# C 1. F$\bar{\text{O}}$RMACを使用してみて

戸田英雄（電試）
鈴木久子（日本IBM）

## まえおき

数式処理を計算機にやつて貰うためのCompiler（F$\bar{\text{O}}$RMAC）がIBM 7090のIBSYS operating systemにおいてIBJ$\bar{\text{O}}$Bの下でF$\bar{\text{O}}$RTRAN Ⅳと一諸に使用できるとの話を聞いて，答の分かつている二種類の問題でいろいろと試みた．その極めて狭い経験から感じたのは，問題を機械的な式の処理計算に持ち込めば，F$\bar{\text{O}}$RMACも非常に便利な道具となる――たとえば，われわれの様に数式計算の弱い者にも，山内流の式の展開の"まねごと"なら出来そうだ――ということである．

ここに報告する問題のプログラムは，鈴木久子（IBM）さんが書いて機械に通して呉れたものである．7月末にstartして，初めのうちは，どうなるのかと不安に思う時もあつたが，11月末までのべ四ケ月間，楽しむことができた．

## 目次

## 1. FŌRMACの機能

FŌRMAC (Formula Manipulation Compiler)について，その機能の概略を説明する．計算機の応用分野において様々なHigh Levelの言語が開発されているが，FŌRMACもその一つで数式を記号を含んだままの形で取扱えるように設計されている．FŌRMACシステムはIBM 7090／94 IBSYSに組み込まれた形になつており，FŌRTRAN Ⅳのステートメントは自由に使えるようになつている．その他にFŌRMACステートメントがあり，記号式の処理即ち微分，代入，評価，展開，係数の決定等の機能をそなえている．

FŌRMACには次のような命令がある：

i) FŌRMAC Expressionに対する命令

LET　　：FŌRMAC expressionであることを示す．
SUBST　：ある式の中の変数に定数又は他の変数又は式を代入する．
EXPAND：カッコをはずして整理する．
CŌEFF　：式の中のある項の係数又は巾数をとりだす．
PART　　：式を徐々に分解する．
ŌRDER　：式を降巾又は昇巾の順に整理する．

ii) 以下の命令は結果としてFŌRTRANで扱える数値を出す．

EVAL　　：式に数値を代入する．
FIND　　：指定された変数が式の中にあるか又は従属しているかどうか．
MATCH　：二つの式を比較する．
CENSUS：項の数，因数の個数，又は使用しているWORDの数をかぞえる．

iii) その他の命令

ALGCŌN：読み込んだ式を内部表現に変換する．
BCDCŌN：書き出すために内部表現を印刷出来る文字式に変換する．
ERASE　：不用になつた式を消す．
AUTSIM：式の自動的簡略化を行なう範囲を示す．

iv) 宣言に使用されるステートメント

ATŌMIC：記号として取扱う変数を示す．
DEPEND：変数間の従属性を宣言する．
PARAM　：SUBST, EVALで使用するパラメーターリスト．
SYMARG：argumentで記号として扱われるもの．

V) FŌRMAC函数．これは記号式をargumentとするものでもし数値が与えられればその値を計算する．

FMCEXP(X)　　　　$e^x$

| | |
|---|---|
| FMCSIN(X) | $\sin x$ |
| FMCCŌS(X) | $\cos x$ |
| FMCLŌG(X) | $\log x$ |
| FMCATN(X) | $\tan^{-1} x$ |
| FMCHTN(X) | $\tanh x$ |
| FMCFAC(X) | $n!$ |
| FMCDFC(X) | $n(n-2)(n-4)\cdots$ |
| FMCŌMB(N,M) | $\binom{n}{m}$ |
| FMCDIF(F,X,M,Y,N,・・・) | $\frac{\partial^m}{\partial x^m}\frac{\partial^n}{\partial y^n}\cdots f(x, y, \cdots)$ |

## 2. FŌRMAC文の例題

主要なFŌRMAC文を例題（SHARE GENERAL PRŌGRAM LIBRARY FŌRMAC 7090 IBM 0016から引用）で説明する．

SYMARG

```
SUBRŌUTINE ŌUT2(KTT,NME,KN)
SYMARG KTT,KN
...
...
RETURN
END
```

プログラムの先頭に必ず書く．SUBRŌUTINEやFUNCTIŌNのときは，FŌRMAC変数の引数を宣言する．

ATŌMIC 文 :=ATŌMIC{name / name(dim-size)}{,name / ,name(dim-size)}・・

ATŌMIC X,Y(10)　　記号として取扱うことを宣言する．

LET 文 :=LET let-var=fmc-exp    FŌRMACのexpressionであることを示す.

```
ATŌMIC Z
N=4
LET C=(N+Z)**(1/2)        results in C→(4.+Z)**(.5)

I=4
ATŌMIC X
DIMENSIŌN B(20)
LET B(I)=X**2
LET MR =FMCDIF(B(I),X,2)+FMCSIN(X)

      results in MR→2+FMCSIN(X)
```

SUBST 文
:= LET let-var=SUBST fmc-exp0, {param-label | param-list}
param-list:=(seek-var,fmc-exp1) {,seek-var,fmc-exp2)}...

```
LET A=B+3*C
M=4
LET Z=SUBST A,(B,M),(C,FMCDIF(X**2,X,1))
```

results in $Z \rightarrow (4.+ 3.* \frac{d}{dx}(X^2)) = 4.+X*6.$

```
LABL
     PARAM(M,2),(A(5),JŌE),(JŌE,3)
     LET X= A(5)**2 -(JŌE*2 -3)**M
     LET R= SUBST X,LABL
```

results in $R \rightarrow (3^2-(3\times 2-3)^2)=9-3^2=0$

EXPAND 文 := LET let-var = EXPAND fmc-exp [,CŌDEM]

```
ATŌMIC A,B,C,D

LET R=EXPAND(A+B)**2 +A*(C-D)        Results in R→A**2.+A*B*2.
                                                   +B**2.+A*C-A*D
LET MR=EXPAND(A/4+1.)*(B/2-C)        Results in MR→-C

LET  R=EXPAND(A/4+1.)*(B/2-C)        Results in R→A*B*(.125)+B*(.5)
                                                   -A*C*(.25)-C


LET EXP= A*(1.+B)/C +B/D**2.+E/(2*C**2.)
LET   R= EXPAND EXP,CŌDEM
 intermediate results
      R→A*C**(-1.)+A*B*C**(-1.)+B*D**(-2.)+E*C**(-2.)*(.5).
 final results in infix
```

$$R \rightarrow \frac{A*C*D^2 + A*B*C*D^2 + B*C^2 + (.5)*E*D^2}{C^2 * D^2}$$

ŌRDER 文 := LET let-var

$$= \bar{\mathrm{O}}\mathrm{RDER}\ \mathrm{fmc\text{-}exp}, \begin{Bmatrix} \mathrm{INC} \\ \mathrm{DEC} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \mathrm{FUL} \\ \mathrm{PRT} \end{Bmatrix} \left[ \begin{Bmatrix} ,(\mathrm{seek\text{-}var}_i \{,\mathrm{seek\text{-}var}_j\}) \\ ,(\mathrm{seek\text{-}var}_j \{,\mathrm{seek\text{-}var}_j\}) \end{Bmatrix} \right]$$

```
LET Z=ŌRDER X*3 +X**2*Z*2 +Y*X**3,INC,FUL,(X)

              results in Z→ X*3 + 2*X**2*Z +3*Y


LET Z=EXPAND (A-B)**3          } results in Z1
LET Z1=ŌRDER Z,DEC,FUL,(B,A)   } → -B**3 +3*B**2*A -3*B*A**2 +A**3

LET Z=EXPAND (A-B)**3          } results in Z2
LET Z2=ŌRDER Z,INC,FUL,(B,A)   } → A**3 -3*B*A**2 +3*B**2*A -B**3

LET Z=EXPAND (A-B)**3          } results in Z3
LET Z3=ŌRDER Z,DEC,FUL,(A,B)   } → A**3 -3*A**2*B +3*A*B**2 -B**3
```

COEFF 文 :=LET let-var=COEFF fmc-exp ,seek var [ { ,ftn-flt-var1 / ,ftn-flt-var1, ftn-flt-var2 } ]

| | ftn-flt-var1 | ftn-flt-var2 |
|---|---|---|
| N=0 | very lowest power | very highest power |
| N≠0 | next highest power | next loweot power |

```
LET B= A*X**2+C*X**4.2 +D*X**3.1     } results in Z→ A
LET Z= COEFF B,X**2,R                                R=3.1 (next highest)

LET Y= A*X**(-1)+B*X +C*X**2 +F*D    } results in Z→ A
LET Z= COEFF Y, X**(-1), R                           R=1.  (next highest)

LET Y= A*X**(-1)+B*X +C*X**2 +F*D    } results in Z→ F*D
LET Z= COEFF Y, X**0 , R                             R=-1. (next highest)

LET PB=A*X +B*X**2
LET PA=2*X +B*X**3                   } results in PR→ A+2.
LET PR=COEFF PB+PA,X,R                               R=2.  (next highest)
```

```
LET EXPN=AX^12+BX^3+2X^-3+FMCSIN(X)+3 +X
N=0
LET C= COEFF, EXPN, X**N, V1,V2
N=V2
IF (N.NE.0) GO TO 1
```

Results :

| | (N) | (C) | (V1) | (V2) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | FMCSIN(X)+3. | -3.(very lowest) | 12.(very highest) |
| 2 | 12 | A | 0.(next highest) | 3.(next lowest) |
| 3 | 3 | B | 12.(next highest) | 1.(next lowest) |
| 4 | 1 | 1. | 3.(next highest) | -3.(next lowest) |
| 5 | -3 | 2. | 1.(next highest) | 0.(next lowest) |

```
MATCH 文 := LET ftn-log-var=MATCH {ID
                                  {EQ,ftn-flt-num},fmc-exp1,fmc-exp2
```

```
ATOMiC A,B
LOGiCAL Q
LET X= (A+B)**2
LET Y=  A**2 +2*A*B +B**2
LET Q= MATCH ID,X,Y              Results in Q= .FALSE.
LET Q= MATCH EQ,.001,X,Y         Results in Q= .TRUE.
```

```
ATOMiC A,B
LOGiCAL Q
LET X= EXPAND(A+B)**2
LET Q= MATCH ID,X,A**2+2*A*B+B**2      Results in Q=.TRUE.
```

```
ATOMiC A,B,C
LOGiCAL Q
R=0.
LET Y= SUBST FMCDIF(FMCSIN(X),X,1),(X,R)
LET Q= MATCH EQ,0.,0.,Y                    results in Q=.FALSE.
```

```
EVAL文:=LET ftn-num-var=EVAL fmc-exp0[,{param-label{,param label}
                                       {param-list              ]

   param-list:=(seek-var,fmc-exp1){,(seek-var,fmc-exp2)}···
```

```
RI=-.5
LET A= B(1)*X +B(1)*(Y**-1.)
LET R= X-4.
LET IANS(5)= EVAL  A+R, (B(1),2),(X,ABS(RI)),(Y,S)
```

After substitution A+R is 2.*(.5)+2.*3.**-1. +.5-4.

→ 1.+.66666666 -3.5

→ -1.83333

BCDCON文：＝LET ftn-num-var=BCDCON fmc-exp,ftn-fxd-var, fxd-num

fxd-num:＝{ftn-fxd-var / fxd-cons}

```
    SYMARG
    ATŌMIC A,B
    DIMENSIŌN KŌUT(21)
    SIG=0.
    LET EXPR = EXPAND (A+B)**3
10  LET SIG  = BCDCŌN EXPR,KŌUT,21
    WRiTE (6,13)(KŌUT(J),J=2,21)
    IF(SIG.NE.0.) GŌ TŌ 10
13  FŌRMAT(1H 20A6)
    CŌNTiNUE
```

wōult result in

| | | |
|---|---|---|
| KŌUT | (1) | binary 16bit |
| 〃 | (2) | A**3.+ |
| 〃 | (3) | A**2.* |
| 〃 | (4) | B*3.+A |
| 〃 | (5) | *B**2. |
| 〃 | (6) | *3.+B* |
| 〃 | (7) | *3.bbb |

results in the printed line

A**3. + A**2.*B*3. + A*B**2.*3. + B**3.

ALGCON文：＝LET let-var=ALGCŌN ftn-num-var;ftn.fxd-var

```
     if ARRAY (1)  0.$1.$
         〃   (2)  2.$A+B
         〃   (3)  A$M*B$

    DIMENSIŌN Y(500)
    ATŌMIC A,B,M
    N=1
    L=5
    J=0
10  LET Y(N)=ALGCŌN ARRAY(1),J
    N=N+1
    IF(N.NE.L+1) GŌ TŌ 10
 9  etc.
```

results in Y(1)=0.
Y(2)=1.
Y(3)=2.
Y(4)=A+BA
Y(5)=M*B

J=0でARRAY(1)の先頭から$がくるまでcōnvertしてnon zeroのJの値となると思われる.

## 3. $\bar{\text{F}}$ORMACの使用例

問題－1. Runge-Kutta法の打ち切り誤差の項の計算（SUBST文の応用例）

（問題の説明）

1階の常微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=f(x,\ y)$ （1.1）

を初期条件 $x=x_0$ のとき $y=y_0$ （1.2）

のもとで解くのに，Runge-Kutta法では$x$の値を$h$刻みにとつて，$x_1=x_0+h$における$y$の値$y_1$を

$$y_1=y_0+h\cdot\phi(x_0,\ y_0\ ;h) \qquad (1.3)$$

で求める．ここで，

$$\phi(x,\ y\ ;h)=\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \qquad (1.4)$$

で，

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=f(x,\ y)\\
k_2&=f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_1}{2}\right)\\
k_3&=f\left(x+\frac{h}{2},\ y+\frac{k_2}{2}\right)\\
k_4&=f(x+h,\ y+k_3)
\end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

である．$f(x,\ y)$が十分高階まで微分可能として，$\phi(x,\ y\ ;h)$ を$h$の巾級数に展開して

$$\phi(x,\ y\ ;h)=f+\frac{h}{2\,!}s_1+\frac{h^2}{3\,!}s_2+\frac{h^3}{4\,!}s_3+\frac{h^4}{5\,!}s_4 \qquad (1.6)$$

一方正しい解$y(x)$は $\dfrac{d\,y(x)}{dx}=f(x,\ y(x))$ を満すので，

$$y(x_1)=y(x_0)+h\cdot\Delta(x_0,\ y(x_0)\ ;h) \qquad (1.7)$$

で，

$$\Delta(x,\ y\ ;h)=f+\frac{h}{2\,!}f^{(1)}+\frac{h^2}{3\,!}f^{(2)}+\frac{h^3}{4\,!}f^{(3)}+\frac{h^4}{5\,!}f^{(4)}+0(h^5) \qquad (1.8)$$

となる．ここで，

$$\left.\begin{aligned}
f^{(1)}&=f_x+f_yf\\
f^{(2)}&=f_{xx}+2f_{xy}f+f_{yy}f^2+f_yf^{(1)}\\
f^{(3)}&=f_{xxx}+3f_{xxy}f+3f_{xyy}f^2+f_{yyy}f^{(3)}\\
&\quad+3(f_{xy}+f_{yy}f)f^{(1)}+f_yf^{(2)}\\
f^{(4)}&=f_{xxxx}+4f_{xxxy}f+6f_{xxyy}f^2+4f_{xyyy}f^3+f_{yyyy}f^4
\end{aligned}\right\} \qquad (1.9)$$

$$+6(f_{xxy}+2f_{xyy}f+f_{yyy}f^2)f^{(1)}$$
$$+4(f_{xy}+f_{yy}f)f^{(2)}+3f_{yy}(f^{(1)})^2+f_yf^{(3)}$$

である．ここで，

$$f^{(i)}=\left.\frac{d^i f}{dx^i}\right|_{x=x_0,\ y=y_0}\equiv f^i(x_0,y_0)$$

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \cdots\cdots$$

$$f_y=\frac{\partial f}{\partial y},\quad f_{yy}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\ \cdots\cdots$$

$$f_{xy}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \cdots\cdots$$

とかく．

したがつて，打ち切り誤差は，

$$\phi(x,y;h)-\Delta(x,y;h)$$
$$=\frac{h}{2!}(s_1-f^{(1)})+\frac{h^2}{3!}(s_2-f^{(2)})+\frac{h^3}{4!}(s_3-f^{(3)})+\frac{h^4}{5!}(s_4-f^{(4)})$$
$$+0(h^5) \qquad (1.10)$$

である．そこで問題は，(6)の $s_1$, $s_2$, ……, $s_4$ を求め，一方 $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, ……, $f^{(4)}$ は(9)で与えて，(10)で表わされる $h$ の各orderの係数をだすことがここでの問題となる．

（計算の方針）

$$k_1=f(x_0,y_0)\equiv f_0 \quad \text{とかく．} \qquad (1.11)$$

$$k_2=f\left(x_0+\frac{h}{2},\ y_0+k_1\frac{h}{2}\right) \qquad (1.12)$$

$$=f_0+\left(\frac{h}{2}\right)(f_x+k_1f_y)$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2(f_{xx}+2k_1f_{xy}+k_1^2f_{yy})\\&+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3(f_{xxx}+3k_1f_{xxy}+3k_1^2f_{xyy}+k_1^3f_{yyy})\\&+\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4(f_{xxxx}+4k_1f_{xxxy}+6k_1^2f_{xxyy}+4k_1^3f_{xyyy}+k_1^4f_{yyyy})\end{aligned}\right\}\ (1.13)$$

$$=p_0+p_1\left(\frac{h}{2}\right)+p_2\left(\frac{h}{2}\right)^2+p_3\left(\frac{h}{2}\right)^3+p_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 \qquad (1.14)$$

とおくと，

$$
\left.\begin{aligned}
p_0 &= f_0 \\
p_1 &= f_x + f_0 f_y \\
p_2 &= \frac{1}{2}( f_{xx} + 2 f_0 f_{xy} + f_0^2 f_{yy} ) \\
p_3 &= \frac{1}{6}( f_{xxx} + 3 f_0 f_{xxy} + 3 f_0^2 f_{xyy} + f_0^3 f_{yyy} ) \\
p_4 &= \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (1.15)
$$

となる.

$$k_3 = f\left( x_0 + \frac{h}{2},\ y_0 + k_2 \frac{h}{2} \right) \quad (1.16)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= f_0 + \left(\frac{h}{2}\right)( f_x + k_2 f_y ) \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2 ( f_{xx} + 2 k_2 f_{xy} + k_2^2 f_{yy} ) \\
&\quad + \frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3 ( f_{xxx} + 3 k_2 f_{xxy} + 3 k_2^2 f_{xyy} + k_2^3 f_{yyy} ) \\
&\quad + \frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4 ( f_{xxxx} + 4 k_2 f_{xxxy} + 6 k_2^2 f_{xxyy} + 4 k_2^3 f_{xyyy} \\
&\qquad\qquad + k_2^4 f_{yyy} )
\end{aligned}\right\} \quad (1.17)
$$

$$= q_0 + q_1 h + q_2 h^2 + q_3 h^3 + q_4 h^4 \quad (1.18)$$

とおくと,

$$
\left.\begin{aligned}
q_0 &= f_0 \\
q_1 &= \frac{1}{2}( f_x + f_0 f_y ) \\
q_2 &= \frac{1}{4}\left\{ p_1 f_y + \frac{1}{2}( f_{xx} + 2 f_{xy} f_0 + f_{yy} f_0^2 ) \right\} \\
q_3 &= \frac{1}{8}\left\{ p_2 f_y + p_1 f_{xy} + p_0 p_1 f_{yy} + \frac{1}{6}( f_{xxx} + 3 p_0 f_{xxy} + 3 p_0^2 f_{xyy} \right. \\
&\qquad\qquad \left. + p_0^3 f_{yyy} ) \right\} \\
q_4 &= \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (1.19)
$$

$$k_4 = f( x_0 + h,\ y_0 + k_3 h ) \quad (1.20)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&= f_0 + h( f_x + k_3 f_y ) \\
&\quad + \frac{1}{2!} h^2 ( f_{xx} + 2 k_3 f_{xy} + k_3^2 f_{yy} )
\end{aligned}\right\} \quad (1.21)
$$

$$\left.\begin{aligned}&+\frac{1}{3\,!}h^{3}(f_{xxx}+3k_{3}f_{xxy}+3k_{3}^{2}f_{xyy}+3k_{3}^{3}f_{yyy})\\&+\frac{1}{4\,!}h^{4}(f_{xxxx}+4k_{3}f_{xxxy}+6k_{3}^{2}f_{xxyy}+4k_{3}^{3}f_{xyyy}+k_{3}^{4}f_{yyyy})\end{aligned}\right\}$$

$$=r_{0}+r_{1}h+r_{2}h^{2}+r_{3}h^{3}+r_{4}h^{4} \qquad (1.22)$$

とおくと，

$$\left.\begin{aligned}&r_{0}=f_{0}\\&r_{1}=f_{x}+f_{0}f_{y}\\&r_{2}=q_{1}f_{y}+\frac{1}{2}(f_{xx}+2f_{0}f_{xy}+f_{0}^{2}f_{yy})\\&r_{3}=q_{1}f_{xy}+q_{1}f_{0}f_{yy}+q_{2}f_{y}+\frac{1}{6}(f_{xxx}+3f_{0}f_{xxy}+3f_{0}^{2}f_{xyy}\\&\qquad\qquad+f_{0}^{3}f_{yyy})\\&r_{4}=\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(1.23)$$

となる.

(19)の右辺にある $p_i$ ( $i=0(1)4$ ) に (15) を入れて，$p_i$ を追いだす．これを(23)の右辺にある $q_i$ ( $i=0(1)4$ ) に入れて $q_i$ ( $i=0(1)4$ ) を追いだす．その結果を $h$ のorderに従つて整理する．

$h$ の1次の項は，

$$\left.\begin{aligned}&p_{1}=f_{x}+f_{0}f_{y}\\&q_{1}=\frac{1}{2}(f_{x}+f_{0}f_{y})\\&r_{1}=f_{x}+f_{0}f_{y}\end{aligned}\right\}\qquad(1.24)$$

$h$ の2次の項は，

$$\left.\begin{aligned}&p_{2}=\frac{1}{2}(f_{xx}+2f_{0}f_{xy}+f_{0}^{2}f_{yy})\\&q_{2}=\frac{1}{8}(f_{xx}+2f_{0}f_{xy}+f_{0}^{2}f_{yy})+\frac{1}{4}(f_{x}f_{y}+f_{0}f_{y}^{2})\\&r_{2}=\frac{1}{2}(f_{xx}+2f_{0}f_{xy}+f_{0}^{2}f_{yy})+\frac{1}{2}(f_{x}f_{y}+f_{0}f_{y}^{2})\end{aligned}\right\}\qquad(1.25)$$

となる.

以下同様・・・・・

したがつて

$$\phi(x,\ y\ ;h)=\frac{1}{6}(k_{1}+2k_{2}+2k_{3}+k_{4})$$

$$=s_0+s_1\frac{h}{2!}+s_2\frac{h^2}{3!}+s_3\frac{h^3}{4!}+s_4\frac{h^4}{5!}+0(h) \qquad (1.26)$$

とおくと，

$$\left.\begin{aligned} s_0 &= f_0 \\ s_1 &= ((p_1+2q_1+r_1)/6)\cdot 2 = f_x+f_0f_y \\ s_2 &= (\frac{p_2}{2}+2q_2+r_2)/6)\cdot 6 = f_{xx}+2f_0f_{xy}+f_0^2f_{yy}+f_xf_y \\ &\qquad +f_0f_y^2 \\ s_3 &= \cdots\cdots \\ s_4 &= \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (1.27)$$

となる．

（FŌRMACによるプログラムの方針）

〔記号〕：いままで出てきた変数は原則として大文字で表示するが，$f_x$=F1X，$f_{xx}$=F2X，$f_{xy}$=F1X1Y，$f_{xxy}$=F2X1Y……とした．$h$=H，$f_0$=F0，$p_1$，$p_2$，……=P1，P2……とした．$f^{(1)}$=KM(1)，$f^{(2)}$=KM(2)……である．計算手順と説明とプログラムのカード番号を次に示す．

プログラム－1の説明

| 手　　　　順 | 説　　明 | プログラム No. |
|---|---|---|
| $KK=f_0+\left(\frac{h}{2}\right)(f_x+Kf_y)$<br>$+\frac{1}{2!}\left(\frac{h}{2}\right)^2(f_{xx}+2Kf_{xy}+K^2f_{yy})$<br>$+\frac{1}{3!}\left(\frac{h}{2}\right)^3(f_{xxx}+3Kf_{xxy}+3K^2f_{xyy}+K^3f_{yyy})$<br>$+\frac{1}{4!}\left(\frac{h}{2}\right)^4(f_{xxxx}+4Kf_{xxxy}+6K^2f_{xxyy}$<br>$+4K^3f_{xyyy}+K^4f_{yyyy})$<br>を定義する． | (1.13)(1.17)(1.21)を代表して定義する． | 11 |
| $KG=f_0+\left(\frac{h}{2}\right)G_1+\left(\frac{h}{2}\right)^2G_2+\left(\frac{h}{2}\right)^3G_3+\left(\frac{h}{2}\right)^4G_4$<br>を定義する． | (1.14)(1.18)(1.22)を代表する． | 14 |

| | | |
|---|---|---|
| $k_2 \equiv$ KK2＝KK( K：$=f_0$ ) | (1.11) の $k_1$ を(1.13)に置きかえる． | 12 |
| $h$ の order に展開する． | | 13 |
| KG1＝KG( $G_i=p_i$ ) | (1.14) を作る． | 15 |
| $k_3 \equiv$ KK3＝KK( K：＝KG1 ) | (1.14) を (1.17) に入れる． | 16 |
| $h$ の order に展開する． | | 17 |
| KG1＝KG( $G_i := q_i$, $h := 2*h$ ) | (1.18) を作る． | 18 |
| $k_4$＝KK4＝KK( K：＝KG1 ) | (1.18) を(1.21) に入れる． | 19 |
| $h$ の order に展開する． | | 20 |
| KK2 の展開式で $\left(\frac{h}{2}\right)^i$ の係数をだしてこれを KP( $i$ ) とする． | (1.15) を作る． | 21 |
| KK3 の展開式で $(h)^i$ の係数をだし KQ( $i$ ) とする． | (1.19) を作る． | 22 |
| KK4 の展開式で $h^i$ の係数をだしこれを KR( $i$ ) とする． | (1.23) を作る． | 23 |
| $q_i$ の式の右辺にある $p_i$ :＝KP( $i$ ) | (1.19) の中の $p_i$ を追いだす． | 24 |
| $r_i$ の式の右辺にある $q_i$ :＝KQ( $i$ ) | (1.23) の中の $q_i$ を追いだす． | 26 |
| $i$＝1(1)4 に対して KP( $i$ ), KQ( $i$ ), KR( $i$ ) の印刷 | (1.25)(1.26) のプリント | 28 |
| KM(1)＝$f^{(1)}$<br>KM(2)＝$f^{(2)}$<br>KM(3)＝$f^{(3)}$<br>KM(4)＝$f^{(4)}$<br>を与える． | $f^{(i)}$<br>(9)式の値をそれぞれ KM( $i$ ) に与える． | 29 |
| $i$＝1(1)4 で<br>$S(i)=\frac{(i+1)!}{6}\{2(\frac{KP(i)}{2^i})+2KQ(i)+KR(i)\}$<br>の計算 | (1.27) の計算 | 31 |
| $i$＝1(1)4 で<br>G$\bar{\text{O}}$SA＝S( $i$ )$-f^{(i)}$ の印刷 | $i$＝1, 2, 3 では G$\bar{\text{O}}$SA＝0 となる． | 33 |

プログラム－2の説明

| 手　　　順 | 説　　明 | 番　号 |
|---|---|---|
| KM(1)，KM(2)，KM(3)，KM(4)をそれぞれ $f^{(1)}$，$f^{(2)}$，$f^{(3)}$，$f^{(4)}$ で与える. | (1.9)を与える. | 1 |
| | | 2 |
| | | 3 |
| | | 4 |
| | | 5 |
| KA2＝S(4)－$f^{(4)}$ | プログラム－1の結果を与える. | 7 |
| KA1＝$\varphi(x, y)*5!$<br>$=\{\frac{1}{2800} f^{(4)} - \frac{1}{576} f_y f^{(3)}$<br>$+\frac{1}{288}(f_y^2 - f_{xy} - f_{yy} f_0) f^{(2)}$<br>$+\frac{1}{192}(2 f_{xy} f_y + 3 f_{yy} f_y f_0 - 2 f_y^3$<br>$+ f_{yy} f_x) f^{(1)}\} * 120$<br>を与える. | EG$\overline{\mathrm{O}}$SAにKA1を展開した結果が入り，印刷される. | 6 |
| KA1とKA2のMATCHをとる. | | 8 |
| KA3＝KA2－KA1 | | 9 |
| KA3の印刷 | 0となる. | 10 |

（所要時間）

コンパイルと実行時間の合計が約10分　　プログラム－1

約　4分　　プログラム－2

問題－2.　不完全$\Gamma$関数の計算用の山内の展開式

（SUBST文の代用としてC$\bar{\text{O}}$EFF文を使用）

（問題の説明）

不完全$\Gamma$関数を次のようにかく．

$$P(x,m)=\int_x^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m)}\,a^{m-1}\,e^{-a}\,da$$

$m$と$x$を与えて（共に実数），$P(x,m)$を求めるための次の山内の式（講義ノート）をF$\bar{\text{O}}$RMACで導くことを試みた．

$$P=\int_x^{\infty}\frac{1}{\Gamma(m)}\,a^{m-1}\,e^{-a}\,da \qquad x>0,\ m>0 \tag{2.1}$$

$$t=(x-m)/\sqrt{m} \tag{2.2}$$

とおく．

$$P=\int_t^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\cdot\left\{\frac{1}{\sqrt{m}}\,\bar{I}_1+\frac{1}{m}\bar{I}_2+\frac{1}{m^{3/2}}\bar{I}_3+\cdots\cdots\right\} \tag{2.3}$$

ここで

$$\left.\begin{aligned}
\bar{I}_1&=\frac{1}{3}H_2=\frac{1}{3}(t^2-1)\\
\bar{I}_2&=\frac{1}{2\cdot3^2}H_5+\frac{1}{2^2}H_3\\
&=\frac{1}{2\cdot3^2}t^5-\frac{11}{2^2\cdot3^2}t^3+\frac{1}{2^2\cdot3}t\\
\bar{I}_3&=\frac{1}{2\cdot3^4}H_8+\frac{1}{2^2\cdot3}H_6+\frac{1}{5}H_4\\
&=\frac{1}{2\cdot3^4}t^8-\frac{29}{2^2\cdot3^4}t^6+\frac{13\ \ 3}{2^2\cdot3^3\cdot5}t^4-\frac{23}{2^2\cdot3^3\cdot5}t^2-\frac{1}{2^2\cdot3^3\cdot5}\\
\bar{I}_4&=\frac{1}{2^3\cdot3^5}t^{11}-\frac{7}{2\cdot3^5}t^9+\frac{463}{2^5\cdot3^2\cdot5}t^7-\frac{883}{2^5\cdot3^3\cdot5}t^5+\frac{23}{2^5\cdot3^3}t^3\\
&\qquad-\frac{1}{2^5\cdot3^2}t\\
\bar{I}_5&=\frac{1}{2^3\cdot3^6\cdot5}t^{14}-\frac{23}{2^2\cdot3^6\cdot5}t^{12}+\frac{881}{2^5\cdot3^5\cdot5}t^{10}-\frac{1507}{2^5\cdot3^4\cdot5}t^8\\
&\quad+\frac{7901}{2^4\cdot3^3\cdot7}t^6-\frac{61}{2^4\cdot3^3\cdot7}t^4+\frac{23}{2^5\cdot3^3\cdot7}t^2+\frac{25}{2^5\cdot3^3\cdot7}
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

（計算の方針）（講義ノートより）

$$P=\int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(m)}\,a^{m-1}\,e^{-a}\,da$$

$$=\int_{\frac{x-m}{\sqrt{m}}}^\infty \left\{\frac{1}{\Gamma(m)}(m+\sqrt{m}\,t)^{m-1}\,e^{-(m+\sqrt{m}\,t)}\,\sqrt{m}\right\}dt$$

$$\ln\frac{\sqrt{m}\,m^{m-1}}{\Gamma(m)}=(m-1)\ln m$$

$$-\left\{\frac{1}{2}\ln 2\pi+(m-\frac{1}{2})\ln m-m+\frac{B_1}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{m}-\frac{B_3}{3\cdot 4}\cdot\frac{1}{m^3}+\cdots\right\} \tag{2.5}$$

なので，

$$P=\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}t^2)\,dt\cdot I \tag{2.6}$$

$$\ln I=\frac{t^2}{2}-m-\sqrt{m}\,t+(m-1)\ln(1+\frac{t}{\sqrt{m}})+m-\frac{B_1}{1\cdot 2}\,\frac{1}{m}+\frac{B_3}{1\cdot 3}\,\frac{1}{m^3}+\cdots \tag{2.7}$$

ここで，$y=\frac{1}{\sqrt{m}}$ とおくと

$$\ln I=\sum_{i=1}^\infty y^i K_i \tag{2.8}$$

となる．ここで，$j=1,2,\cdots$ に対して

$$K_{2j-1}=(-)^{2j-1}\left(\frac{t^{2j-1}}{2j-1}-\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right) \tag{2.9}$$

$$K_{2j}=\begin{cases}(-)^{2j}\left(\frac{t^{2j}}{2j}-\frac{t^{2j+2}}{2j+2}-\frac{B_j}{(j+1)\cdot j}\right) & j=\mathrm{odd}\\ (-)^{2j}\left(\frac{t^{2j}}{2j}-\frac{t^{2j+2}}{2j+2}\right) & j=\mathrm{even}\end{cases} \tag{2.10}$$

で表わされる．$B_1=\frac{1}{6}$，$B_3=\frac{1}{30}$，$\cdots$ なる Bernōulli 数．

$$I=\sum_{i=0}^\infty y^i I_i \quad (I_0=1) \tag{2.11}$$

とおくと，

$$\sum_{i=0}^\infty y^i I_i=\exp\left(\sum_{i=1}^\infty y^i K_i\right)=I$$

の両辺を $y$ で微分して，両辺の $y^{n-1}$ の係数を求めると，

$$I_n=K_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{n}K_{n-i}I_i \tag{2.12}$$

なる漸化式が求められる．

また，$H_n(t)$をHermite多項式とすると次の公式が成立つ：

$$t^n=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} H_{n-2i}\binom{n}{2i}(2i-1)!! \qquad (2.13)$$

$$H_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-)^i\, t^{n-2i}\binom{n}{2i}(2i-1)!! \qquad (2.14)$$

$$H_m\cdot H_n=\sum_{i=0}^{\min(m,n)}{}' H_{m+n-2i}\; i!\binom{m}{i}\binom{n}{i} \qquad (2.15)$$

ただし

$$(2i-1)!!=\frac{(2i)!}{2^i\, i!}=(2i-1)(2i-3)\cdots\cdots 1$$

（計算手順）

i）（2.8）の$K_i$に（2.13）を用いて，

$$\left.\begin{aligned}
K_1&=\frac{1}{3}H_3\\
K_2&=-\left(\frac{1}{4}H_4+H_2+\frac{1}{3}H_0\right)\\
K_3&=\frac{1}{5}H_5+\frac{5}{3}H_3+2H_1\\
K_4&=-\left(\frac{1}{6}H_6+\frac{9}{4}H_4+6H_2+\frac{7}{4}H_0\right)\\
K_5&=\frac{1}{7}H_7+\frac{14}{5}H_5+13H_3+12H_1\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

と$K_i$をHermite多項式で表示する．

ii）（2.12）の山内の漸化式により

$$\begin{aligned}
I_1&=K_1=\frac{1}{3}H_3\\
I_2&=K_2+\frac{1}{2}K_1\,I_1=-H_2+\frac{1}{18}H_3^2-\frac{1}{4}H_2-\frac{1}{3}H_0\\
I_3&=K_3+\frac{2}{3}K_2\,I_1+\frac{1}{3}K_1\,I_2 \qquad (2.17)\\
&=-\frac{2}{9}H_2H_3-\frac{1}{36}H_3H_4+\frac{1}{162}H_3H_6+\frac{43}{27}H_3+\frac{1}{5}H_5+2H_1\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

と $I_n$ をHermite多項式で表示する.

iii) (2.15)を用いて $(H_m \cdot H_n)$ のような積の形式の項を $H_n$ だけの項の和に整理する:

$$I_2=\frac{1}{4}H_2+\frac{1}{36}H_6$$

$$I_3=\frac{1}{5}H_5+\frac{1}{2^2\cdot 3}H_7+\frac{1}{2\cdot 3^4}H_9 \qquad (2.18)$$

$$\cdots\cdots$$

山内氏は例によつて, $I_n=\sum_{i=0}^{n-1} A^n_{3n-2i}H_{3n-2i}$ なる一般式が成立つことを証明し,

$A^n_{3n-2i}$ の一般式を導いて完全なる計算のcheck方式で $I_9$ まで与えている.

iv) $\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})\,dt\cdot H_m(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})H_{m-1}(t)$

から

$$\int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})\,dt\cdot I_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{t^2}{2})\,\bar{I}_n$$

とおくと,

$$\left.\begin{aligned}
\bar{I}_1&=\frac{1}{3}H_2\\
\bar{I}_2&=\frac{1}{2^2}H_3+\frac{1}{2\cdot 3^2}H_5\\
\bar{I}_3&=\frac{1}{5}H_4+\frac{1}{2^2\cdot 3}H_6+\frac{1}{2\cdot 3^4}H_8\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

となる. (2.14)で $\bar{I}_i$ を $t$ のベキにもどしたのが(2.4)である.

(所要時間)

コンパイルと実行時間の合計で約6分.

(プログラム作成上の問題点)

計算手順の i), ii)は問題なかつたが, iii)で $H_m \cdot H_n$ なる変数に式を代入するSUBST文が使えないためCOEFF文を2回使用している.

$I_i$ の式の中にある $H_m \cdot H_n$ の積を和にかえるために, あらかじめ

$H_m \cdot H_n=\sum_{i=0}^{\min(m,n)} H_{m+n-2i}\; i!\binom{m}{i}\binom{n}{i}$ をKHH$(m, n)$に作つておく. ここで計算時間とメモリーを節約するため $n$ の最大$=(i-1)*3$, $m$ の最大$=i$ とした.(山内氏の結果を

見て決めたので一種のカンニングである.)

Const$*H_m*H_n$ の項は次のような方針で和の形になる：

```
DO 170  m=1, mmax
    KK1=I_i の式の中で H_m の係数(=const*H_n)
    DO      n=m, nmax
        KK2=KK1 の H_n の係数(=const)
        KK3=KHH(m, n)*KK2
        I_i=I_i-KK2*H_m*H_n+KK3
    CONTINUE
CONTINUE
```

たとえば(2.17)の$I_3$ の式の中には，$H_2 \cdot H_3$，$H_3 \cdot H_4$，$H_3 \cdot H_6$ の3種の項があるが，$m=1(1)3$に対して，$n=m(1)6$まで，$m$と$n$を15回DO ループで変えて積の項を探しあてて和におきかえることになる．直接にたとえば$H_2 \cdot H_3$ の項の2と3をindexにして置き換えが出来ない点が不便である．

（補 注） 不完全$\Gamma$関数の計算用には，山内のもう一つの近似式（講義ノート）がある：

$P(x, m)=\int_x^\infty \frac{1}{\Gamma(m)} a^{m-1} e^{-a} da$ で$m$と$x$を与えて，$P(x, m)$の計算には，

$t=\frac{x-m}{\sqrt{m}}$ として，

$$
\begin{aligned}
u=t&+\frac{1}{\sqrt{m}}\left(-\frac{t^2}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{m}\left(\frac{7}{2^2\cdot 3^2}t^3-\frac{1}{2^2\cdot 3^2}t\right)\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^3\left(-\frac{73}{2^2\cdot 3^3\cdot 5}t^4+\frac{7}{2\cdot 3^4\cdot 5}t^2+\frac{13}{2^2\cdot 3^4\cdot 5}\right)\\
&+\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^4\left(\frac{1331}{2^5\cdot 3^4\cdot 5}t^5-\frac{19}{2^2\cdot 3^5\cdot 5}t^3+\frac{119}{2^5\cdot 3^5\cdot 5}t\right)
\end{aligned}
$$

を計算し

$$P=\int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

から求める．

## 4. $\overline{\mathrm{FO}}$RMACの使用後の感想

(1) 式の結果を見易い形に整理するのが，Case by caseのため難しい．たとえば問題－1のRunge-Kutta法のprincipal error function $\varphi(x, y)$はHenriciの整理した式を与えて，これを展開し我々の結果とmatchするかどうかをtestした．

(2) $\overline{\mathrm{FO}}$RMACでは数値のわり算は，逆数のかけ算として取扱うとしても，印刷ではたとえば5*18**(－1)*Aよりは5／18*Aの方が見やすいし，coreの中でのword数も少くなると思う．

(3) 数式処理では，数値はinteger型で分数の係数で取扱うことが多いと思う．分母分子が素因数分解されて取扱えると10桁以上の数値のoverflowはある程度まで防げるが，使えるcoreメモリーのword数がoverflowするかも知れない．たとえば72$($はend mark)という整数を$2^3 \cdot 3^2$の形にすると2**3*3**2$となつて10 words必要となるからである．Userとしては，Case by caseに両方が任意に使えると便利であろう．

(4) SUBST文の中の変数がA*Bのような形の式まで許されると便利である．(A*AはA**2なのでうまくいく.)

## 附録ー1　問題ー1のプログラムとその結果

プログラムー1：$h^4$ の項までの打切誤差

プログラムー2：$h^5$ の項の打切誤差

プログラムー1

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR                                                    NO.
      $IBFMC DIFF12  NODECK
            SYMARG
            INTEGER F0,H,P1,P2,P3,P4                                            1
            INTEGER Q1,Q2,Q3,Q4
            INTEGER G1,G2,G3,G4                                                 2
            INTEGER F1X,F1Y,F2X,F1X1Y,F2Y
            INTEGER F3X,F2X1Y,F1X2Y,F3Y                                         3
            INTEGER F4X,F3X1Y,F2X2Y,F1X3Y,F4Y
            LOGICAL RR                                                          4
            ATOMIC K2,K3,F0,H
            ATOMIC P1,P2,P3,P4                                                  5
            ATOMIC Q1,Q2,Q3,Q4
            ATOMIC F1X,F1Y,F2X,F1X1Y,F2Y                                        6
            ATOMIC F3X,F2X1Y,F1X2Y,F3Y
            ATOMIC F4X,F3X1Y,F2X2Y,F1X3Y                                        7
            ATOMIC F4Y
            ATOMIC K,G1,G2,G3,G4                                                8
            DIMENSION MBUF(21),KP(4),KQ(4),KR(4)
            DIMENSION KM(4)                                                     9
            WRITE (6,1)
          1 FORMAT (1H1)                                                        10
            LET KK =F0+1/2*H*(F1X+K*F1Y)+1/2*(H/2)**2*(F2X+2*K*F1X1Y
          1         +K**2*F2Y)+1/6*(H/2)**3*(F3X+3*K*F2X1Y+3*K**2*F1X2Y         11
          2         +K**3*F3Y)+1/24*(H/2)**4*(F4X+4*K*F3X1Y+6*K**2*F2X2Y
          3         +4*K**3*F1X3Y+K**4*F4Y)
            LET KK2=SUBST KK,(K,F0)                                             12
            LET KA1=EXPAND KK2
            LET KK2=ORDER KA1,INC,FUL,(H)                                       13
            LET KG =F0+G1*H/2+G2*(H/2)**2+G3*(H/2)**3+G4*(H/2)**4               14
            LET KG1=SUBST KG,(G1,P1),(G2,P2),(G3,P3),(G4,P4)                    15
            LET KA1=SUBST KK,(K,KG1)                                            16
            LET KK3=EXPAND KA1
            LET KK3=ORDER KK3,INC,FUL,(H)                                       17
            LET KG1=SUBST KG,(G1,Q1),(G2,Q2),(G3,Q3),(G4,Q4)                    18
            LET KA1=SUBST KK,(K,KG1),(H,2*H)                                    19
            LET KK4=EXPAND KA1
            LET KK4=ORDER KK4,INC,FUL,(H)                                       20
            II=1
            DO 10 I=1,4
            LET KP(II) = COEFF KK2,H**II,R
            LET KP(II)=2**II*KP(II)                                             21
            LET KQ(II) = COEFF KK3,H**II,R                                      22
            LET KR(II) = COEFF KK4,H**II,R                                      23
            II=II+1
         10 CONTINUE
            DO 30 I=1,4
            II=I
            LET KA1=SUBST KQ(II),(P1,KP(1)),(P2,KP(2)),(P3,KP(3)),(P4,KP(4))    24
            LET KQ(II)=EXPAND KA1                                               25
         30 CONTINUE
            DO 40 I=1,4
```

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
          II=I
          LET KA1=SUBST KR(II),(Q1,KQ(1)),(Q2,KQ(2)),(Q3,KQ(3)),(Q4,KQ(4))     26
          LET KR(II)=EXPAND KA1                                                 27
       40 CONTINUE
          CALL OUT(KP,KQ,KR)                                                    28
          LET KM(1)=F1X+F0*F1Y
          LET KM(2)=F2X+2*F1X1Y*F0+F2Y*F0**2+(F1X+F0*F1Y)*F1Y                   29
          LET KM(2)=EXPAND KM(2)
          LET KM(3)=F3X+3*F0*F2X1Y+3*F0**2*F1X2Y+F0**3*F3Y
         1          +(3*F1X1Y+3*F2Y*F0)*G1+F1Y*G2
          LET KK4=SUBST KM(3),(G1,KM(1)),(G2,KM(2))
          LET KM(3)=EXPAND KK4
          LET KM(4)=F4X+4*F3X1Y*F0+6*F2X2Y*F0**2+4*F1X3Y*F0**3+F4Y*F0**4
         1         +6*(F2X1Y+2*F1X2Y*F0+F3Y*F0**2)*G1
         2          +4*(F1X1Y+F2Y*F0)*G2+3*F2Y*G1**2+F1Y*G3
          LET KK4=SUBST KM(4),(G1,KM(1)),(G2,KM(2)),(G3,KM(3))
          LET KM(4)=EXPAND KK4                                                  30
          DO 70 I=1,4
          II=I
          LET KA1=1/6*FMCFAC(II+1)*(2*KP(II)/(2**II)+2*KQ(II)+KR(II))          31
          LET KA2=EXPAND KA1
          LET KA2=ORDER KA2,INC,FUL,(F0)                                        32
          Q=0.
          LET Q=BCDCON KA2,MBUF,21                                              33
          WRITE (6,2) II,(MBUF(J),J=2,21)
       50 IF ( Q .EQ. 0. ) GO TO 60
          LET Q=BCDCON KA2,MBUF,21
          WRITE (6,3) (MBUF(J),J=2,21)
        2 FORMAT( 1H0, 2HS(,I1,3H)= ,20A6)
        3 FORMAT( 1H0, 6X, 20A6)
          GO TO 50
       60 CONTINUE
          LET RR=MATCH ID,KA2,KM(II)
          IF (RR) GO TO 70
          LET KK4=KA2-KM(II)
          CALL OUT1(KK4, 6HGOSA =)
       70 CONTINUE
          STOP
          END
```

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
      $IBFMC PRNT     NODECK
          SUBROUTINE OUT(KPP,KPQ,KPR)
          DIMENSION BUF(21),KPP(4),KPQ(4),KPR(4)
          SYMARG KPP,KPQ,KPR
          DO 110 I=1,4
          II=I
          LET KA1=KPP(II)
          L=1
          GO TO 50
       10 LET KA1=KPQ(II)
          L=2
          GO TO 50
       20 LET KA1=KPR(II)
          L=3
          GO TO 50
       50 Q=0.
          LET Q=BCDCON KA1,BUF,21
          GO TO (60,70,80),L
       60 WRITE (6,1) II,(BUF(J),J=2,21)
        1 FORMAT( 1H0, 2HP(,I1,3H)= ,20A6)
          GO TO 90
       70 WRITE (6,2) II,(BUF(J),J=2,21)
        2 FORMAT( 1H0, 2HQ(,I1,3H)= ,20A6)
          GO TO 90
       80 WRITE(6,3) II,(BUF(J),J=2,21)
        3 FORMAT( 1H0, 2HR(,I1,3H)= ,20A6)
       90 IF ( Q .EQ. 0. ) GO TO 100
          LET Q=BCDCON KA1,BUF,21
          WRITE (6,4) (BUF(J),J=2,21)
        4 FORMAT( 1H0, 6X, 20A6)
          GO TO 90
      100 GO TO (10,20,110)    ,L
      110 CONTINUE
          RETURN
          END
```

プリント用サブルーチン

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
      $IBFMC PRNT1    NODECK
          SUBROUTINE OUT1(KPK,NME)
          DIMENSION BUF(21)
          SYMARG KPK
          Q=0.
          LET Q=BCDCON KPK,BUF,21
          WRITE (6,1) NME,(BUF(M),M=2,21)
        1 FORMAT( 1H0, 21A6)
       10 IF ( Q .EQ. 0. ) GO TO 20
          LET Q=BCDCON KPK ,BUF,21
          WRITE (6,2) (BUF(M),M=2,21)
        2 FORMAT( 1H0, 6X, 20A6)
          GO TO 10
       20 CONTINUE
          RETURN
          END
```

プリント用サブルーチン

プログラム-1 の output

```
P(1)=  (F0*F1Y*2**(-1)+F1X*2**(-1))*2$
Q(1)=  F0*F1Y*2**(-1)+F1X*2**(-1)$
R(1)=  F0*F1Y+F1X$
P(2)=  (F0*F1X1Y*4**(-1)+F0**2*F2Y*8**(-1)+F2X*8**(-1))*4$
Q(2)=  F0*F1X1Y*4**(-1)+F0*F1Y**2*4**(-1)+F0**2*F2Y*8**(-1)+F1X*F1Y*4**(-1)+F2X*8**(-1)$
R(2)=  F0*F1X1Y+F0*F1Y**2*2**(-1)+F0**2*F2Y*2**(-1)+F1X*F1Y*2**(-1)+F2X*2**(-1)$
P(3)=  (F0*F2X1Y*16**(-1)+F0**2*F1X2Y*16**(-1)+F0**3*F3Y*48**(-1)+F3X*48**(-1))*8$
Q(3)=  F0*F1X*F2Y*8**(-1)+F0*F1X1Y*F1Y*4**(-1)+F0*F2X1Y*16**(-1)+F0**2*F1X2Y*16**(-1)+F0**2*F1Y*F2Y*3*16**(-1)+F0**3*F3Y*48**(
       -1)+F1X*F1X1Y*8**(-1)+F1Y*F2X*16**(-1)+F3X*48**(-1)$
R(3)=  F0*F1X*F2Y*2**(-1)+F0*F1X1Y*F1Y*3*4**(-1)+F0*F1Y**3*4**(-1)+F0*F2X1Y*2**(-1)+F0**2*F1X2Y*2**(-1)+F0**2*F1Y*F2Y*5*8**(-1)
       +F0**3*F3Y*6**(-1)+F1X*F1X1Y*2**(-1)+F1X*F1Y**2*4**(-1)+F1Y*F2X*8**(-1)+F3X*6**(-1)$
P(4)=  (F0*F3X1Y*96**(-1)+F0**2*F2X2Y*64**(-1)+F0**3*F1X3Y*96**(-1)+F0**4*F4Y*384**(-1)+F4X*384**(-1))*16$
Q(4)=  F0*F1X*F1X2Y*16**(-1)+F0*F1X*F1Y*F2Y*16**(-1)+F0*F1X1Y**2*16**(-1)+F0*F1Y*F2X1Y*16**(-1)+F0*F2X*F2Y*32**(-1)+F0*F3X1Y*96
       **(-1)+F0**2*F1X*F3Y*32**(-1)+F0**2*F1X1Y*F2Y*3*32**(-1)+F0**2*F1X2Y*F1Y*3*32**(-1)+F0**2*F1Y**2*F2Y*32**(-1)+F0**2*
       F2X2Y*64**(-1)+F0**3*F1X3Y*96**(-1)+F0**3*F1Y*F3Y*24**(-1)+F0**3*F2Y**2*32**(-1)+F0**4*F4Y*384**(-1)+F1X*F2X1Y*32**(-1)+
       F1X**2*F2Y*32**(-1)+F1X1Y*F2X*32**(-1)+F1Y*F3X*96**(-1)+F4X*384**(-1)$
R(4)=  F0*F1X*F1X2Y*2**(-1)+F0*F1X*F1Y*F2Y*5*8**(-1)+F0*F1X1Y*F1Y**2*2**(-1)+F0*F1X1Y**2*4**(-1)+F0*F1Y*F2X1Y*5*16**(-1)+F0*F2X
       *F2Y*8**(-1)+F0*F3X1Y*6**(-1)+F0**2*F1X*F3Y*4**(-1)+F0**2*F1X1Y*F2Y*3*8**(-1)+F0**2*F1X2Y*F1Y*9*16**(-1)+F0**2*F1Y**2*
       F2Y*9*16**(-1)+F0**2*F2X2Y*4**(-1)+F0**3*F1X3Y*6**(-1)+F0**3*F1Y*F3Y*13*48**(-1)+F0**3*F2Y**2*8**(-1)+F0**4*F4Y*24**(-1)
       +F1X*F1X1Y*F1Y*3*8**(-1)+F1X*F2X1Y*4**(-1)+F1X**2*F2Y*8**(-1)+F1X1Y*F2X*8**(-1)+F1Y*F3X*48**(-1)+F1Y**2*F2X*16**(-1)+F4X
       *24**(-1)$
S(1)=  F1X+F0*F1Y$
GOSA =0$
S(2)=  F1X*F1Y+F2X+2*F0*F1X1Y+F0*F1Y**2+F0**2*F2Y$
GOSA =0$
S(3)=  3*F1X*F1X1Y+F1X*F1Y**2+F1Y*F2X+F3X+3*F0*F1X*F2Y+5*F0*F1X1Y*F1Y+F0*F1Y**3+3*F0*F2X1Y+3*F0**2*F1X2Y+4*F0**2*F1Y*F2Y+F0**3*
       F3Y$
GOSA =0$
S(4)=  15*2**(-1)*F1X*F1X1Y*F1Y+25*4**(-1)*F1X*F2X1Y+15*4**(-1)*F1X**2*F2Y+15*4**(-1)*F1X1Y*F2X+5*6**(-1)*F1Y*F3X+5*4**(-1)*F1Y
       **2*F2X+25*24**(-1)*F4X+25*2**(-1)*F0*F1X*F1X2Y+15*F0*F1X*F1Y*F2Y+10*F0*F1X1Y*F1Y**2+15*2**(-1)*F0*F1X1Y**2+35*4**(-1)*
       F0*F1Y*F2X1Y+15*4**(-1)*F0*F2X*F2Y+25*6**(-1)*F0*F3X1Y+25*4**(-1)*F0**2*F1X*F3Y+45*4**(-1)*F0**2*F1X1Y*F2Y+15*F0**2*
       F1X2Y*F1Y+25*2**(-1)*F0**2*F1Y**2*F2Y+25*4**(-1)*F0**2*F2X2Y+25*6**(-1)*F0**3*F1X3Y+85*12**(-1)*F0**3*F1Y*F3Y+15*4**(-1)
       *F0**3*F2Y**2+25*24**(-1)*F0**4*F4Y$
GOSA =F0*F1X*F1X2Y*2**(-1)+F0*F1X*F1Y*F2Y*2+F0*F1X1Y*F1Y**2+F0*F1X1Y**2*(-2**(-1))+F0*F1Y*F2X1Y*(-4**(-1))-F0*F1Y**4+F0*F2X*
       F2Y*(-4**(-1))+F0*F3X1Y*6**(-1)+F0**2*F1X*F3Y*4**(-1)+F0**2*F1X1Y*F2Y*(-3)*4**(-1)+F0**2*F1Y**2*F2Y*3*2**(-1)+F0**2*
       F2X2Y*4**(-1)+F0**3*F1X3Y*6**(-1)+F0**3*F1Y*F3Y*12**(-1)+F0**3*F2Y**2*(-4**(-1))+F0**4*F4Y*24**(-1)+F1X*F1X1Y*F1Y*2**(-1
       )-F1X*F1Y**3+F1X*F2X1Y*4**(-1)+F1X**2*F2Y*3*4**(-1)+F1X1Y*F2X*(-4**(-1))+F1Y*F3X*(-6**(-1))+F1Y**2*F2X*4**(-1)+F4X*24**(
       -1)$
```

$$= 5!\left\{\frac{1}{2880}f^{(4)}-\frac{1}{576}f_y f^{(3)}+\frac{1}{288}\left(f_y^2-f_{xy}-f_{yy}f_0\right)f^{(2)}+\frac{1}{192}\left(2f_{xy}f_y+3f_{yy}f_yf_0-2f_y^3+f_{yy}f_x\right)f^{(1)}\right\}=5!\,\varphi(x,y)$$

となる筈のものである。

プログラム－2

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR                                                        No.
      $IBFMC DIFF12  NODECK
            SYMARG
            INTEGER  F0,H,P1,P2,P3,P4
            INTEGER  Q1,Q2,Q3,Q4
            INTEGER  G1,G2,G3,G4
            INTEGER  F1X,F1Y,F2X,F1X1Y,F2Y
            INTEGER  F3X,F2X1Y,F1X2Y,F3Y
            INTEGER  F4X,F3X1Y,F2X2Y,F1X3Y,F4Y
            LOGICAL  RR
            ATOMIC  K2,K3,F0,H
            ATOMIC  P1,P2,P3,P4
            ATOMIC  Q1,Q2,Q3,Q4
            ATOMIC  F1X,F1Y,F2X,F1X1Y,F2Y
            ATOMIC  F3X,F2X1Y,F1X2Y,F3Y
            ATOMIC  F4X,F3X1Y,F2X2Y,F1X3Y
            ATOMIC  F4Y
            ATOMIC  K,G1,G2,G3,G4
            DIMENSION MBUF(21),KP(4),KQ(4),KR(4)
            DIMENSION KM(4)
            WRITE (6,1)
          1 FORMAT (1H1)
            LET KM(1)=F1X+F0*F1Y                                                     1
            LET KM(2)=F2X+2*F1X1Y*F0+F2Y*F0**2+(F1X+F0*F1Y)*F1Y                      2
            LET KM(2)=EXPAND KM(2)
            LET KM(3)=F3X+3*F0*F2X1Y+3*F0**2*F1X2Y+F0**3*F3Y                         3
           1           +(3*F1X1Y+3*F2Y*F0)*G1+F1Y*G2
            LET KK4=SUBST KM(3),(G1,KM(1)),(G2,KM(2))                                4
            LET KM(3)=EXPAND KK4
            LET KM(4)=F4X+4*F3X1Y*F0+6*F2X2Y*F0**2+4*F1X3Y*F0**3+F4Y*F0**4           5
           1          +6*(F2X1Y+2*F1X2Y*F0+F3Y*F0**2)*G1
           2           +4*(F1X1Y+F2Y*F0)*G2+3*F2Y*G1**2+F1Y*G3
            LET KK4=SUBST KM(4),(G1,KM(1)),(G2,KM(2)),(G3,KM(3))
            LET KM(4)=EXPAND KK4
            LET KA1=120*(G4/2880-F1Y*G3/576+                                         6
           1               (F1Y**2-F1X1Y-F2Y*F0)*G2/288
           2              +(2*F1X1Y*F1Y+3*F2Y*F1Y*F0-2*F1Y**3+F2Y*F1X)*G1/192)
            LET KK4=SUBST KA1,(G1,KM(1)),(G2,KM(2)),(G3,KM(3)),(G4,KM(4))
            LET KA1=EXPAND KK4
            LET KA1=ORDER KA1,INC,FUL,(F0)
            CALL OUT1(KA1,6HEGOSA =)
            LET KA2=F0*F1X*F1X2Y*2**(-1)+F0*F1X*F1Y*F2Y*2+F0*F1X1Y*F1Y**2            7
           1    +F0*F1X1Y**2*(-2**(-1))+F0*F1Y*F2X1Y*(-4**(-1))-F0*F1Y**4
           2+F0*F2X*F2Y*(-4**(-1))+F0*F3X1Y*6**(-1)+F0**2*F1X*F3Y*4**(-1)
           3    +F0**2*F1X1Y*F2Y*(-3)*4**(-1)+F0**2*F1Y**2*F2Y*3*2**(-1)
           4    +F0**2*F2X2Y*4**(-1)+F0**3*F1X3Y*6**(-1)+F0**3*F1Y*F3Y*12
           5    **(-1)+F0**3*F2Y**2*(-4**(-1))+F0**4*F4Y*24**(-1)+F1X*F1X1Y
           6    *F1Y*2**(-1)-F1X*F1Y**3+F1X*F2X1Y*4**(-1)+F1X**2*F2Y*3*4**
           7    (-1)+F1X1Y*F2X*(-4**(-1))+F1Y*F3X*(-6**(-1))+F1Y**2*F2X*4**(-1)
           8    +F4X*24**(-1)
            LET RR=MATCH ID,KA2,KA1                                                  8
            IF (RR) GO TO 70
```

プログラム－2　のつづき

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR                                                         9
            LET KA3=KA2-KA1
            CALL OUT1(KA3,6HGOSA =)                                                  10
         70 CONTINUE
            STOP
            END
```

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
      $IBFMC PRNT1    NODECK
            SUBROUTINE OUT1(KPK,NME)
            DIMENSION BUF(21)
            SYMARG KPK
            Q=0.
            LET Q=BCDCON KPK,BUF,21
            WRITE (6,1) NME,(BUF(M),M=2,21)
          1 FORMAT( 1H0, 21A6)
         10 IF ( Q .EQ. 0. ) GO TO 20
            LET Q=BCDCON KPK ,BUF,21
            WRITE (6,2) (BUF(M),M=2,21)
          2 FORMAT( 1H0, 6X, 20A6)
            GO TO 10
         20 CONTINUE
            RETURN
            END
```

プリント用 サブルーチン

プログラム-2 の output

```
EGOSA=2**(-1)*F1X*F1X1Y*F1Y-F1X*F1Y**3+4**(-1)*F1X*F2X1Y+3*4**(-1)*F1X**2*F2Y-4**(-1)*F1X1Y*F2X-6**(-1)*F1Y*F3X+4**(-1)*F1Y**2
      *F2X+24**(-1)*F4X+2**(-1)*F0*F1X*F1X2Y+2-F0*F1X*F1Y*F2Y+F0*F1X1Y*F1Y**2-2**(-1)*F0*F1X1Y**2-4**(-1)*F0*F1Y*F2X1Y-F0*F1Y
      **4-4**(-1)*F0*F2X*F2Y+6**(-1)*F0*F3X1Y+4**(-1)*F0**2*F1X*F3Y-3*4**(-1)*F0**2*F1X1Y*F2Y+3*2**(-1)*F0**2*F1Y**2*F2Y+4**(
      -1)*F0**2*F2X2Y+6**(-1)*F0**3*F1X3Y+12**(-1)*F0**3*F1Y*F3Y-4**(-1)*F0**3*F2Y**2+24**(-1)*F0**4*F4Y$
GOSA =0$
```

EGOSA = 5! $\varphi(x,y)$ の展開されたもの

附録－2　問題－2のプログラムとその結果

プログラム－3

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
        $IBFMC CALI     NODECK
              SYMARG
              ATOMIC H(24),T
              INTEGER H,T
              DIMENSION KT(12),K(10),KI(10),KTH(21),KHH(6,18)
C                *T* NO KEISAN
              WRITE (6,1)
            1 FORMAT( 1H1)
              DO   40 N=2,12
              NN=N/2
              N1=N
              LET KT(N1)=H(N1)
              DO   30   I=1,NN
              I1=I
              NI=N1-2*I1
              IF ( NI .EQ. 0 )  GO TO 20
           10 LET KT(N1)=KT(N1)+H(NI)*FMCOMB(N1,2*I1)*FMCDFC(2*I1-1)
              GO TO 30
           20 LET KT(N1)=KT(N1)+FMCOMB(N1,2*I1)*FMCDFC(2*I1-1)
           30 CONTINUE
              CALL OUT2(KT(N1),6H      T,N1)
           40 CONTINUE
              LET KT(1)=H(1)
C                *K* NO KEISAN
              WRITE (6,1)
              IC=1
              DO 60   I=1,10
              I1=I
              IF(  IC  .EQ.  1 ) GO  TO  50
              IC=1
              GO TO 55
           50 IC=-1
           55 CONTINUE
              LET K(I1)=IC*(KT(I1)/I1-KT(I1+2)/(I1+2))
           60 CONTINUE
              LET K(2)=K(2)-1/12
              LET K(6)=K(6)+1/360
              LET K(10)=K(10)-1/1260
              DO 70   I=1,10
              I1=I
              LET KK1=EXPAND K(I1)
              LET K(I1)=ORDER KK1,INC,FUL,(H)
              CALL OUT2(K(I),6H      K,I)
           70 CONTINUE
C                ** H(M)*H(N)  NO KEISAN **
              WRITE (6,1)
              DO 160 MM=1,6
              MM1=MM
              DO 160 NN=MM,18
              NN1=NN
              LET KH=H(MM1+NN1)
```

(2.13)

(2.11)

~~(2.10)~~

(2.15)

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
          DO 130 I=1,MM
          I1=I
          IF( MM+NN-2*I ) 110,110,120
     110 LET <H=KH+FMCFAC(I1)*FMCOMB(MM1,I1)*FMCOMB(NN1,I1)
          GO TO 130
     120 LET <H=KH+H(MM1+NN1-2*I)*FMCFAC(I1)*FMCOMB(MM1,I1)*FMCOMB(NN1,I1)
     130 CONTINUE
          LET <HH(MM1,NN1)=EXPAND KH
          IX=100*MM+NN
          CALL OUT2(KH,6H      HH,IX)
     160 CONTINUE
          DO 300 I=1,12
          I1=I
          ERASE KT(I1)
     300 CONTINUE
C           *I* NO <EISAN
          WRITE (6,1)
          LET KI(1)=K(1)
          DO 180 N=2,7
          WRITE (6,2)
       2 FORMAT( 1H0)
          N1=N
          LET KI(N1)=K(N1)
          N3=N-1
          DO 100 I=1,N3
          I1=I
          LET KI(N1)=KI(N1)+(N1-I1)/N1*K(N1-I1)*KI(I1)
     100 CONTINUE
          LET <K1=EXPAND KI(N1)
          LET <I(N1)=ORDER KK1,INC,FUL,(H)
          CALL OUT2(KI(N1),6H      I,N1)
          IF ( N .EQ. 2 ) GO TO 320
          N5=(N-1)*3
          IF ( N .EQ. 7 ) GO TO 310
          M5=N
          GO TO 330
     310 M5=6
          GO TO 330
     320 N5=3
          M5=3
     330 CONTINUE
          DO 170 MM=1,M5
          MM1=MM
          LET <K1=COEFF KI(N1),H(MM1),R
          IF ( MM .GT. 3 ) GO TO 350
          NN5=N5
          GO TO 360
     350 NN5=NN5-3
     360 CONTINUE
          DO 170 NN=MM,NN5
          NN1=NN
```

(2.12)

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
          IF (NN .EQ. MM )  GO TO 140
          LET KK2=COEFF KK1,H(NN1),R
          GO TO 150
      140 LET KK2=COEFF KI(N1),H(NN1)**2,R
      150 LET KK3=KHH(MM1,NN1)*KK2
          LET KI(N1)=KI(N1)-KK2*H(MM1)*H(NN1)+KK3
      170 CONTINUE
          LET KI(N1)=EXPAND KI(N1)
          LET KI(N1)=ORDER KI(N1),INC,FUL,(H)
          CALL OUT2(KI(N1),6H LASTI,N)
      180 CONTINUE
C             *H* NO KEISAN
          DO 250 M=1,9
          M1=M
          DO 250 N=1,9
          N1=N
          ERASE KHH(M1,N1)
      250 CONTINUE
          WRITE (6,1)
          LET KTH(1)=T
          DO 220 N=2,21
          NN=N/2
          N1=N
          LET KH=T**N1
          DO 210 I=1,NN
          I1=I
          NI=N1-2*I1
          LET KH=KH+(-1)**I1*T**NI*FMCOMB(N1,2*I1)*FMCDFC(2*I1-1)
      210 CONTINUE
          LET KK1=EXPAND KH
          LET KTH(N1)=ORDER KK1,INC,FUL,(T)
          CALL OUT2(KTH(N1),6H      H,N1)
      220 CONTINUE
          WRITE (6,1)
          DO 190 N=2,7
          N1=N
          LET KH=KI(N1)
          M=N*3
          DO 400 I=2,M
          I1=I
          LET KH=SUBST KH,(H(I1),H(I1-1))
      400 CONTINUE
          CALL OUT2(KH,6H I-BAR,N1)
          DO 175 I=1,M
          I1=I
          LET KH=SUBST KH,(H(I1),KTH(I1))
          LET KH=EXPAND  KH
      175 CONTINUE
          LET KH=ORDER KH,INC,FUL,(T)
          CALL OUT2(KH,6HI-BART,N1)
      190 CONTINUE
```

(2.14)

```
INPUT TO FORMAC PREPROCESSOR
      $IBFMC PRNT2    NODECK
              SUBROUTINE OUT2(KTT,NME,KN)
              DIMENSION BUF(20)
              SYMARG KTT,KN
              Q=0.
              LET Q=BCDCON KTT,BUF,20
              WRITE (6,1) NME,KN,(BUF(M),M=2,20)
            1 FORMAT(1H0,A6,1H(,I3,3H)= ,19A6)
           10 IF ( Q .EQ. 0. ) GO TO 20
              LET Q=BCDCON KTT,BUF,20
              WRITE (6,2) (BUF(M),M=2,20)
            2 FORMAT(1H0,13X,19A6)
              GO TO 10
           20 CONTINUE
              RETURN
              END
```

プリント用サブルーチン

```
T(  2)= H(2)+1$
T(  3)= H(1)*3+H(3)$
T(  4)= H(2)*6+H(4)+3$
T(  5)= H(1)*15+H(3)*10+H(5)$
T(  6)= H(2)*45+H(4)*15+H(6)+15$
T(  7)= H(1)*105+H(3)*105+H(5)*21+H(7)$
T(  8)= H(2)*420+H(4)*210+H(6)*28+H(8)+105$
T(  9)= H(1)*945+H(3)*1260+H(5)*378+H(7)*36+H(9)$
T( 10)= H(2)*4725+H(4)*3150+H(6)*630+H(8)*45+H(10)+945$
T( 11)= H(1)*10395+H(3)*17325+H(5)*6930+H(7)*990+H(9)*55+H(11)$
T( 12)= H(2)*62370+H(4)*51975+H(6)*13860+H(8)*1485+H(10)*66+H(12)+10395$
```

$$t^n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} H_{n-2i} \binom{n}{2i}(2i-1)!!$$

```
K(  1)= 3**(-1)*H(3)$
K(  2)= -H(2)-4**(-1)*H(4)-3**(-1)$
K(  3)= 5*3**(-1)*H(3)+5**(-1)*H(5)+2*H(1)$
K(  4)= -6*H(2)-9*4**(-1)*H(4)-6**(-1)*H(6)-7*4**(-1)$
K(  5)= 13*H(3)+14*5**(-1)*H(5)+7**(-1)*H(7)+12*H(1)$
K(  6)= -45*H(2)-95*4**(-1)*H(4)-10*3**(-1)*H(6)-8**(-1)*H(8)-478*45**(-1)$
K(  7)= 125*H(3)+39*H(5)+27*7**(-1)*H(7)+9**(-1)*H(9)+90*H(1)$
K(  8)= -420*H(2)-1155*4**(-1)*H(4)-119*2**(-1)*H(6)-35*8**(-1)*H(8)-10**(-1)*H(10)-651*8**(-1)$
K(  9)= 1435*H(3)+588*H(5)+86*H(7)+44*9**(-1)*H(9)+11**(-1)*H(11)+840*H(1)$
K( 10)= -4725*H(2)-16065*4**(-1)*H(4)-1092*H(6)-477*4**(-1)*H(8)-27*5**(-1)*H(10)-12**(-1)*H(12)-486203*630**(-1)$
```

HH(101)= H(2)+1$ $( H_1 \cdot H_1 = H_2 + 1 )$

HH(102)= H(1)*2+H(3)$ $H_1 \cdot H_2 = 2H_1 + H_3$

HH(103)= H(2)*3+H(4)$

HH(104)= H(3)*4+H(5)$

HH(105)= H(4)*5+H(6)$

HH(106)= H(5)*6+H(7)$

HH(107)= H(6)*7+H(8)$

HH(108)= H(7)*8+H(9)$

HH(109)= H(8)*9+H(10)$

HH(110)= H(9)*10+H(11)$ $H_1 \cdot H_{10} = 10 H_9 + H_{11}$

HH(111)= H(10)*11+H(12)$

HH(112)= H(11)*12+H(13)$

HH(113)= H(12)*13+H(14)$

HH(114)= H(13)*14+H(15)$

HH(115)= H(14)*15+H(16)$

HH(116)= H(15)*16+H(17)$

HH(117)= H(16)*17+H(18)$

HH(118)= H(17)*18+H(19)$ $H_1 \cdot H_{18} = 18 H_{17} + H_{19}$

HH(202)= H(2)*4+H(4)+2$ $H_2 \cdot H_2 = 4H_2 + H_4 + 2$

HH(203)= H(1)*6+H(3)*6+H(5)$

HH(204)= H(2)*12+H(4)*8+H(6)$

HH(205)= H(3)*20+H(5)*10+H(7)$

HH(206)= H(4)*30+H(6)*12+H(8)$

HH(207)= H(5)*42+H(7)*14+H(9)$

HH(208)= H(6)*56+H(8)*16+H(10)$

HH(209)= H(7)*72+H(9)*18+H(11)$

HH(210)= H(8)*90+H(10)*20+H(12)$

HH(211)= H(9)*110+H(11)*22+H(13)$

HH(212)= H(10)*132+H(12)*24+H(14)$

HH(213)= H(11)*156+H(13)*26+H(15)$

HH(214)= H(12)*182+H(14)*28+H(16)$

HH(215)= H(13)*210+H(15)*30+H(17)$

HH(216)= H(14)*240+H(16)*32+H(18)$

HH(217)= H(15)*272+H(17)*34+H(19)$

HH(218)= H(16)*306+H(18)*36+H(20)$

HH(303)= H(2)*18+H(4)*9+H(6)+6$

HH(304)= H(1)*24+H(3)*36+H(5)*12+H(7)$

HH(305)= H(2)*60+H(4)*60+H(6)*15+H(8)$

HH(306)= H(3)*120+H(5)*90+H(7)*18+H(9)$

HH(307)= H(4)*210+H(6)*126+H(8)*21+H(10)$

HH(308)= H(5)*336+H(7)*168+H(9)*24+H(11)$

HH(309)= H(6)*504+H(8)*216+H(10)*27+H(12)$

HH(310)= H(7)*720+H(9)*270+H(11)*30+H(13)$

HH(311)= H(8)*990+H(10)*330+H(12)*33+H(14)$

HH(312)= H(9)*1320+H(11)*396+H(13)*36+H(15)$

HH(313)= H(10)*1716+H(12)*468+H(14)*39+H(16)$

HH(314)= H(11)*2184+H(13)*546+H(15)*42+H(17)$

HH(315)= H(12)*2730+H(14)*630+H(16)*45+H(18)$

HH(316)= H(13)*3360+H(15)*720+H(17)*48+H(19)$

```
HH(317)=  H(14)*4080+H(16)*816+H(18)*51+H(20)$
HH(318)=  H(15)*4896+H(17)*918+H(19)*54+H(21)$
HH(404)=  H(2)*96+H(4)*72+H(6)*16+H(8)+24$
HH(405)=  H(1)*120+H(3)*240+H(5)*120+H(7)*20+H(9)$
HH(406)=  H(2)*360+H(4)*480+H(6)*180+H(8)*24+H(10)$
HH(407)=  H(3)*840+H(5)*840+H(7)*252+H(9)*28+H(11)$
HH(408)=  H(4)*1680+H(6)*1344+H(8)*336+H(10)*32+H(12)$
HH(409)=  H(5)*3024+H(7)*2016+H(9)*432+H(11)*36+H(13)$
HH(410)=  H(6)*5040+H(8)*2880+H(10)*540+H(12)*40+H(14)$
HH(411)=  H(7)*7920+H(9)*3960+H(11)*660+H(13)*44+H(15)$
HH(412)=  H(8)*11880+H(10)*5280+H(12)*792+H(14)*48+H(16)$
HH(413)=  H(9)*17160+H(11)*6864+H(13)*936+H(15)*52+H(17)$
HH(414)=  H(10)*24024+H(12)*8736+H(14)*1092+H(16)*56+H(18)$
HH(415)=  H(11)*32760+H(13)*10920+H(15)*1260+H(17)*60+H(19)$
HH(416)=  H(12)*43680+H(14)*13440+H(16)*1440+H(18)*64+H(20)$
HH(417)=  H(13)*57120+H(15)*16320+H(17)*1632+H(19)*68+H(21)$
HH(418)=  H(14)*73440+H(16)*19584+H(18)*1836+H(20)*72+H(22)$
HH(505)=  H(2)*600+H(4)*600+H(6)*200+H(8)*25+H(10)+120$
HH(506)=  H(1)*720+H(3)*1800+H(5)*1200+H(7)*300+H(9)*30+H(11)$
HH(507)=  H(2)*2520+H(4)*4200+H(6)*2100+H(8)*420+H(10)*35+H(12)$
HH(508)=  H(3)*6720+H(5)*8400+H(7)*3360+H(9)*560+H(11)*40+H(13)$
HH(509)=  H(4)*15120+H(6)*15120+H(8)*5040+H(10)*720+H(12)*45+H(14)$
HH(510)=  H(5)*30240+H(7)*25200+H(9)*7200+H(11)*900+H(13)*50+H(15)$
HH(511)=  H(6)*55440+H(8)*39600+H(10)*9900+H(12)*1100+H(14)*55+H(16)$
HH(512)=  H(7)*95040+H(9)*59400+H(11)*13200+H(13)*1320+H(15)*60+H(17)$
HH(513)=  H(8)*154440+H(10)*85800+H(12)*17160+H(14)*1560+H(16)*65+H(18)$
HH(514)=  H(9)*240240+H(11)*120120+H(13)*21840+H(15)*1820+H(17)*70+H(19)$
HH(515)=  H(10)*360360+H(12)*163800+H(14)*27300+H(16)*2100+H(18)*75+H(20)$
HH(516)=  H(11)*524160+H(13)*218400+H(15)*33600+H(17)*2400+H(19)*80+H(21)$
HH(517)=  H(12)*742560+H(14)*285600+H(16)*40800+H(18)*2720+H(20)*85+H(22)$
HH(518)=  H(13)*1028160+H(15)*367200+H(17)*48960+H(19)*3060+H(21)*90+H(23)$
HH(606)=  H(2)*4320+H(4)*5400+H(6)*2400+H(8)*450+H(10)*36+H(12)+720$
HH(607)=  H(1)*5040+H(3)*15120+H(5)*12600+H(7)*4200+H(9)*630+H(11)*42+H(13)$
HH(608)=  H(2)*20160+H(4)*40320+H(6)*25200+H(8)*6720+H(10)*840+H(12)*48+H(14)$
HH(609)=  H(3)*60480+H(5)*90720+H(7)*45360+H(9)*10080+H(11)*1080+H(13)*54+H(15)$
HH(610)=  H(4)*151200+H(6)*181440+H(8)*75600+H(10)*14400+H(12)*1350+H(14)*60+H(16)$
HH(611)=  H(5)*332640+H(7)*332640+H(9)*118800+H(11)*19800+H(13)*1650+H(15)*66+H(17)$
HH(612)=  H(6)*665280+H(8)*570240+H(10)*178200+H(12)*26400+H(14)*1980+H(16)*72+H(18)$
HH(613)=  H(7)*1235520+H(9)*926640+H(11)*257400+H(13)*34320+H(15)*2340+H(17)*78+H(19)$
HH(614)=  H(8)*2162160+H(10)*1441440+H(12)*360360+H(14)*43680+H(16)*2730+H(18)*84+H(20)$
HH(615)=  H(9)*3603600+H(11)*2162160+H(13)*491400+H(15)*54600+H(17)*3150+H(19)*90+H(21)$
HH(616)=  H(10)*5765760+H(12)*3144960+H(14)*655200+H(16)*67200+H(18)*3600+H(20)*96+H(22)$
HH(617)=  H(11)*8910720+H(13)*4455360+H(15)*856800+H(17)*81600+H(19)*4080+H(21)*102+H(23)$
HH(618)=  H(12)*13366080+H(14)*6168960+H(16)*1101600+H(18)*97920+H(20)*4590+H(22)*108+H(24)$
```

$$H_m \cdot H_n = \sum_{i=0}^{\min(m,n)} H_{m+n-2i} \cdot i!\binom{m}{i}\binom{n}{i}$$

```
    I(  2)=  -H(2)+18**(-1)*H(3)**2-4**(-1)*H(4)-3**(-1)$
LASTI(  2)=  4**(-1)*H(4)+18**(-1)*H(6)$

    I(  3)=  -2*9**(-1)*H(2)*H(3)-36**(-1)*H(3)*H(4)+162**(-1)*H(3)*H(6)+43*27**(-1)*H(3)+5**(-1)*H(5)+2*H(1)$
LASTI(  3)=  5**(-1)*H(5)+12**(-1)*H(7)+162**(-1)*H(9)$

    I(  4)=  -8**(-1)*H(2)*H(4)-36**(-1)*H(2)*H(6)-6*H(2)+15**(-1)*H(3)*H(5)+144**(-1)*H(3)*H(7)+1944**(-1)*H(3)*H(9)+5*12**(-1
             )*H(3)**2-144**(-1)*H(4)*H(6)-55*24**(-1)*H(4)-32**(-1)*H(4)**2-19*108**(-1)*H(6)-7*4**(-1)+2**(-1)*H(1)*H(3)$
LASTI(  4)=  6**(-1)*H(6)+47*480**(-1)*H(8)+72**(-1)*H(10)+1944**(-1)*H(12)$

    I(  5)=  -8*5**(-1)*H(2)*H(3)-2*25**(-1)*H(2)*H(5)-30**(-1)*H(2)*H(7)-405**(-1)*H(2)*H(9)-7*20**(-1)*H(3)*H(4)+45**(-1)*H(3
             )*H(6)+47*7200**(-1)*H(3)*H(8)+1080**(-1)*H(3)*H(10)+29160**(-1)*H(3)*H(12)+188*15**(-1)*H(3)+100**(-1)*H(4)*H(5)-
             120**(-1)*H(4)*H(7)-1620**(-1)*H(4)*H(9)+150**(-1)*H(5)*H(6)+208*75**(-1)*H(5)+83*630**(-1)*H(7)-1215**(-1)*H(9)+3
             *10**(-1)*H(1)*H(4)+15**(-1)*H(1)*H(6)+12*H(1)$
LASTI(  5)=  7**(-1)*H(7)+19*180**(-1)*H(9)+31*1440**(-1)*H(11)+648**(-1)*H(13)+29160**(-1)*H(15)$

    I(  6)=  -H(2)*H(4)-5*18**(-1)*H(2)*H(6)-47*1440**(-1)*H(2)*H(8)-216**(-1)*H(2)*H(10)-5832**(-1)*H(2)*H(12)-45*H(2)+17*18**
             (-1)*H(3)*H(5)+59*504**(-1)*H(3)*H(7)+107*9720**(-1)*H(3)*H(9)+31*25920**(-1)*H(3)*H(11)+11664**(-1)*H(3)*H(13)+
             52488)**(-1)*H(3)*H(15)+65*18**(-1)*H(3)**2-8**(-1)*H(4)*H(6)-47*5760**(-1)*H(4)*H(8)-864**(-1)*H(4)*H(10)-23328**
             (-1)*H(4)*H(12)-577*24**(-1)*H(4)-3*8**(-1)*H(4)**2+120**(-1)*H(5)*H(7)+1620**(-1)*H(5)*H(9)+50**(-1)*H(5)**2-41*
             12**(-1)*H(6)-162**(-1)*H(6)**2-587*4320**(-1)*H(8)-648**(-1)*H(10)-17496**(-1)*H(12)-478*45**(-1)+10*3**(-1)*H(1)
             *H(3)+5**(-1)*H(1)*H(5)+12**(-1)*H(1)*H(7)+162**(-1)*H(1)*H(9)$
LASTI(  6)=  8**(-1)*H(8)+153*1400**(-1)*H(10)+493*17280**(-1)*H(12)+77*25920**(-1)*H(14)+7775**(-1)*H(16)+524880**(-1)*H(18)$

    I(  7)=  -90*7**(-1)*H(2)*H(3)-24*35**(-1)*H(2)*H(5)-16*49**(-1)*H(2)*H(7)-97*1890**(-1)*H(2)*H(9)-31*5040**(-1)*H(2)*H(11)
             -2268**(-1)*H(2)*H(13)-102060**(-1)*H(2)*H(15)-125*28**(-1)*H(3)*H(4)-20*63**(-1)*H(3)*H(6)+9*224**(-1)*H(3)*H(8)+
             667*44100**(-1)*H(3)*H(10)+1879*1088640**(-1)*H(3)*H(12)+11*77760**(-1)*H(3)*H(14)+163296**(-1)*H(3)*H(16)+
             11022480**(-1)*H(3)*H(18)+38419*315**(-1)*H(3)+17*70**(-1)*H(4)*H(5)-9*98**(-1)*H(4)*H(7)-13*840**(-1)*H(4)*H(9)-
             31*20160**(-1)*H(4)*H(11)-9072**(-1)*H(4)*H(13)-408240**(-1)*H(4)*H(15)+67*630**(-1)*H(5)*H(6)+47*5600**(-1)*H(5)*
             H(8)+840**(-1)*H(5)*H(10)+22680**(-1)*H(5)*H(12)+194*5**(-1)*H(5)-441**(-1)*H(6)*H(7)-1701**(-1)*H(6)*H(9)+737*196
             **(-1)*H(7)+269*2835**(-1)*H(9)-31*15120**(-1)*H(11)-6804**(-1)*H(13)-306180**(-1)*H(15)+15*7**(-1)*H(1)*H(4)+13*
             21**(-1)*H(1)*H(6)+47*560**(-1)*H(1)*H(8)+84**(-1)*H(1)*H(10)+2268**(-1)*H(1)*H(12)+90*H(1)$
LASTI(  7)=  9**(-1)*H(9)+31*280**(-1)*H(11)+1751*50400**(-1)*H(13)+727*155520**(-1)*H(15)+23*77760**(-1)*H(17)+116640**(-1)*H(
             19)+11022480**(-1)*H(21)$
```

$I_n = K_n + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{n} K_{n-i} I_i$ により計算　(2.17)と(2.18)の結果に相当する

```
H(  2)= -1+T**2$
H(  3)= -3*T+T**3$
H(  4)= 3-6*T**2+T**4$
H(  5)= 15*T-10*T**3+T**5$
H(  6)= -15+45*T**2-15*T**4+T**6$
H(  7)= -105*T+105*T**3-21*T**5+T**7$
H(  8)= 105-420*T**2+210*T**4-28*T**6+T**8$
H(  9)= 945*T-1260*T**3+378*T**5-36*T**7+T**9$
H( 10)= -945+4725*T**2-3150*T**4+630*T**6-45*T**8+T**10$
H( 11)= -10395*T+17325*T**3-6930*T**5+990*T**7-55*T**9+T**11$
H( 12)= 10395-62370*T**2+51975*T**4-13860*T**6+1485*T**8-66*T**10+T**12$
H( 13)= 135135*T-270270*T**3+135135*T**5-25740*T**7+2145*T**9-78*T**11+T**13$
H( 14)= -135135+945945*T**2-945945*T**4+315315*T**6-45045*T**8+3003*T**10-91*T**12+T**14$
H( 15)= -2027025*T+4729725*T**3-2837835*T**5+675675*T**7-75075*T**9+4095*T**11-105*T**13+T**15$
H( 16)= 2027025-16216200*T**2+18918900*T**4-7567560*T**6+1351350*T**8-120120*T**10+5460*T**12-120*T**14+T**16$
H( 17)= 34459425*T-91891800*T**3+64324260*T**5-18378360*T**7+2552550*T**9-185640*T**11+7140*T**13-136*T**15+T**17$
H( 18)= -34459425+310134825*T**2-413513100*T**4+192972780*T**6-41351310*T**8+4594590*T**10-278460*T**12+9180*T**14-153*T**
        16+T**18$
H( 19)= -654729075*T+1964187225*T**3-1571349780*T**5+523783260*T**7-87297210*T**9+7936110*T**11-406980*T**13+11628*T**15-
        171*T**17+T**19$
H( 20)= 654729075-6547290750*T**2+9820936125*T**4-5237832600*T**6+1309458150*T**8-174594420*T**10+13226850*T**12-581400*T
        **14+14535*T**16-190*T**18+T**20$
H( 21)= 13749310575*T-1330*T**3+20349*T**5-15713497800*T**7+3055402350*T**9-333316620*T**11+21366450*T**13-813960*T**15+
        17955*T**17-210*T**19+T**21$
```

$$H_n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i t^{n-2i} \binom{n}{2i} (2i-1)!!$$

```
  I-BAR(  2)= H(3)*4**(-1)+H(5)*18**(-1)$
I-BART(  2)= 12**(-1)*T-11*36**(-1)*T**3+18**(-1)*T**5$
  I-BAR(  3)= H(4)*5**(-1)+H(6)*12**(-1)+H(8)*162**(-1)$
I-BART(  3)= -540**(-1)-23*540**(-1)*T**2+133*540**(-1)*T**4-29*324**(-1)*T**6+162**(-1)*T**8$
  I-BAR(  4)= H(5)*6**(-1)+H(7)*47*480**(-1)+H(9)*72**(-1)+H(11)*1944**(-1)$
I-BART(  4)= -288**(-1)*T+23*864**(-1)*T**3-883*4320**(-1)*T**5+463*4320**(-1)*T**7-7*486**(-1)*T**9+1944**(-1)*T**11$
  I-BAR(  5)= H(6)*7**(-1)+H(8)*19*180**(-1)+H(10)*31*1440**(-1)+H(12)*648**(-1)+H(14)*29160**(-1)$
I-BART(  5)= 25*6048**(-1)+23*6048**(-1)*T**2-61*3024**(-1)*T**4+7901*45360**(-1)*T**6-1507*12960**(-1)*T**8+881*38880**(-1)*T
             **10-23*14580**(-1)*T**12+29160**(-1)*T**14$
  I-BAR(  6)= H(7)*8**(-1)+H(9)*153*1400**(-1)+H(11)*493*17280**(-1)+H(13)*77*25920**(-1)+H(15)*7776**(-1)+H(17)*524880**(-1)$
I-BART(  6)= -139*51840**(-1)*T-319*155520**(-1)*T**3+3239*194400**(-1)*T**5-413177*2721600**(-1)*T**7+5910101*48988800**(-1)*T
             **9-42331*1399680**(-1)*T**11+2149*699840**(-1)*T**13-137*1049760**(-1)*T**15+524880**(-1)*T**17$
  I-BAR(  7)= H(8)*9**(-1)+H(10)*31*280**(-1)+H(12)*1751*50400**(-1)+H(14)*727*155520**(-1)+H(16)*23*77760**(-1)+H(18)*116640**(
             -1)+H(20)*11022480**(-1)$
I-BART(  7)= 101*155520**(-1)+259*155520**(-1)*T**2+11*10368**(-1)*T**4-2203*155520**(-1)*T**6+146611*1088640**(-1)*T**8-
             1996859*16329600**(-1)*T**10+1810717*48988800**(-1)*T**12-47639*9797760**(-1)*T**14+1483*4898880**(-1)*T**16-191*
             22044960**(-1)*T**18+11022480**(-1)*T**20$
```

最終結果 山外氏の(2.4)に相当する

本 PDF ファイルは 1968 年発行の「第 9 回プログラミング―シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の捜索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者捜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思います。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日 〜 2021 年 3 月 19 日
掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程
https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html