \frac{s(x)}{g(x)}$$

さて $r(x)$ と $s(x)$ を計算するには, 次のようにすれば良い.

$g(x)$ と $h(x)$ が互に素だから(4)により,

$$1 = c(x) \cdot g(x) + d(x) \cdot h(x) \quad (3-3)$$

となる $c(x), d(x)$ が計算できる. $f(x)$ を両辺にかけて,

$$f(x) = f(x) \cdot c(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot d(x) \cdot h(x) \quad (3-4)$$

$f(x) \cdot c(x)$ を $h(x)$ で割って

$$f(x) \cdot c(x) = q(x) \cdot h(x) + r(x) \quad (3-5)$$

(3-5) 式を (3-4) 式に代入し,

$$s(x) = f(x) \cdot d(x) + q(x) \cdot g(x) \quad \text{とおけば}$$

$$f(x) = r(x) \cdot g(x) + s(x) \cdot h(x)$$

(3-5) 式より $r(x)$ の次数は b より小だから, この式の第 1 項の次数は $a+b$ より小となる. ゆえに第 2 項の次数も $a+b$ より小となり, 結局 $s(x)$ の次数は a より小となる.

$g(x)$ として 2 次の既約因子の累乗 $(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}$ をあてはめれば, $(x^2 + p_k x + q_k)^{m_k}$ を分母とする項が分離される. そしてその分子を $s(x)$ とすれば, $s(x)$ の次数は $g(x)$ の次数 $2 \cdot m_k$ より小さい. $g(x) = p(x)^m$ とおくと, $s(x) / g(x)$ がさらに部分分数分解され, 部分分数の分母は $p(x)$ か $p(x)$ の累乗となり, 分子の次数は $p(x)$ の次数より小さくできる.

$$(7) \frac{s(x)}{p(x)^m} \rightarrow \sum_{i=1}^m \frac{s_i(x)}{\{p(x)\}^i}$$

次のように一連の割算を行なう.

$$s(x) = s_1(x)p(x)^{m-1} + r_1(x)$$

$$r_1(x) = s_2(x)p(x)^{m-2} + r_2(x)$$

.....

$$r_{m-2}(x) = s_{m-2}(x) \cdot p(x) + r_{m-1}(x)$$

$$r_{m-1}(x) = s_m(x)$$

これらすべての等式をまとめると,

$$\frac{s(x)}{p(x)^m} = \frac{s_1(x)}{p(x)} + \frac{s_2(x)}{\{p(x)\}^2} + \cdots + \frac{s_{m-1}(x)}{\{p(x)\}^{m-1}} + \frac{s_m(x)}{\{p(x)\}^m}$$

我々の場合は, $p(x)$ は 2 次式で $s_k(x)$ は 1 次式となる.

3.3 四則演算処理

有理式の数式処理の核になる部分として, 四則演算処理がある. 有理式の部分分数分解形を標準型として採用することにより, あたかも多項式が, 変数の高次の順に各項を並べることにより表現されている時, その四則演算が, 係数間の演算に帰されるのと同じアルゴリズムで, 有理式の加算と乗算が実行できることを次に示そう.

(1) 加算, 乗算

有理式 $R_1(x)$, $R_2(x)$ が次のように表現されたとする.

$$R_1 = F_1 + \sum_{k_1=1}^{h_1} \sum_{i_1=1}^{t_{k_1}} \frac{s_{k_1 i_1}}{\{p_{k_1}\}^{i_1}},$$

$$R_2 = F_2 + \sum_{k_2=1}^{h_2} \sum_{i_2=1}^{t_{k_2}} \frac{s_{k_2 i_2}}{\{p_{k_2}\}^{i_2}}.$$

$R(x) = R_1(x) + R_2(x)$ の計算は, 部分分数の分母を同じようにする項の間の計算でなされる. まず多項式部分を算出する.

$$R \leftarrow F_1 + F_2$$

第 2 項以下の手順は次のとおりである.

$k_1 = 1, k_2 = 1$ とおき, i), ii), iii) の 3 つの場合に分けて計算する.

i) $p_{k_1} = p_{k_2}$ の時,

$$R \leftarrow R + \sum_{i=1}^{t_{k_1}} \frac{s_{k_1 i} + s_{k_2 i}}{\{p_{k_1}\}^i} + \sum_{i=t_{k_1}+1}^{t_{k_2}} \frac{s_{k_2 i}}{\{p_{k_1}\}^i}$$

($t_{k_1} < t_{k_2}$ と仮定する)

$i_1 \leftarrow i_1 + 1, i_2 \leftarrow i_2 + 1$ とおき i), ii), iii) のいずれかをくりかえす.

ii) $p_{k_1} \ll p_{k_2}$ の時

$$R \leftarrow R + \sum_{i=1}^{t_{k_1}} \frac{s_{k_1 i}}{\{p_{k_1}\}^i}$$

$i_1 \leftarrow i_1 + 1$ とおき i), ii), iii) のいずれかをくりかえす.

iii) $p_{k_1} \gg p_{k_2}$ の時

$$R \leftarrow R + \sum_{i=1}^{t_{k_2}} \frac{s_{k_2 i}}{\{p_{k_2}\}^i}$$

$i_2 \leftarrow i_2 + 1$ とおき i), ii), iii) のいずれかをくりかえす. 先に求めた項ほど先行する.

同じく乗算

$R(x) = R_1(x) \cdot R_2(x)$ を次式により求める.

$$R = F_1 \cdot F_2$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k_2=1}^{h_2} \sum_{i_2=1}^{t_{k_2}} \frac{F_1 \cdot s_{k_2 i_2}}{\{p_{k_2}\}^{i_2}} + \sum_{k_1=1}^{h_1} \sum_{i_1=1}^{t_{k_1}} \frac{F_2 \cdot s_{k_1 i_1}}{\{p_{k_1}\}^{i_1}} \\ &+ \sum_{k_1=1}^{h_1} \sum_{k_2=1}^{h_2} \sum_{i_1=1}^{t_{k_1}} \sum_{i_2=1}^{t_{k_2}} \frac{s_{k_1 i_1} \cdot s_{k_2 i_2}}{\{p_{k_1}\}^{i_1} \cdot \{p_{k_2}\}^{i_2}} \end{aligned}$$

この式の第 1 行目は多項式の積として計算する. 第 2 行目を計算するには, 各項

$$\frac{F \cdot s_{ki}}{\{p_k\}^i}$$

を部分分数分解をして, 先に述べた加算を用いて足し込んでいく. 第 3 行目の各項

$$\frac{s_{k_1 i_1} s_{k_2 i_2}}{\{p_{k_1}\}^{i_1} \{p_{k_2}\}^{i_2}}$$

に対しても同様の取扱いを必要とする.

このように, 加算と乗算は, 有理式 $R(x)$ を

$$F + A_1 \cdot X_1 + A_2 \cdot X_2 + \cdots + A_n \cdot X_n$$

において, あたかも多項式 $P(x)$ を

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n \cdot x^2$$

と表現して演算を施すのと同様の手順で処理が実行出来ることがわかる. この場合の利点は, 分母を同じにする項の間でのみ演算を行えば良いので, 取扱う分数式の次数が低く, 分数式の通分, 約分等の回数が少なく済む. 多項式の演算のうち除算に関するものは, 時間がかかる上に, 誤差が蓄積して, 本来割切れるはずの計算も誤差に邪魔されて, 剰余が出て期待どおりに演算が進まないことが間々ある. 従ってなるべく除算を使わないような方向で処理を進める方が賢明であると考える. 欠点は, 分母が同一かどうかの検査が必要となることである. しかしながら 1 変数多項式の場合は, この時間はわずかである.

(2) 除 算

加算, 乗算に較べて除算は, 良い手法がないので, 本来の方法に頼るしかない.

$R(x) = R_1(x)/R_2(x)$ を得るには、 $R_2(x)$ の逆数を求める。 $R_2(x)$ を $P(x)/Q(x)$ にもどし、逆数 $Q(x)/P(x)$ を再び部分分数分解する。そして乗算により $R_1(x)$ を掛け合わせる。この点だけに注目すれば、有理式の標準型に部分分数分解形を採用することは、数式処理上好ましい結果が得られないという印象を持つだろう。しかし有理式の数式処理が多項式の数式処理に関連づけられるように標準型を採用することにより、広範囲な数式に対し、式の標準型および四則演算等の統一的な処理方法を生み出す上で意味があると考えられる。

3.4 多変数有理式の標準型

r -変数の多変数有理式 $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ を部分分数分解して次のように書き表わす。

$$R(x_1, x_2, \dots, x_r) \xrightarrow{f_4^{(r)}} \sum_{j=0}^J K_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{P_{jl}^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_r)}{\{Q_{jl}(x_1, x_2, \dots, x_r)\}^i}$$

ここで、 $K_j, P_{jl}^{(i)}, Q_{jl}$ は次のような条件のもとで作成された有理式である。

$$(1) \quad P_{jl}^{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{k=0}^{j'} s_{lk}^{(ij)}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^k$$

$$Q_{jl}(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{k=0}^{(j-1)} t_{lk}^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^k + x_r^j$$

$K_j, s_{lk}^{(ij)}, t_{lk}^{(j)}$ は $(r-1)$ -変数の有理式である。

(2) Q_{jl} の主変数 x_r に対する係数 $t_{lk}^{(j)}$ ($k=0, 1, \dots, j-1$) の分母を通分して得られる多項式を Q_{jl}^* とすれば、 Q_{jl}^* は既約多項式である。

(3) $j' < j$. すなわち主変数 x_r に対して、 $P_{jl}^{(i)*}$ は Q_{jl}^* より次数が低い。

(4) 部分分数の分母には順序がついていて、項の順序が一意的に定まる。

$f_4^{(r)}$ は、 r -変数有理式の標準型をなすことを次に示そう。証明は、1変数有理式に対する標準型 f_4 に対するものと同様に行なう。

$$(1) \quad \varepsilon_1 = \{P(x_1, x_2, \dots, x_r) \mid P(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{k=0}^K R_k(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^k,$$

R_k は $(r-1)$ -変数の有理式

を r -変数有理式のサブクラスとする。 $h^{(r)}$ を次のような写像と定義する。 $h^{(r)}$ がクラス ε_1

$$P(x_1, x_2, \dots, x_r) \xrightarrow{h^{(r)}} R_K \cdot x^K + R_{K-1} \cdot x^{K-1} + \dots + R_1 \cdot x + R_0$$

の標準型をなすことは、 $(r-1)$ -変数の有理式が標準型 $f_4^{(r-1)}$ を持つと仮定すれば、1.2 節の定理を適用すれば証明できる。

(2) r -変数有理式 $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ を次のように変形していく。

$$R(x_1, x_2, \dots, x_r) \xrightarrow{f_1^{(r)}} \frac{h^{(r)} \left(\sum_{j=1}^{J_1} H_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right)}{h^{(r)} \left(x_r^{J_2} + \sum_{j=1}^{J_2-1} G_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right)}$$

ここで、 H_j, G_j は $(r-1)$ -変数有理式である。

$$f_1^{(r)}(R) \xrightarrow{F_2^{(r)}} h^{(r)} \left(\sum_{j=0}^J K_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right) + \frac{h^{(r)} \left(\sum_{j=0}^{J_1} H_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right)}{h^{(r)} \left(x_r^{J_2} + \sum_{j=1}^{J_2-1} G_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right)}$$

ここで、 K_j, H_j, G_j は $(r-1)$ -変数の有理式、 $J_1 < J_2$ である。

$f_2^{(r)} = F_2^{(r)} \cdot f_1^{(r)}$ とおく。

$$f_2^{(r)}(R) \xrightarrow{F_3^{(r)}} h^{(r)} \left\{ \sum_{j=0}^J K_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j \right\} + \sum_{j=1}^N \frac{P_j(x_1, x_2, \dots, x_r)}{Q_j(x_1, x_2, \dots, x_r)}$$

$$P_j(x_1, x_2, \dots, x_r) = h^{(r)} \left\{ \sum_{k=0}^{M_j} s_{jk}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^k \right\}$$

$$Q_j(x_1, x_2, \dots, x_r) = h^{(r)} \left[\prod_{l=1}^{N_j} \left\{ x_r^j + \sum_{k=0}^{j-1} t_{lk}^{(j)}(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^k \right\}^{i_l} \right]$$

ここで、 $K_j, s_{jk}, t_{lk}^{(j)}$ は $(r-1)$ -変数の有理式、 $M_j < \sum_{l=1}^{N_j} j \cdot i_l$ である。

$f_3^{(r)} = F_3^{(r)} \cdot f_2^{(r)}$ とおく。

部分分数の分母を、既約因子の次数により分類する。そして $(j+i)$ 番目の項の分母は、次数が j のすべての因子の積である。

$$\frac{P_j}{Q_j} \xrightarrow{g_j^{(r)}} \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{h^{(r)} \{ P_{jl}^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_r) \}}{h^{(r)} \{ Q_{jl}^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_r) \}^i}$$

ここで、 Q_{jl} は ε_1 の属する r -変数の有理式で、もとの有理式 $R(x_1, x_2, \dots, x_r)$ の主変数に対する次数が j の既約因子の 1 つである。 $P_{jl}^{(i)}$ も、やはり ε_1 に属する r -変数の有理式で、かつ $P_{jl}^{(i)}$ の次数は j より小さい。

$$f_3^{(r)} \xrightarrow{F_4^{(r)}} h^{(r)} \{K(x_1, x_2, \dots, x_r)\} \\ + \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^{N_j} \sum_{i=1}^{n_l} \frac{h^{(r)} \{P_{jli}^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_r)\}}{h^{(r)} \{Q_{jli}^{(r)}(x_1, x_2, \dots, x_r)^i\}}$$

ここで, $K(x_1, x_2, \dots, x_r) = \sum_{j=0}^J K_j(x_1, x_2, \dots, x_{r-1}) \cdot x_r^j$ である.

$f_4^{(r)} = f_3^{(r)} F_4^{(r)}$ とおく.

$h^{(r)}, f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, f_3^{(r)}, g_j^{(r)}$ が標準型をなすならば, $f_4^{(r)}$ は, r -変数有理式の標準型をなす. しかるに $h^{(r)}$ は帰納法により標準型をなすことが容易に確かめられる. $f_1, f_2, f_3, f_4, g_1, g_2$ が標準型をなすことは既に 1 変数の有理式に対して示されている. 従って $f_1^{(r)}, f_2^{(r)}, f_3^{(r)}, g_j^{(r)}$ はこれらの類推から標準型をなすことが確かめられるであろう. 故に $f_4^{(r)}$ は r -変数の有理式の標準型である.

4. 実験結果

FACOM 230-60 による 1 変数の有理式に対する部分分数分解の実験

4.1 計算の経過

入力有理式

$$R(x) = \frac{x^8 - x^7 + 7x^6 - 6x^5 + 18x^4 - 12x^3 + 20x^2 - 8x + 8}{-5x^5 + 10x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 4x + 4} \quad (1)$$

PHASE (1) : $R(x) = F(x) + P(x)/Q(x)$

$$F(x) = -0.2x^3 - 0.2x^2 - 1.48x - 1.92$$

$$P(x) = -5.392x^4 + 1.92x^3 - 7.584x^2 + 1.952x - 3.136$$

$$Q(x) = x^5 - 2x^4 + 1.6x^3 - 2.4x^2 + 0.8x - 8$$

PHASE (2) : $Q(x)$ の因数分解

$$Q(x) = (x - 1.7928) \cdot$$

$$(x^2 + 0.2541x + 0.7539)(x^2 - 0.4612x + 0.5919)$$

PHASE (3) : 1 次式を分母とする項の算出

$$R(x) = \frac{-5.20947}{x - 1.79284} + \frac{-0.18253x^3 + 0.51356x^2 - 0.26295x + 0.45259}{x^4 - 0.20716x^3 + 1.22859x^2 - 0.19733x + 0.44622}$$

PHASE (4) :

$$G(x) = x^2 + 0.2541x + 0.7539$$

$$H(x) = x^2 - 0.4612x + 0.5919 \quad \text{に対し}$$

$$G(x) \cdot C(x) + H(x) \cdot D(x) = 1 \quad \text{を満たす } C(x), D(x) \text{ を計算すると,}$$

$$C(x) = -1.86994x + 0.59190$$

$$D(x) = 1.86994x + 0.05164 \quad \text{となる.}$$

PHASE (5) :

$$F(x) = -0.18253x^3 + 0.51356x^2 + 0.26295x + 0.45259$$

$$\frac{F(x)}{G(x) \cdot H(x)} = \frac{S(x)}{G(x)} + \frac{R(x)}{H(x)} \quad \text{の計算結果として,}$$

$$S(x) = 0.17030x + 0.37882$$

$$R(x) = -0.35283x + 0.30293$$

を得る.

PHASE (6) : 2次式を分母とする項の算出

$$\frac{-0.35283x + 0.30293}{x^2 - 0.46123x + 0.59190} + \frac{0.17030x + 0.37882}{x^2 + 0.25407x + 0.75388}$$

結果のチェック

$$R(x) = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} + \frac{P_3}{Q_3} \quad \text{において}$$

$P_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 + P_2 \cdot Q_1 \cdot Q_3 + P_3 \cdot Q_1 \cdot Q_2$ を計算したところ小数点以下4桁まで PHASE(1) の $P(x)$ と一致した.

4.2 計算時間とリスト処理用作業領域

FACOM 230-60 (0.92 μ s / 語) での上記例の CPU 使用時間は 37.5 秒である.

リスト処理用作業領域は約 30 K 語である.

上記は処理言語 FLIPS-II を使用した. FLIPS-III を使用するとコア内の作業領域は 5 K 語に節約できる (作業領域のページング機能による) が処理時間は 387 秒に増える.

例題

INPUT

$$\begin{aligned} & X**8 - X**7 + 7*X**6 - 6*X**5 + 18*X**4 - 12*X**3 + 20*X**2 - 8*X + 8 \\ & \quad - 5*X**5 + 10*X**4 - 8*X**3 + 12*X**2 - 4*X + 4 \end{aligned}$$

PHASE 1

F

$$(-0.20000X**3 - 0.20000X**2 - 1.48000X - 1.92000)$$

P

$$(-5.39200X**4 + 1.92000X**3 - 7.58400X**2 + 1.95200X - 3.13600)$$

Q

$$(X**5 - 2.00000X**4 + 1.60000X**3 - 2.40000X**2 + 0.80000X - 0.80000)$$

PHASE 2

REAL ROOTS OF $Q(X)$ AND ITS MULTIPLICITY

(0.17928F 01 1)

DEGREE TWO FACTORS OF $Q(X)$ AS $X^2+P\cdot X+Q$, P, Q AND ITS MULTIPLICITY

(0.2541E 00 0.7539F 00 1)

(-0.4612E 00 0.5919F 00 1)

PHASE 3

DEGREE=1 PARTIAL FRACTION

BI
(-5.20947)

PI
(X-1.79284)

MULT 1

OTHERS

NUMERATOR
(-0.18253*X**3+0.51356*X**2-0.26295*X+0.45259)

DENOMINATOR
(X**4-0.20716*X**3+1.22859*X**2-0.19733*X+0.44622)

PHASE 4

F
(-0.18253*X**3+0.51356*X**2-0.26295*X+0.45259)

G
(X**2+0.25407*X+0.75388)

H
(X**2-0.46123*X+0.59190)

C
(-1.86994*X+1.28593)

D
(1.86994*X+0.05164)

PHASE 5

S

$$(0.17030 * X + 0.37882)$$

R

$$(-0.35283 * X + 0.30293)$$

PHASE 6

DEGREE-2 PARTIAL FRACTION

B1

$$(-0.35283 * X + 0.30293)$$

P1

$$(X^2 - 0.46123 * X + 0.59190)$$

MULT 1

B1

$$(0.17030 * X + 0.37882)$$

P1

$$(X^2 + 0.25407 * X + 0.75388)$$

MULT 1

参考文献

1. B. F. Caviness. On Canonical Forms and Simplification.
J. ACM 17, 2(1970), 385-396.
2. 石黒美佐子, 多項式処理プログラム: JPM. JAERI-memo 3828.
3. B. L. van der Waerden. Modern Algebra.
4. 情報処理学会編. 計算機ハンドブック, p. 5-45 ~ 5-47.
5. 中村康弘. ページ・メモリを持ったリスト処理言語FLIP-Ⅲ. 第10回プログラミング
シンポジウム予稿集.

本 PDF ファイルは 1971 年発行の「第 12 回プログラミング・シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の検索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者搜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思います。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日～2021 年 3 月 19 日

掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程

<https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html>