

Yama Nim と Wythoff バリエーションについて

木村 俊一^{1,2,a)} 山下 貴央^{1,3,b)}

概要: Yama Nim は、2 人目の筆者の修士論文で初めて紹介された 2 山 Nim の一種で、一方の山から 2 個以上の石を取り、もう一方の山に 1 個の石を戻すゲームである。Triangular Nim はその一般化であり、一方の山から 2 個以上の石を取り、全体として石が減るようにもう一方の山に少なくとも 1 つ以上戻してよいと拡張した石取りゲームである。本論文では、これらのゲームの必勝戦略、グランディ数、及び Wythoff バリエーションについて報告する。特に興味深いのは Triangular Nim の Wythoff バリエーションであり、Triangular Nim の着手に加え、 i と j の制限の下で、プレイヤーが両方の山から石を取ることが許される、例えば i 個の石を一方の山から、 j 個の石をもう一方の山から取ることができる。例えば、Triangular Nim で $i = j > 0$ としたとき、局面 (x, y) の必勝局面は、 $x \geq y$ として、 $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (3, 6), (6, 10), (10, 15), \dots\}$ すなわち、連続した三角数である。他のバリエーションでは、四角数、五角数、べき乗数、メルセンヌ数で記述できる例も見つかった。

Yama Nim and Wythoff variations

SHUN-ICHI KIMURA^{1,2,a)} TAKAHIRO YAMASHITA^{1,3,b)}

Abstract: Yama Nim is a two heaps Nim game introduced in the second author's Master Thesis, where the player takes more than 2 tokens from one heap, and return 1 token to the other heap. Triangular Nim is a generalization, where the player takes several tokens from one heap, and return some tokens (at least one token) to the other heap, so that the total number of the tokens in the heaps decrease strictly. In this paper, we investigate their winning strategies, Grundy numbers, and Wythoff variations. Particularly interesting is the Wythoff variations, where in addition to the Triangular Nim moves, the player is allowed to take tokens from both heaps, say i tokens from the first heap and j tokens from the other, under some restrictions for i and j . For example when we force $i = j > 0$ for the Triangular Nim, then $(x, y) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $x \leq y$ is in the $\mathcal{P}$ -position if and only if $(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 10), (10, 15), \dots\}$, namely the winning strategy is described by triangular numbers. In other rulesets, we also found examples where the square numbers, pentagonal numbers, geometric progressions, Mersenne numbers, and so on.

1. はじめに

Nim とは山がいくつかあり、それぞれの山に石がいくつか配置され、2 人のプレイヤーが交互に着手して石の個数を減らしていく石取りゲームの総称であり、正規形では

最後に石を取った方が勝ちとなる。このゲームのどの局面も、先手に必勝戦略があるか後手に必勝戦略があるか、どちらか一方であり、その判別ができれば、後手必勝の局面にして相手に手番をまわすことが必勝戦略となる。特に 2 山の正規形の必勝法は「自分の手番で 2 つの山の石の数を同数個にすること」が必勝戦略であることが知られている。Wythoff Nim は Nim の着手に「両方の山から石を同数個取る」着手を加えた石取りゲームである。2 つの山の石の個数を同数にする通常の Nim の必勝法を使おうとすると、残りの石を全て取られて負けてしまうように工夫した、と考えることもできる。Wythoff Nim の必勝法は黄金比を用いた美しい数学で記述できることが知られている。

¹ 広島大学

Hiroshima University

² partially supported by JSPS Kakenhi 20K03514, 23K03071, 20H01798

³ partially supported by JST, the establishment of university fellowships towards the creation of science technology innovation, Grant Number JPMJFS2129

a) skimura@hiroshima-u.ac.jp

b) d236676@hiroshima-u.ac.jp

Yama Nim は 2 番目の筆者の修士論文で初めて提案されたゲーム、Triangular Nim はその一般化である。いずれのゲームでも一度の着手で 1 つの山から 2 個以上石を取り、取らなかった方の山に石を 1 個 (以上) 戻す、という特徴がある。本研究では、まずどちらのゲームでも必勝法は「自分の手番で 2 つの山の石の数の差を 1 個以下にすること」であることを示し、さらにこれらのゲームのグランディ数を記述する。

次に Triangular Nim に対して、Wythoff Nim タイプのバリエーションを考える。すなわち本来の着手に加えて「両方の山からそれぞれ 1 個以上で同じ個数の石を取る」着手も許すと、 $\mathcal{P}$ -position が $\{(0, 0), (0, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 10), (10, 15), \dots\}$, すなわち連続する三角数、(およびその成分を入れ替えたもの) となることがわかった。さらに「両方の山からそれぞれ 1 個以上取る場合は、取る石の個数の差が 1 個以下まで良い」とすると、 $\mathcal{P}$ -position が $\{(0, 0), (0, 1), (1, 5), (5, 12), (12, 22), \dots\}$ (およびその成分を入れ替えたもの) があらわれる。その他のルールでも冪乗数が出てきたりメルセンヌ数が出てきたりするので、それらについて報告する。

2. 本論文で使用する用語の説明

本論文では特にことわらない限り 2 人のプレイヤーの 2 山の不偏石取りゲーム、局面集合を $M = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ であらわし、 $f: M \rightarrow \text{pow}(M)$ は着手写像、つまり局面 $m \in M$ に対し、 m でとりうる着手結果全体がなす集合 $f(m) \subset M$ を対応させる写像とする。勝敗は正規形で決めるものとする、すなわち最後に着手ができなくなったプレイヤーが負けである。局面 $m \in M$ が終了局面であるとは、 $f(m) = \emptyset$ となることである。先手が必勝戦略をもつ局面を $\mathcal{N}$ -position、逆に後手が必勝戦略をもつ局面を $\mathcal{P}$ -position と呼ぶ。 $\mathcal{P}$ -position は「良形」とも呼ばれる。 $m = (x, y)$ に対し、石の個数を $x + y$ を $|m|$ あらわす。本論文では、任意の $m' \in f(m)$ に対し、 $|m'| < |m|$ が成り立つことを仮定する、すなわち着手のたびに山の石の個数が減り、必ず有限回でゲームが終了する。各局面 $m \in M$ に対し、グランディ数が定義される。[Siegel13] [一] [佐]

3. Yama Nim と Triangular Nim

Yama Nim は二人目の筆者の修士論文で初めて提案されたゲームであり、Triangular Nim はその一般化である。いずれも石を取ったあと、その一部をもう一方の山に戻す、という特徴がある。この章では Yama Nim と Triangular Nim の必勝法とグランディ数について述べる。

定義 3.1. Yama Nim とは、

$$f(x, y) = \{(x - i, y + 1) \mid 2 \leq i \leq x\} \\ \cup \{(x + 1, y - i) \mid 2 \leq i \leq y\}$$

となるゲームである、つまり一度の着手で 1 つの山から 2 個以上石を取り、取らなかった方の山に石を 1 個戻す石取りゲームである。

定義 3.2. Triangular Nim とは、

$$f(x, y) = \{(x - i, y + j) \mid 2 \leq i \leq x, 1 \leq j < i\} \\ \cup \{(x + 1, y - i) \mid 2 \leq i \leq y, 1 \leq j < i\}$$

となるゲームである、つまり Yama Nim の着手の戻す石の個数を 1 個以上も許す、ただし全体として石が減るようにする、と拡張した石取りゲームである。

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0							○	□	□
1							○	□	
2							○		
3									
4						●			
5	○	○	○	○					
6	□	□	□						
7	□	□							
8	□								

図 1: 局面 (4, 5) (黒丸部分) における Yama Nim と Triangular Nim の着手可能な局面。白丸が Yama Nim と Triangular Nim 両方で着手可能、白四角が Triangular Nim のみで着手可能な局面。

定理 3.3. Yama Nim 及び Triangular Nim の $\mathcal{P}$ -position の集合は $S = \{(x, y) \in M \mid |x - y| \leq 1\}$ である。また、Yama Nim のグランディ数 $g(x, y)$ は

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & ((x, y) \in S) \\ \min(x, y) + 1 & ((x, y) \notin S) \end{cases}$$

である。

Proof. まず、 S が Yama Nim 及び Triangular Nim の $\mathcal{P}$ -position の集合であることを示す。任意の $(x, y) \in M$ をとる。次の (1), (2) を示せば良い。

- (1) $(x, y) \in S$ から、どう着手しても S の元にはできない。
- (2) $(x, y) \notin S$ ならば、うまく着手して S の元に行ける。

(1) であることを示す。任意の $(x, y) \in S$ を取ると、一般性を失わず、 x から $a \geq 2$ 個石を取り、 y に $b \geq 1$ 個石を戻す場合を考えれば、 $|(x - a) - (y + b)| = |(x - y) - (a + b)| \geq |a + b| - |x - y| \geq 3 - 1 = 2$ である。よって、 $(x - a, y + b)$ は S の元でない。

(2)であることを示す。任意の $(x, y) \notin S$ を取る。一般性を失わず、 $x \geq y+2$ としてよい。 x から $(x-y)$ 個石を取り、 y に石を1個戻せば、一度の着手で $(y, y+1) \in S$ にできる。以上 (1),(2) より、 S は Yama Nim 及び Triangular Nim の $\mathcal{P}$ -position の集合全体である。

次に、Yama Nim のグランディ数の式を示す。石の個数における帰納法で示す。対称性より、 $x > y$ としてよい。石の個数が1個の局面は全て S の元なのでグランディ数は0である。石の個数が k 個以下の時は成り立つと仮定して、石の個数が $k+1$ 個の局面 $(x, y) \in M$ について考える。 $(x, y) \in S$ ならば、グランディ数は0である。 $(x, y) \notin S$ とすると、 $x \geq y+2$ である。 (x, y) の着手結果全体がなす集合 $f(x, y)$ は $f(x, y) = \{(x-i, y+1) \in M \mid 2 \leq i\} \cup \{(x+1, y-i) \in M \mid 2 \leq i\}$ である。帰納法の仮定より、集合 $\{(x-i, y+1) \in M \mid 2 \leq i\}$ のグランディ数の集合は $\{0, 1, 2, \dots, y-1, y\}$ が必ずあらわれ、 $x \geq y+5$ なら $y+2$ もあらわれる。また、集合 $\{(x+1, y-i) \in M \mid 2 \leq i\}$ のグランディ数の集合は $\{1, 2, \dots, y-2, y-1\}$ である。よって、局面 (x, y) のグランディ数は $\text{mex}\{0, 1, 2, \dots, y-1, y\}$ または $\text{mex}\{0, 1, 2, \dots, y-1, y, y+2\}$ であり、いずれも $y+1$ となるので、帰納法が成立した。□

定理 3.4. 局面 $m = (x, y)$ において、 $d = |x-y|$ を2つの山の石の個数の差を表す値とする。 m における Triangular Nim のグランディ数 $g(m)$ は

- (1) $d \leq 1$ なら $g(m) = 0$
- (2) $d \geq 2$ かつ $|m| \leq d^2 + 1$ なら $g(m) = |m| - 1$
- (3) $d \geq 2$ かつ $|m| \geq d^2 + 2$ なら整数 $\frac{x+y-(d^2+2)}{2}$ を

d で割った余りを ℓ とするとき、 $g(m) = \frac{d(d-1)}{2} + \ell$

この定理は以下の別の定理に言い換えることができる。別定理を述べるための準備として、次を定義する。

定義 3.5. 任意の $g \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、 $\frac{d(d-1)}{2} \leq g < \frac{d(d+1)}{2}$ を満たす非負整数 d をとる。このとき、初項 $1+g$ 、公差 d の等差数列 $a_{g,k} = 1+g+kd$ (ただし、 $k = 0, 1, 2, \dots$) をとる。

定理 3.6. Triangular Nim において、 $x = y$ の時、局面 (x, y) のグランディ数は0である。そうでない場合は $g(x, y) = g(y, x)$ なので、一般性を失わず、 $x < y$ として、次のように表される。

$$g(x, y) = \begin{cases} g & \left(\begin{array}{l} (x, y) = (a_{g,k}, a_{g,k+1}) \\ (g, k \geq 0) \end{array} \right) \\ x+y-1 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

表 1: Triangular Nim のグランディ数

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	0	0	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	0	0	0	1	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	2	3	0	0	0	2	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
4	3	4	1	0	0	0	1	3	11	12	13	14	15	16	17	18
5	4	5	6	2	0	0	0	2	4	13	14	15	16	17	18	19
6	5	6	7	8	1	0	0	0	1	5	15	16	17	18	19	20
7	6	7	8	9	3	2	0	0	0	2	3	6	18	19	20	21
8	7	8	9	10	11	4	1	0	0	0	1	4	7	20	21	22
9	8	9	10	11	12	13	5	2	0	0	0	2	5	8	22	23
10	9	10	11	12	13	14	15	3	1	0	0	0	1	3	9	24
11	10	11	12	13	14	15	16	6	4	2	0	0	0	2	4	6
12	11	12	13	14	15	16	17	18	7	5	1	0	0	0	1	5
13	12	13	14	15	16	17	18	19	20	8	3	2	0	0	0	2
14	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	9	4	1	0	0	0
15	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	6	5	2	0	0

Proof. $(x, y) \in S$ のとき、定理 3.3 よりグランディ数は0であり、かつ上記の式に当てはまることが簡単に確認できる。

$(x, y) \notin S$ のときについて考える。 $g \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し、

$$T_g = \left\{ (x, y) \in M \mid \begin{array}{l} d \geq 2 \\ |m| = g+1 \\ |m| \leq d^2 + 1 \end{array} \right\}$$

$$U_g = \{(a_{g,k}, a_{g,k+1}), (a_{g,k+1}, a_{g,k}) \in M \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

として、 $S_g = T_g \cup U_g$ とする。ここで、定理 3.4 と定理 3.6 が同値であることは、次の補題から従う。

補題 3.7. 次の2つが成り立つ。

- (i) $|m| \leq d^2 + 1$ なら、公差が d となるどの数列 $a_{g,*}$ に対しても $x < a_{g,0}$ となり、 (x, y) は $(a_{g,k}, a_{g,k+1})$ に等しくはなり得ない。
- (ii) $|m| \geq d^2 + 2$ であり、 $|m| \geq d^2 + 2$ なら、定理 3.4(3) で求めた g に対し、ある k をとれば $(x, y) = (a_{g,k}, a_{g,k+1})$ が成り立つ。

Proof of 補題 3.7. $y = x+d$ に注意すると $x+y \leq d^2+1$ ならば $2x \leq d^2-d+1$ となり、 d^2-d+1 は奇数なので $x \leq \frac{d(d-1)}{2}$ が従う。 $a_{g,*}$ の公差が d となる g は $\frac{d(d-1)}{2} \leq g$ を満たすので、 $x \leq \frac{d(d-1)}{2} < g+1 = a_{g,0}$ である。逆に $|m| \geq d^2+2$ のとき、 $\frac{x+y-(d^2+2)}{2} = dk+\ell$ とおくと $x = a_{g,k}, y = a_{g,k+1}$ となることが計算で確かめられる。□

次に、以下の2つが成り立つことを示す。

- (1) 任意の $m \in S_g$ に対し、どの着手 $m' \in f(m)$ をとっても、 $m' \notin S_g$ である。
- (2) 任意の $m \in S_g$ に対し、 $1 \leq h < g$ を満たすどの非負整

数 h をとって、 $m' \in S_h$ となる着手 m' が存在する。

(1) であることを示す。任意の $m \in S_g$ をとる。仮定より、 $m \in T_g$ の場合は $x, y \leq g+1$ であり、 $m \in U_g$ の場合は $x, y \geq g+1$ である。よって、どのように着手しても、一方の山の石の個数が減り、もう一方の山の石の個数が増えるので、1 度の着手で T_g の元から U_g の元及び、 U_g の元から T_g の元に移ることはない。次に一度の着手で T_g の元から T_g の元に移ることは、石の個数が減ることに反するのでありえない。最後に $(x, y) \in U_g$ からどう着手しても U_g の元にならないことを示す。対称性より $x < y$ としてよい。 $(x, y) = (a_{g,k}, a_{g,k+1})$ から一度の着手で $(a_{g,\ell}, a_{g,n}) \in U_g$ (ただし、 $|\ell - n| = 1$) にできると仮定して、矛盾を導く。 $x' < x$ かつ $y < y'$ の場合は、 $l < k < k+1 < n$ であるので、 $|\ell - n| > 1$ となり、矛盾。 $x' < x$ かつ $y < y'$ の場合は、 $(x', y') = (a_{g,\ell}, a_{g,n}) \in U_g$ となりうるのは、 $l = k+1$ かつ $n = k$ の場合のみだが、石の個数が減らないので、そのような着手は許されない。よって、 $(x, y) \in U_g$ からどう着手しても U_g の元にならない。

(2) であることを示す。任意の $(x, y) \in S_g$ をとる。対称性より、 $x+1 < y$ としてよい。 $1 \leq h < g$ を満たす任意の非負整数 h をとる。まず、 $x \leq h$ の場合、一度の着手で (x, y) から $(h+1, 0) \in T_h$ にすることができるので、 $h+1 \leq x$ であると仮定する。 $1+h = ah, 0$ なので、ある非負整数 k が存在して、 $a_{h,k} \leq x < a_{h,k+1}$ となる。 $x+y > a_{h,k+1} + a_{h,k}$ の場合は、一度の着手で (x, y) から $(a_{h,k+1}, a_{h,k})$ にすることができる。一方、 $x+y \leq a_{h,k+1} + a_{h,k}$ の場合、 $y \leq a_{h,k+1} - (x - a_{h,k})$ より、 $a_{h,k} \leq x < y \leq a_{h,k+1}$ である。よって、 $d = y - x \leq a_{h,k+1} - a_{h,k} = e$ (ただし、 e は $\frac{e(e-1)}{2} \leq h < \frac{e(e+1)}{2}$ を満たす)。一方、 $h < g$ より、 $e \leq d$ だが、これは $x = a_{h,k}$ 、 $y = a_{h,k+1}$ を意味し、 $(x, y) \in S$ となり、矛盾。□

4. Triangular Nim の Wythoff バリエーション

2 山 Nim では 2 つの山の石の個数が同じ時に $\mathcal{P}$ -position となる。Wythoff Nim はさらに両方の山から同じ個数の石を取ることでその必勝法が使えなくなったわけだが、それにより必勝法に非常に面白い記述があらわれる。Yama Nim と Triangular Nim も似た $\mathcal{P}$ -position があらわれるので、Wythoff-type のバリエーションを考えてみたところ、特に Triangular Nim の Wythoff バリエーションで面白い結果が得られたので報告する。

定義 4.1. 非負整数 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取る。Triangular Nim の c -Wythoff twist とは、

$$f(x, y) = \{(x-i, y+j) \mid 2 \leq i \leq x, 1 \leq j < i\}$$

$$\cup \{(x+j, y-i) \mid 2 \leq i \leq y, 1 \leq j < i\}$$

$$\cup \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq x, 1 \leq j \leq y, |i-j| \leq c\}$$

であること、つまり、Triangular Nim の着手に加え、両方から取る石の個数の差が c 個以下ならば両方の山から最低 1 個以上何個とっても良いという着手を許す石取りゲームである。

局面 $a \in M$ から $b \in \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq x, 1 \leq j \leq y, |i-j| \leq c\}$ へ着手を行うことを a から b へ c -Wythoff で着手を行うと呼ぶ。

$\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	□	□	□				○	○	○
1		□	□	□			○	○	
2			□	□	□		○		
3				□	□				
4						●			
5	○	○	○	○					
6	○	○	○						
7	○	○							
8	○								

図 2: 局面 (5, 4) (黒丸部分) における Triangular Nim の 1-Wythoff twist の着手可能な局面。白丸が Triangular Nim で着手可能な局面、白四角が 1-Wythoff で着手可能な局面。

Triangular Nim の c -Wythoff twist の必勝法を述べるが、その前に次の数列を定義する。

定義 4.2. 非負整数 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ において、数列 $a_{[c],0}, a_{[c],1}, a_{[c],2}, \dots$ を以下のように定義する。

$$a_{[c],k} = \frac{1+c}{2}k^2 + \frac{1-c}{2}k$$

すなわち、数列 $a_{[c],0}, a_{[c],1}, a_{[c],2}, \dots$ は辺の本数が $c+3$ の多角数である。

例 4.3. $0 \leq c \leq 3$ のとき、数列 $a_{[c],0}, a_{[c],1}, a_{[c],2}, \dots$ は

$$a_{[0],0}, a_{[0],1}, a_{[0],2}, \dots = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

$$a_{[1],0}, a_{[1],1}, a_{[1],2}, \dots = 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

$$a_{[2],0}, a_{[2],1}, a_{[2],2}, \dots = 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, \dots$$

$$a_{[3],0}, a_{[3],1}, a_{[3],2}, \dots = 0, 1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$$

定理 4.4. Triangular Nim の c -Wythoff twist の $\mathcal{P}$ -position の集合 S は、

$$S = \{(0, 0)\} \cup \{(a_{[c],k}, a_{[c],k+1}) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\cup \{(a_{[c],k+1}, a_{[c],k}) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

である。

例 4.5. $c = 0$ のときの $\mathcal{P}$ -position (x, y) ($x \leq y$) は、

$(0, 0), (0, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 10), (10, 15), (15, 21), (21, 28), \dots$

となり、連続した三角数があらわれる。また、 $c = 1$ のときの $\mathcal{P}$ -position (x, y) ($x \leq y$) は、

$(0, 0), (0, 1), (1, 4), (4, 9), (9, 16), (16, 25), (25, 36), (36, 49), \dots$

となり、連続した平方数があらわれる。

Proof of 定理 4.4. $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定し、 $a_{[c],k}$ のことを単に a_k と書く。次を示せば良い。

(1) $(x, y) \in S$ から、どう着手しても S の元にはできない。

(2) $(x, y) \notin S$ ならば、うまく着手して S の元に行ける。

(1) であることを示す。任意の $(x, y) \in S$ を取る。対称性より、 $(x, y) = (a_k, a_{k+1})$ の場合のみで良い。 $a_{k+1} - a_k = k(c+1) + 1$ は初項 1 公差 $c+1$ の等差数列 $1, 1+(c+1), 1+2(c+1), 1+3(c+1), \dots$ となる。

c -Wythoff twist の着手では差を高々 c までしか変えられないので、 (a_k, a_{k+1}) の局面と別の局面 $(a_\ell, a_{\ell+1})$ の 2 つの局面の石の個数の差の違いが $c+1$ 以上であることから、 (a_k, a_{k+1}) から $(a_\ell, a_{\ell+1})$ へは着手できない。一度の着手で石の個数を減らさないといけなないので、 S の元になるように着手することはできない。

Triangular Nim の着手で一度の着手で $(x, y) = (a_k, a_{k+1})$ から $(x', y') = (a_\ell, a_n) \in S$ (ただし、 $|l-n|=1$) にできると仮定して矛盾を示す。 $x' < x$ かつ $y < y'$ の場合は、 $\ell < k < k+1 < n$ となり、 $|l-n|=1$ であることに矛盾。 $x < x'$ かつ $y' < y$ の場合は、 $n \leq k < k+1 \leq \ell$ となり、 $|l-n|=1$ を満たす可能性は $n = k$ かつ $\ell = k+1$ の場合のみだが、石の個数が必ず減ることに矛盾。

よって、いずれの着手でも S の元から着手しても S の元にはできないことが分かった。

(2) であることを示す。任意の $(x, y) \notin S$ を取る。 $x = y$ の場合は c -Wythoff twist の着手で (x, y) から $(0, 0) \in S$ にできる。よって、対称性より $x < y$ としてよい。

$a_k \leq x < a_{k+1}$ を満たす任意の非負整数 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取る。 $x + y > a_k + a_{k+1}$ の場合は、Triangular Nim の着手で一度の着手で (x, y) から (a_{k+1}, a_k) にできる。

$x + y \leq a_k + a_{k+1}$ の場合について考える。 k のとりかたにより、 $y \leq a_{k+1} - (x - a_k)$ ($x - a_k \geq 0$) となり、 $a_k \leq x < y \leq a_{k+1}$ が成り立つ。 $x = a_k$ かつ $y = a_{k+1}$ なら、 $(x, y) \in S$ となり、仮定に矛盾するので、 $|y - x| < a_{k+1} - a_k = k(c+1) + 1$ が成り立つ。 $\ell = \left\lfloor \frac{y-x-1}{c+1} \right\rfloor$ とおけば、 c -Wythoff twist の着手で (x, y) から $(a_\ell, a_{\ell+1}) \in S$ にできる。□

このゲームの $c = 0, 1, 2$ の場合のグランディ数を次の表に載せる。

表 2: Triangular Nim の c -Wythoff twist の (a) $c = 0$ 、(b) $c = 1$ 、(c) $c = 2$ におけるグランディ数

(a)

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	1	2	0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	3	1	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	2	0	1	2	6	2	0	1	10	11	12	13	14	15	16	17
4	3	4	5	6	7	3	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
5	4	5	6	2	3	4	4	3	12	2	14	0	16	17	18	19
6	5	6	7	0	9	4	5	5	4	14	0	1	17	18	19	20
7	6	7	8	1	10	3	5	6	14	6	1	17	3	19	5	21
8	7	8	9	10	11	12	4	14	15	7	17	3	4	5	21	22
9	8	9	10	11	12	2	14	6	7	8	8	7	5	6	2	23
10	9	10	11	12	13	14	0	1	17	8	9	9	8	22	23	0
11	10	11	12	13	14	15	16	17	3	7	9	10	10	23	7	9
12	11	12	13	14	15	16	17	3	4	5	8	10	11	11	10	8
13	12	13	14	15	16	17	18	19	5	6	22	23	11	12	12	11
14	13	14	15	16	17	18	19	5	21	2	23	7	10	12	13	13
15	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	0	9	8	11	13	14

(b)

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	1	2	3	0	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	3	4	5	6	1	8	9	10	11	12	13	14	15	16
3	2	3	4	5	6	7	8	9	2	11	12	13	14	15	16	17
4	3	0	5	6	7	8	9	10	11	0	3	14	15	16	17	18
5	4	5	6	7	8	9	10	11	4	13	14	15	16	17	18	19
6	5	6	1	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	18	5	20
7	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
8	7	8	9	2	11	4	13	14	15	16	17	18	7	20	21	2
9	8	9	10	11	0	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
10	9	10	11	12	3	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	11	12	13	14	15	16	1	18	7	20	21	22	23	24	25	26
13	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
14	13	14	15	16	17	18	5	20	21	22	23	24	25	26	27	28
15	14	15	16	17	18	19	20	21	2	23	24	25	26	27	28	29

(c)

$x \backslash y$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0	1	2	3	4	0	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	1	2	3	4	5	6	7	1	9	10	11	12	13	14	15	16
3	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2	12	13	14	15	16	17
4	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	3	15	16	17	18
5	4	0	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	0	4	18	19
6	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	5
7	6	7	1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
8	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
9	8	9	10	2	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
10	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
11	10	11	12	13	3	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
12	11	12	13	14	15	0	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
13	12	13	14	15	16	4	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
14	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
15	14	15	16	17	18	19	5	1	22	23	24	25	26	27	28	29

次に、Triangular Nim の着手に加え、次のような着手を加えた石取りゲームについて考える。

定義 4.6. 2 以上の整数 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ を取る。Triangular Nim の d -geometric twist とは、

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \{(x-i, y+j) \mid 2 \leq i \leq x, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \{(x+j, y-i) \mid 2 \leq i \leq y, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq dj-2, 1 \leq j \leq di-2\} \end{aligned}$$

である石取りゲームである。

また、Triangular Nim の d -sub geometric twist とは、

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \{(x-i, y+j) \mid 2 \leq i \leq x, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \{(x+j, y-i) \mid 2 \leq i \leq y, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq dj-1, 1 \leq j \leq di-1\} \end{aligned}$$

である石取りゲームである。

局面 $a \in M$ から $b \in \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq dj-2, 1 \leq j \leq di-2\}$ へ着手を行うことを a から b へ d -geometric で着手を行うと呼ぶ。

また、局面 a から $b \in \{(x-i, y-j) \mid 1 \leq i \leq dj-1, 1 \leq j \leq di-1\}$ へ着手を行うことを a から b へ d -sub geometric で着手を行うと呼ぶ。

定理 4.7. 局面 (x, y) (ただし、 $x \leq y$) に対し、Triangular Nim の d -geometric twist の $\mathcal{P}$ -position の集合 S は、

$$(1) \quad d = 2 \text{ なら、} S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\} \cup \{(2^k, 2^{k+1}) \mid k \geq 0\}$$

$$(2) \quad d > 2 \text{ なら、} S = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \{(d^k, d^{k+1}) \mid k \geq 0\}$$

である。

証明は [KY23] を見よ。

定理 4.8. Triangular Nim の d -sub geometric twist の $\mathcal{P}$ -position の集合 S は、

$$S = \{(0, 0), (0, 1)\} \cup \left\{ \left(\frac{d^k - 1}{d - 1}, \frac{d^{k+1} - 1}{d - 1} \right) \mid k \geq 0 \right\}$$

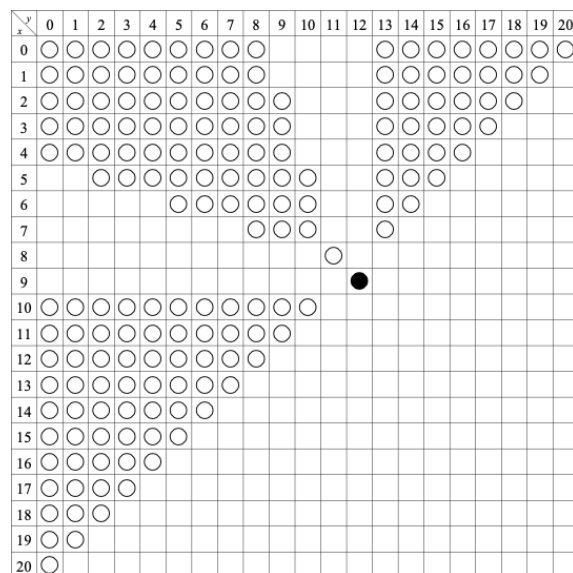
である。

注 4.9. $d = 2$ の場合の $\mathcal{P}$ -position($x \leq y$) は、

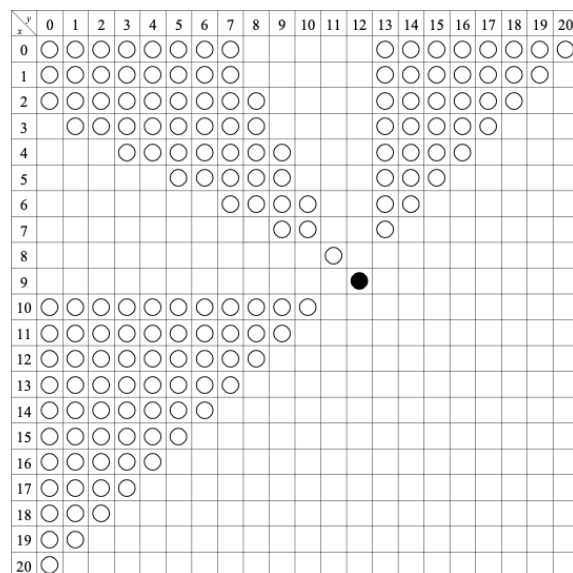
$$(0, 0), (0, 1), (1, 3), (3, 7), (7, 15), (15, 31), (31, 63), \dots$$

となり、連続したメルセンヌ数があらわれる。

証明は [KY23] を見よ。

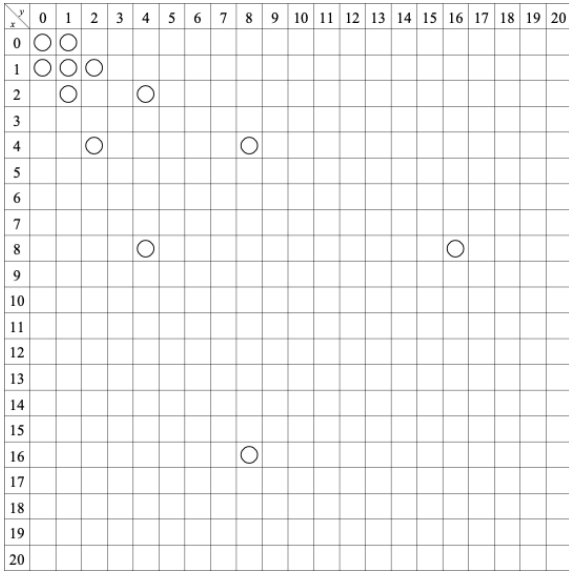


(a)

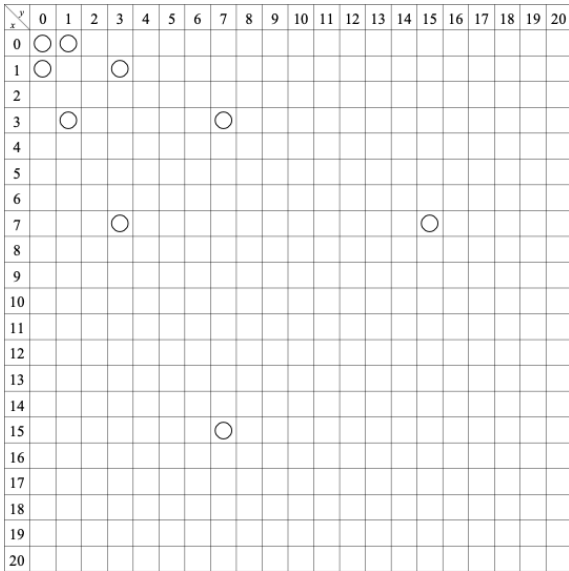


(b)

図 3: 局面 (9, 12)(黒丸部分) における (a) Triangular Nim の 3-geometric twist、(b) 2-sub geometric twist の着手可能な局面 (白丸部分)。



(a)



(b)

図 4: (a) Triangular Nim の 2-geometric twist、(b) 2-subgeometric twist の $\mathcal{P}$ -position。

5. Future Work

5.1 Yama Nim と Triangular Nim の一般化について

Yama Nim では、プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 2 個以上石を取りもう片方の山に 1 個の石を戻す。Triangular Nim では、プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 2 個以上石を取りもう片方の山に 1 個以上石を戻し、全体として石の個数が減るようにする。ここで、2 を a に、1 を b に変えることで、これらの石取りゲームを次のように一般化することができる (詳細は [KY23] を見よ)。一方、これらのゲームについて一般的にグランディ数がどのように記述できるのかは今現在分かっていないので、今後これらのゲームのグランディ数について法則性を探索する予定でいる。

5.2 3 山の Triangular Nim のバリエーションについて

Yama Nim 及び Triangular Nim を 3 山に拡張する方法はいくつかある。以下、Triangular Nim について 3 山に拡張したルールをいくつか紹介する。

定義 5.1. 局面全体の集合を $M = \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と定める、すなわち山が 3 つあり、それぞれの山に石がいくつか存在する局面を局面全体の集合とする。以下のようにルールをいくつか定める。

- (1) プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 1 個以上石を取り、取らなかった方の山のうち 1 つを選び、その山に石を 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。
- (2) プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 1 個以上石を取り、取らなかった 2 つの山に石をそれぞれ 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。
- (3) プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 1 個以上石を取り、取らなかった 2 つの山に石を合計 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。
- (4) プレイヤーは一度の着手で 2 つの山からそれぞれ 1 個以上石を取り、取らなかった 1 つの山に石を 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。
- (5) プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 1 個以上石を取り、取らなかった方の山のうち 1 つを選び、その山に石を 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。また、石の個数が 0 個になった山は取り除かれる。
- (6) プレイヤーは一度の着手で 1 つの山から 1 個以上石を取り、2 つの山に石をそれぞれ 1 個以上戻す。ただし、全体として石が減るようにする。また、石の個数が 0 個になった山は取り除かれる。

以上のルールのもとでは比較的簡明に $\mathcal{P}$ -position が記述される（言い換えれば、ゲームとしては面白くない）。詳しくは別の機会に発表する。一方、Triangular Nim でなく Yama Nim の 3 山への一般化を考えると、極めて複雑な $\mathcal{P}$ -position 集合となり、今の所数学的な記述が見つからない。

上記で述べたルール以外にも様々な拡張が考えられるので、今後はそれらについて必勝法の探索を行う予定でいる。また、4 山以上に拡張した時に必勝法が一般化できるのかについても調べる予定でいる。

5.3 Triangular Nim の Wythoff バリエーションのグランディ数

4 章の定理 4.4 で、Triangular Nim の c -Wythoff Twist の $\mathcal{P}$ -position の集合、つまりグランディ数が 0 である局面集合について報告した。局面 (x, y) のグランディ数が $g \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならば、 $x+y-1=g$ 、またはある数列 $a_1, a_2, \dots$ が存在し、 $(x, y) = (a_k, a_{k+1})$ または $(x, y) = (a_{k+1}, a_k)$ の形で表されるようであることが分かった。例えば、Triangular Nim の 0-Wythoff Twist のグランディ数が 1 である集合のリストは、 $\{(1, 1), (0, 2), (2, 3), (3, 7), (7, 10), (10, 16), (16, 21), \dots\}$ となり、この場合の数列は $2, 3, 7, 10, 16, 21, \dots$ 、すなわち $a_k = \frac{k^2 + k + 1 - (-1)^k}{2}$ となるようである。さらに、 g が $c \geq 1$ と比較して小さいときは、数列が $a_k = \frac{(1+c)k^2 + (1+2g-c)k}{2}$ で表されるようである。この数列は、 $c=1$ かつ $g=1, 2, 3$ の場合は成り立つが、 $g=4$ の場合は局面 $(5, 8)$ が $\mathcal{P}$ -position となるが、予想したグランディ数のリスト $\{(2, 3), (0, 5), (5, 12), (12, 21), (21, 32), \dots\}$ と合致しなかった。 $c=2$ の場合、少なくとも $g=26$ の局面 $(27, 37)$ が予想と合致しなかった。一方、 $c=3$ の場合は今のところは反例が見つからない。

Triangular Nim のバリエーションについては 4 章で報告した以外にも例えば次のようなものが考えられる。

定義 5.2. 非負整数 $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を取る。Triangular Nim の c -Wythoff twist(改) とは、

$$\begin{aligned} f((x, y)) = & \{(x-i, y+j) \mid 2 \leq i \leq x, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \{(x+j, y-i) \mid 2 \leq i \leq y, 1 \leq j < i\} \\ & \cup \left\{ (x-i, y-j) \mid \begin{array}{l} 0 \leq i \leq x, 0 \leq j \leq y \\ |i-j| \leq c, i+j \geq 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

であること、つまり、Triangular Nim の着手に加え、両方から取る石の個数の差が c 個以下ならば取る石の個数が 1 個以上何個とっても良いという着手を許す石取りゲームである。

このゲームの必勝法は次のように記述できるようである。

Triangular Nim の c -Wythoff twist(改) の $\mathcal{P}$ -position の集合 S は、

$$\begin{aligned} S = & \{(0, 0)\} \\ & \cup \{((c+1)a_{[0],k}, (c+1)a_{[0],k+1}) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} \\ & \cup \{((c+1)a_{[0],k+1}, (c+1)a_{[0],k}) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

である。

5.4 $\mathcal{P}$ -position の記述にあらわれる数列

どのような数列 $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ に対し、 $\mathcal{P}$ -position が

$$\{(0, 0), (a_k, a_{k+1}), (a_{k+1}, a_k) \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$$

となるような Wythoff バリエーションが作れるか？

例えば、フィボナッチ数列 $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ により、 $x \leq y$ となる $\mathcal{P}$ -position が

$$\{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 8), \dots\}$$

となるようなルールがうまく作れるか？

漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ で $a_0 = 0, a_1 = 1$ となる数列 $0, 1, 3, 10, 33, 109, \dots$ に対しては候補があり、現在検証中である。

謝辞 本論文を執筆にあたり、根幹となる Triangular Nim を貴重な研究ディスカッション時に提案してくださり、以降も研究等で日頃からお世話になっている Urban Larsson 氏、Indrajit Saha 氏、木谷 裕紀氏、末續 鴻輝氏、そして安福 智明氏に感謝を申し上げる。また、本論文の Extended Abstract の査読をしてくださった 2 名の方には研究面で新たな気づきを導いてくださり、ここに感謝を申し上げる。最後にいつもセミナーで貴重なコメントをしていただき、特に本論文執筆時に数多くの重要な助言を下さった渡辺 業氏、稲津 大貴氏、小田原 亜久里氏に感謝を申し上げる。

参考文献

- [Siegel13] A. Siegel, *Combinatorial Game Theory*, American Mathematical Society, Providence, 2013.
- [一] 一松信『石とりゲームの数理 [POD 版]』, 森北出版株式会社 (2003).
- [佐] 佐藤文広『石取りゲームの数学』, 数学書房 (2014).
- [Y23] 山下貴央『ある石取りゲームの必勝法とグランディ数』, 令和 4 年度広島大学大学院先進理工系科学研究科先進理工系科学専攻数学プログラム修士論文
- [KY23] S. Kimura, T. Yamashita, On variations of Yama Nim and Triangular Nim, 2023
<https://arxiv.org/abs/2310.06610>.