

将棋における相互ツークツワンク局面とゲームの値

安福 智明^{1,a)} 末續 鴻輝^{1,b)}

概要：ツークツワンク (Zugzwang) とは、チェスにおいて手番のプレイヤーが先に駒を動かすことで不利になるような局面のことである。特に、両者とも先に駒を動かすことが悪く働く場合は相互ツークツワンクと呼ぶ。相互ツークツワンクは、チェスと組合せゲーム理論とのつながりにおいても重要な役割を果たしている。チェスでは、持ち駒を打つことができず終盤になるにつれて盤面が単純化していくため、ツークツワンク局面が生じやすいが、将棋では、ツークツワンクと判定できる局面は多くなく、組合せゲーム理論とのつながりに関してもこれまで研究されてこなかった。本研究では将棋におけるツークツワンク局面を構成し、さらにその局面を部分局面として持つような局面について考え、組合せゲーム理論を用いて解析した際に、どのような値を持つ局面が存在するのかを調べた。

キーワード：将棋, ツークツワンク, 組合せゲーム理論

Zugzwang positions and game values in shogi (Japanese chess)

TOMOAKI ABUKU^{1,a)} SUETSUGU KOKI^{1,b)}

Abstract: In chess, "Zugzwang" refers to a position where the player whose turn it is to move is at a disadvantage by making a move. Particularly, when it's detrimental for both players to be the first to move, it's called mutual Zugzwang. Mutual Zugzwang plays a crucial role in the relationship between chess and combinatorial game theory. In chess, since players cannot drop pieces and the board simplifies as the game approaches the endgame, positions of Zugzwang arise more frequently. On the other hand, in shogi (Japanese chess), there are fewer positions identified as Zugzwang, and its connection to combinatorial game theory has not been extensively researched. In this study, we constructed Zugzwang positions in shogi. Moreover, we considered positions that contain the Zugzwang position as a component. By employing combinatorial game theory for analysis, we investigated the types of positions and their respective values.

Keywords: shogi (Japanese chess), Zugzwang, Combinatorial Game Theory

1. はじめに

組合せゲーム理論は Conway や Berlekamp らによって考案された、主に対戦ゲームの戦略を代数的に解析することを目的とした理論であり、その数学的構造の美しさやアルゴリズム的な興味深さから、近年数学分野の一分野として発展しつつある。代数的な解析を行うためには、数学的にある程度うまく定式化する必要がある。そのため、対戦ゲームのうち、組合せゲーム（偶然要素を含まず、双方のプレイヤーがどの局面においても完全な情報を持つゲーム）と呼ばれるゲームについて解析を行うことが主流となつて

いる。

組合せゲーム理論を用いた伝統的なゲームの解析としては、第一に囲碁の研究が挙げられる。組合せゲーム理論が発展した背景には囲碁の解析をしようとするモチベーションがあったこともあり、組合せゲーム理論と囲碁の研究は相性がよく、[2] などをはじめとした多くの結果が知られている。これに対し、世界で最も有名なゲームの一つであるチェスについても、組合せゲーム理論を用いて解析ができないかという疑問が生じた。組合せゲーム理論は、ゲームの進行につれ盤面が分割されていくような場合にその力を発揮する。そのため、特に囲碁のようなゲームと相性がいいが、次に紹介するように、チェスにおいてもそのような状況は生じる。

図 1 は Schweda と Sika の対局で実際に登場した局面で

¹ 国立情報学研究所

^{a)} buku3416@gamil.com

^{b)} suetsugu.koki@gmail.com

ある。お互いのキングとそれに付随するポーンは、先に動かし方が負けとなる。それ以外はポーンが向き合っている列がいくつかあり、プレイヤーは互いにポーンを動かして、先に動かせなくなった（あるいは、動かしたら取られる状態に陥ってしまった）方が負けることになる。盤面の左（a 列と b 列）にある部分と右にある部分（h 列）は独立しており互いに影響を与えない。このように、いくつかの部分局面が独立して、プレイヤーはいずれかを選び一手進め、最後の着手者が勝者となるような局面を、正規形の局面の直和と呼び、組合せゲーム理論ではよく研究されている。Elkies はこのように、分割されてしまったチェスの局面が組合せゲーム理論から見てどのような性質を持つかを明らかにし、チェスと組合せゲーム理論の関係を示した [3], [4]。

	a	b	c	d	e	f	g	h
8								
7		♙						♚
6	♙							
5					♔			
4					♙	♙		
3						♔		♙
2	♙	♙						
1								

図 1 チェスの対局に登場した組合せゲーム理論的局面

チェスにおいて手番のプレイヤーが先に駒を動かすことで不利になるような局面のことをツークツワンク (Zugzwang) と呼ぶ。特に、上で出てきたキングと付随するポーンのように、両者とも先に駒を動かすことが悪く働く場合は相互ツークツワンクと呼ぶ。ツークツワンク局面はチェス以外にも登場し、どうぶつしょうぎではツークツワンク局面が少なくとも 21,839 通り存在することが知られている [6]。

さて、上で見たように組合せゲーム理論はツークツワンクとからめて、チェスという伝統的なルールの解析に用いられているが、我が国において長い歴史と人気を誇る将棋ではどうだろうか。将棋はチェスと似たルールのゲームである。しかし、チェスと異なり、持ち駒を打つことができるため、駒が少なくなった結果としてのツークツワンクが起らない。ゆえに、将棋においてチェスと同様にツーク

ツワンクが起こるかどうかは非自明な問いであり^{*1}、チェスと同じく組合せゲーム理論を適用して解析が簡単になるような局面があるのかも非自明な問いである。

本研究では、実際に将棋においてツークツワンク局面を構成するとともに、どのような値を持つ局面が構成できるかについて調べた。

2. 組合せゲーム理論における前提知識

組合せゲーム理論の詳細は [1], [5] などに譲るが、本研究に関わる部分について、簡単に紹介しておく。

2.1 ゲームの定義

本稿では、以下の性質を満たすものをゲームと呼ぶ。

- 2 人のプレイヤーが交互に手を打つ。
- お互いのプレイに隠された情報は無い（完全情報性）
- 偶然の要素を含まない（確定性）

2 人のプレイヤーをそれぞれ左、右と呼ぶこととする。本稿で将棋を扱う際は、先手番のプレイヤーの名前を左、後手番のプレイヤーの名前を右とする。なお、ここでいう先手番すなわち左は盤面図において手前側から奥側に攻めるプレイヤーのことであり、棋譜において記号▲で着手が表現されるプレイヤーのことを指す。同様に、後手番すなわち右は盤面図において奥側から手前側に攻めるプレイヤーのことであり、棋譜において記号△で着手が表現されるプレイヤーのことを指す。組合せゲーム理論においては与えられた局面における次のプレイヤーを「先手」、直前のプレイヤーを「後手」と呼ぶが、「先手番」、「後手番」との混同が起こるため、本稿では将棋の言葉遣いを優先し、組合せゲーム理論的な意味で「先手」、「後手」とは使わないようにする。また、左が可能な着手を左選択肢、右が可能な着手を右選択肢という。

G をゲームの局面とする。集合 G^L を G の左選択肢全体の集合、集合 G^R を G の右選択肢全体の集合とすると、局面 G は順序対 (G^L, G^R) によって表される。このことを、

$$G = \{G^L \mid G^R\}$$

と書く。

局面 $G = \{G^L \mid G^R\}$ に対して、それぞれの選択肢の集合を $G^L = \{G_1^L, \dots, G_s^L\}$, $G^R = \{G_1^R, \dots, G_t^R\}$ と明示的に表すことができるとき、局面 $G = \{G^L \mid G^R\}$ を単に $G = \{G_1^L, \dots, G_s^L \mid G_1^R, \dots, G_t^R\}$ と書く。 $G^L = \emptyset$ かつ

^{*1} なお、プロ棋士らによる最新の AI を使った研究では、相雁木などの状況においては、先に攻めた方が不利となりえるため、お互い手待ちをすることが最善であると知られているようである。我々も将棋ソフト「激指」を用いて検討してみたところ、確かにそのように思えるが、その事実は厳密に証明されているわけではない。チェスのツークツワンクに関する研究では、小さい範囲ではあるものの、数学的に厳密な証明を与えることができている、それが組合せゲーム理論の強みの一つである。

$G^R = \emptyset$ であるとき, それを終了局面と呼び, $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ または $\{\}$ または 0 と書く.

以下, $\mathbb{N}_0$ を非負整数全体の集合とする.

Definition 2.1. 集合 $\tilde{\mathbb{G}}_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) を次のように再帰的に定める.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{G}}_0 &= \{\{\emptyset \mid \emptyset\}\} \\ \tilde{\mathbb{G}}_{n+1} &= \{\{G^L \mid G^R\} : G^L, G^R \subseteq \tilde{\mathbb{G}}_n\}\end{aligned}$$

局面とは, 集合

$$\tilde{\mathbb{G}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \tilde{\mathbb{G}}_n$$

の元のことをいう.

一般に左選択枝と右選択枝が異なるゲームを非不偏ゲームと呼ぶ. チェスや将棋は, 相手の駒を動かすことができないため, 非不偏ゲームに属する. 本稿では, 非不偏ゲームのみを扱う. 以下, 非不偏ゲームのことを単にゲームと呼ぶ.

2.2 帰結類

任意の局面は次の 4 つの帰結類のいずれかただ一つに属する.

- $\mathcal{N}$... 直後の手番のプレイヤーに必勝戦略がある
- $\mathcal{P}$... 直前の手番のプレイヤーに必勝戦略がある
- $\mathcal{L}$... プレイヤー左に必勝戦略がある
- $\mathcal{R}$... プレイヤー右に必勝戦略がある

また, 局面 G の帰結類を $o(G)$ と書く. 例えば, $G \in \mathcal{L}$ のとき, $o(G) = \mathcal{L}$ である.

2.3 ゲームの代数構造

局面 G と H のゲーム木が完全に一致しているとき, G と H は同型であるといい, $G \cong H$ と書く.

Definition 2.2 (局面の和). 局面 $G \cong \{G^L \mid G^R\}$ と局面 $H \cong \{H^L \mid H^R\}$ の和 $G + H$ を, 次のように再帰的に定める.

$$G + H \cong \{G^L + H, G + H^L \mid G^R + H, G + H^R\}.$$

局面の和は直和ゲームとも呼ばれる. プレイヤーは自分の着手で部分局面のいずれかを選択し一手進め, それ以外の局面は放置することとなる. また, 部分局面同士が互いに干渉することはない.

Definition 2.3 (逆局面). 局面 $G \cong \{G^L \mid G^R\}$ の逆 $-G$ を, 次のように再帰的に定める.

$$-G \cong \{-G^R \mid -G^L\}.$$

つまり, 逆局面は左右のプレイヤーができることを入れ

替えた局面となる. $G + (-H)$ を $G - H$ と書く.

Theorem 2.4 ([1]).

- (1) 局面の和は結合法則と交換法則を満たす.
- (2) 任意の局面 G に対して, $0 + G \cong G + 0 \cong G$ である.
- (3) 任意の局面 G に対して, $-(-G) \cong G$ である.

Definition 2.5 (局面の等価性). 局面 G, H に対して, 関係 $=$ を

$$G = H \iff \forall X \in \tilde{\mathbb{G}}, o(G + X) = o(H + X).$$

と定める. $G = H$ であるとき, G と H は等価であるという. この関係 $=$ は明らかに同値関係となる. 以後, 商集合 $\tilde{\mathbb{G}}/ =$ を $\mathbb{G}$ と書く.

Theorem 2.6 ([1]). $G = 0 \iff o(G) = \mathcal{P}$ となる.

Definition 2.7 (局面の大小関係). 4 つの帰結類 $\mathcal{N}, \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R}$ の間の順序 $\leq$ を, $\mathcal{R} \leq \mathcal{N} \leq \mathcal{L}, \mathcal{R} \leq \mathcal{P} \leq \mathcal{L}$ とし, $\mathcal{N}$ と $\mathcal{P}$ は比較不能であると定める. また, 局面 G, H に対して, 関係 $\leq$ を

$$G \leq H \iff \forall X \in \tilde{\mathbb{G}}, o(G + X) \leq o(H + X).$$

と定義する.

また, 局面 G と H が比較不能であるとき, $G \parallel H$ と表す.

Theorem 2.8 ([1]). 任意の局面 G に対して, 次が成り立つ.

$$G = 0 \iff o(G) = \mathcal{P}$$

$$G > 0 \iff o(G) = \mathcal{L}$$

$$G < 0 \iff o(G) = \mathcal{R}$$

$$G \parallel 0 \iff o(G) = \mathcal{N}$$

Theorem 2.9 ([1]). 任意の局面 G, H に対して, 次が成り立つ.

$$G = H \iff o(G - H) = \mathcal{P}$$

$$G > H \iff o(G - H) = \mathcal{L}$$

$$G < H \iff o(G - H) = \mathcal{R}$$

$$G \parallel H \iff o(G - H) = \mathcal{N}$$

2.4 局面の値

$\mathbb{G}$ の各要素, すなわち各同値類のことを, 局面の値と呼ぶ. ここでは, いくつかの局面の値を定義する. まず, 上述のように $0 \cong \{\}$ である.

Definition 2.10. 正整数 n に対し,

$$n \cong \{n-1 \mid \}$$

と定義する.

このとき, $-n \cong \{\mid -(n-1)\}$ となる.

Example 2.11.

$$2 = \{1 \mid \} = \{\{0 \mid \} \mid \} = \{\{\{\} \mid \} \mid \}$$

である。

Definition 2.12. n を正整数, m を正の奇数とする. このとき,

$$\frac{m}{2^n} \cong \left\{ \frac{m-1}{2^n} \mid \frac{m+1}{2^n} \right\}$$

と定義する.

分子が整数で分母が 2 のべきとなる有理数のことを二進有理数と呼ぶ.

Definition 2.13.

$$*0 \cong 0$$

とする. また, 任意の正整数 k に対して,

$$*k \cong \{ *0, *1, *2, \dots, *(k-1) \mid *0, *1, *2, \dots, *(k-1) \}.$$

と定義する. 特に, $*1 \cong \{ *0 \mid *0 \} \cong \{ 0 \mid 0 \}$ は単に $*$ と書く.

$*$ をスター, $*k$ をスター k と呼ぶ.

Definition 2.14. $\uparrow$ と $\downarrow$ をそれぞれ以下のように定義する.

$$\uparrow \cong \{ 0 \mid * \}, \quad \downarrow \cong \{ * \mid 0 \}.$$

$\uparrow$ をアップ, $\downarrow$ をダウンと呼ぶ. なお, $\downarrow = -\uparrow$ である.

組合せゲーム理論において局面の値について調べることは, ゲームを解析する上でとても重要である. 局面の値を知ることによって, その局面においてどのプレイヤーが必勝戦略を持つかがわかる. 特に直和ゲームにおいては, 各部分局面の局面の値の和を計算することによって, 複雑な局面においても, どのプレイヤーが必勝戦略を持つかを計算することができる. 実際, プロの九段でも最善手を判定できないような囲碁の終盤のヨセついて, 様々な局面がゲームの値を用いて解析されている [2].

2.5 ルーピーゲーム

組合せゲーム理論では通常, 必ず有限手数でゲームが終了すること, 言い方を変えれば同じ局面が二度登場することはないことを仮定する. しかしよく知られているように, 将棋などのゲームではこの仮定は適用できない. そこで, 同型反復があるようなゲームをルーピーゲームと呼び, ルーピーゲームの範囲まで枠組みを広げて組合せゲーム理論を展開する研究がなされている. このことは [5] の第 6 章などに詳しい.

ルーピーゲームの非常に単純な値として, **on**, **off**, **dud** が知られている.

Definition 2.15.

$$\text{on} = \{ \text{on} \}$$

$$\text{off} = \{ \mid \text{off} \}$$

$$\text{dud} = \{ \text{dud} \mid \text{dud} \}$$

on, **off** はそれぞれ左および右が任意の回数パスを続け

られる局面である. **dud** はお互い任意の回数パスを続けられる局面である. **dud** は $\text{dud} = \text{on} + \text{off}$ を満たす.

このようにゲームの局面は様々な値を持つ. 冒頭のチェスの例に戻ると, 図 1 の場合では, 左側の 4 つのポーンがある部分局面は値 $\uparrow$ を持ち, 右側の 2 つのポーンがある部分局面は値 $\downarrow + \downarrow + *$ を持つことがわかる. よって 2 つの和は $\downarrow + *$ となり, 直後の手番のプレイヤーに必勝戦略があるということが組合せゲーム理論を用いた解析でわかる. ほかにルーピーゲームの値を含めた様々な値があることが確認されている [3], [4].

3. 主結果

チェスにおいては, 持ち駒を打つことができず終盤になるにつれて盤面が単純化していくため, ツークツワンク局面が生じやすい. 一方将棋においてはツークツワンクと判定できる局面は多くなく, 組合せゲーム理論とのつながりも研究されてこなかった. 本研究では将棋におけるツークツワンク局面を構成し, そのうえで上記の例のように先に駒を動かさなくなった方が負けとなるような部分局面を付け足した例を考え, どのような値を持つ局面が存在するか調べた. 図 2 が構成したツークツワンク局面の一例である.

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	龍	圭	銀	金	角	金	銀	歩	王
二	香	圭	歩	歩	歩	歩	歩		
三	歩	歩						香	歩
四									
五									
六									
七	歩	歩						皇	歩
八	皇	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
九	皇	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図 2 将棋におけるツークツワンク局面

Theorem 3.1. 図 2 の局面は相互ツークツワンク局面である.

Proof. 先手番 (左) がこの局面の直後の手番であったとする. 玉を動かさないことに注意する. ▲2 八歩には△同香成で負けである. ▲2 二銀 (成/不成) または▲2 二香 (成/不成) は△同歩とされ, その歩を取っても同玉とされて詰ませることはできないが, 後手番は△1 八銀または△1 八香とすることができるようになるので後手番の勝ちで

ある。▲2一香成は△同玉とされ、次に△1八香の詰みがあるが、その前に後手玉を詰ませることはできない。▲1二歩（成／不成）は△同玉とされる。その後2二の地点に銀または香を指しても詰ませられないが、後手番は玉を好きに動かせるようになるので、最終的に先手番は▲2八歩と指さざるをえなくなり負けとなる。

後手番が直後の手番であった場合も同様に、後手番の負けになる。よって、先に着手した方が負けるので、図2の局面は相互ツークツワンク局面である。□

また、図3が構成した局面の値の例である。9筋の向かい合った歩が値*を、6筋の向かい合った桂が値0をなしている。二つの和は*となるため、その局面において直後の手番のプレイヤーが必勝戦略を持つことがわかる。

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	龍	圭	銀	金	角	金	銀	歩	王
二	香	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
三	歩			歩				香	歩
四									
五									
六	歩								
七				桂				皇	歩
八	皇	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
九	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図3 将棋における局面の値の例

本研究で構成することに成功した局面の値を表1にまとめる。

局面の値	備考
$-4 \leq n \leq 4$ を満たす整数 n	直和により -16 から 16 まで構成可能。図4を参照
*	図3を参照
$\{1 0\}, \pm 1, \{0 -1\}$	図5を参照
on, off, dud	図6, 7を参照

表1 将棋において登場する局面の値

図4では、3筋、5筋、7筋、9筋の歩をそれぞれ4手ずつ動かすことができる。したがって、それぞれ4手分の余裕が後手番にあるから値 -4 を持つ局面4個の直和ということになり、全体で値 -16 を持っている。

図3の9筋の部分が*となっているのは先に触れたとおりである。図5は、▲9五歩とすると、さらに▲9四歩と

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	銀	と	銀	金	角	金	銀	歩	王
二	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
三								香	歩
四									
五									
六									
七	歩		歩		歩		皇	皇	歩
八	歩	歩	歩	歩	歩	歩	皇		
九	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図4 値 -16 を持つ局面

する権利が生まれ、一方△9六歩とすると、それ以上はお互いツークツワンクの部分以外に指す手がなくなる局面である。したがって、局面は値 $\{1|0\}$ を持つ。同様に、値が $\pm 1 = \{1|-1\}, \{0|-1\}$ を持つ局面を構成することもできる。

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	龍	圭	銀	金	角	金	銀	歩	王
二	圭	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
三	香							香	歩
四									
五	歩								
六	歩								
七	皇							皇	歩
八	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
九	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図5 値 $\{1|0\}$ を持つ局面

図6は、▲9三金と▲9二金を延々と指し続けられる局面である。それ以外は、ツークツワンクの部分を除いてお互い指せる手がないので、この局面は $\text{on} = \{\text{on}\}$ というルーパーゲームの値を持つ。図7では、互いにこのような部分を持っており、先手番は▲9三金と▲9二金、後手番は△9七金と△9八金をそれぞれ延々と指し続けられる局面であるので、この局面は $\text{dud} = \{\text{dud}|\text{dud}\}$ という

ルーピーゲームの値を持つ。

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	銀	と	圭	飛	角	金	銀	歩	王
二	金	香	歩	歩	歩	歩	歩		
三		歩						香	歩
四	桂								
五									
六									
七	歩	歩						歩	歩
八	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
九	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図 6 値 on を持つ局面

	9	8	7	6	5	4	3	2	1
一	銀	と	圭	飛	角	金	銀	歩	王
二	金	香	歩	歩	歩	歩	歩		
三		歩						香	歩
四	桂								
五									
六	歩								
七		歩						歩	歩
八	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩		
九	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	歩	玉

図 7 値 dud を持つ局面

4. さいごに

本研究では、実践的な局面ではないものの、将棋の局面において、ツークツワンクであるものと組合せゲームにおける特徴的な値を持つものを構成することができた。今後さらなる解析により、他の特徴的な値を持つ局面の探索や実践的な局面について解析していきたい。なお、拡張アブストラクト提出の時点では $\frac{3}{2}$ のような整数ではない有理数の値を構成できたと考えていたが、あとの検証により誤りであったことがわかったためお詫びして撤回するとともに、

整数ではない有理数の値を構成することを未解決問題として提唱する。

参考文献

- [1] Albert, M. H., Nowakowski, R. J., Wolfe, D., 川辺治之訳, 組合せゲーム理論入門—勝利の方程式—, 共立出版(2011).
- [2] Berlekamp, E. R., Wolfe D.: *Mathematical Go: Chilling Gets the Last Point*; A. K. Peters(1994).
- [3] Elkies, N. D., On numbers and endgames: Combinatorial game theory in chess endgames, in Games of No Chance, pp.135–150(1996).
- [4] Elkies, N. D., Higher nimbers in pawn endgames on large chessboards, in More Games of No Chance, pp.61–78(2002).
- [5] Siegel, A. N.: *Combinatorial Game Theory*, Graduate studies in mathematics, Vol. 146, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2013).
- [6] 田中哲朗, 「どうぶつしょうぎ」の完全解析, 情報処理学会研究報告, Vol. 2009-GI-22, No. 3, pp.1-8(2009).