

A 6 特徴線からの曲面の一構成法

榎本 肇, 片山卓也, 鶴見良直 (東京工業大学工学部)

1. まえがき

画像の処理を行う場合には、画像中の特徴部分を考え、それについて研究することが重要である。画像を2次元平面上のスカラー関数 $\varphi(x, y)$ であると考えた時に、尾根線、谷線の一般化である特徴線、 φ の輪郭に関する情報をもつと考えられる輪郭線、及び山や谷の勢力範囲を示すような分割線を導入し、その枝分れ、構造等について研究を行い、更に、それらの一般化として、画像・曲面の構造線を導入し、その接続構造を調べてきた。

これとは逆に、ある構造線及びそれ以上での曲面の値が与えられた時に、それを満すような曲面を構成する問題は、特に曲面の構造線による表現法と関連して、応用上重要である。

本論文では、ある曲面の特徴線が与えられたときに、その特徴線からもとの曲面を再合成する問題を取りあげ、曲面の構成アルゴリズム、及び、それによって構成された曲面のグラフィック・ディスプレイ上への表示結果を示した。

2. 特徴線

曲面上の特徴線の詳細については、文献(1)~(5)にゆずり、ここでは、その定義・方程式について簡単に述べる。

〔定義1〕

φ の特徴点とは $\text{grad } \varphi(x, y) = 0$ となる点 (x, y) である。

曲面上の一点 (x, y, z) において、曲面の法ベクトル $\mathbf{m}$ と一つの接ベクトル $\mathbf{t}$ とが定める平面でこの曲面を切った時、あらわれる平面曲線のこの点での曲率を法曲率といい、法曲率の極値を与える方向を主方向と呼ぶ。

〔定義2〕

特徴線とは、 $\text{grad } \varphi$ 方向と、一つの主方向とが直交しているような点 (x, y) の集合である。

具体的には、特徴線とは、等高線方向に進んで見た時に、等高線間隔が極大または極小となっているような点をつらねたものであり、尾根線・谷線の一般化になっている。

以下その性質として、次のようなものが示されている。

〔定理1〕

特徴線の方程式は、

$$F(x, y) = (\varphi_{yy} - \varphi_{xx}) \varphi_x \varphi_y - (\varphi_y^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xy} = 0 \text{ である。}$$

〔定理2〕

今、等高線方向、力線方向の方向微分をそれぞれ $\partial/\partial v$ 、 $\partial/\partial u$ であらわすと、特徴線上においては、

$$\frac{\partial}{\partial v} |\text{grad } \varphi| = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) = 0$$

である。

〔定理 3〕

特徴線上の点においては、 $\text{grad } \varphi = 0$ かまたは、力線の曲率が 0（すなわち、力線の変曲点）である。
又、一般に平面曲線 $K(x, y) = 0$ において、 $K_x = K_y = 0$ をならしめる点を、この曲線の特異点というが、これについて、次が成立する。

〔定理 4〕

特徴点は、特徴線の特異点である。

標準座標系 $x-y$ の特徴点以外の各点において、そこを原点にもち、そこを通る力線方向 (u 方向)、等高線方向 (v 方向) に基ベクトルをもつ局所座標系 $u-v$ を導入し、この局所座標系での曲面の式を $Z = \Psi(u, v)$ であらわした時に、次が成立する。

〔定理 5〕

点 P_0 が特徴点でなく、 P_0 を局所座標系の原点 $(0, 0)$ としたとき、 P_0 が特徴線上にあるならば、

$$\Psi_{uv}(0, 0) = 0$$

が成立する。

3. 荷重平均化法による曲面構成法

ここでは、特徴線により囲まれた部分を、その値のみからいかに構成するかを考察した。

現在まで、任意の曲面で囲まれた部分を、その曲線から構成するという考え方は、Coons の理論⁽⁶⁾ や穂坂の理論⁽⁷⁾⁽⁸⁾ で述べられている。しかし、曲面が十分に多くの線によりおおわれていれば良いのであるが、曲面上にあらわれる特徴線とは、曲面の尾根線や谷線の一般化であるから、その性質上、曲面を小さな四角形にいくつも分割するように、あらわれない。つまり、特徴線により囲まれる領域は、大小さまざまであり、しかもどのような形で囲まれるかは一定せず、曲面により異なってくる。

また、特徴線上のスカラー値を利用して合成された曲面の特徴線が、もとの特徴線に近いような近似合成アルゴリズムを構成し、この近似合成曲面を逐次修正して、与えられた特徴線、さらには構造線をも満足するようにするのが、効率的な曲面合成の一方法であると考えられる。

そこで、近似合成曲面を作るのに、前に述べた特徴線であるという性質を十分に利用し、しかも、簡単に構成できる方法を試みた。

特徴線は周囲にくらべ高い部分（尾根）や低い部分（谷）をあらわしているから、それらで囲まれている部分は、凹凸が少ないはずである。それ故、特徴線で囲まれている内部領域は、一意的に決定されることはないが、まわりの特徴線の値により、曲面の大局的な形状は決定されるとしてよい。

今、図 1 のように、特徴線 1, 2, 3 で囲まれた内部の点を P として、特徴線上の任意の点を P' 、さらに点 p' の高さを $\varphi(p')$ であらわす。また、ある重み関数を $w(p, p')$ とし、点 p が囲まれている特徴線全体を C としたとき、点 P の曲面の値を

$$\phi(p) = \oint_C \varphi(p') w(p, p') dS \cdots \cdots (5.1)$$

の型であらわされると仮定し、この方法によって曲面を近似することを考え、この方法を荷重平均化法と名づけ

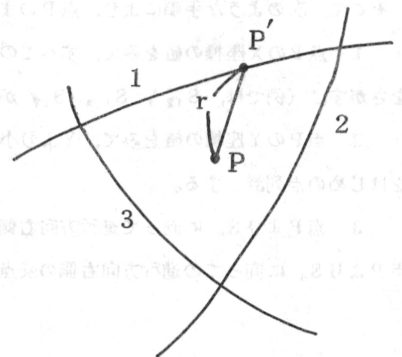


図 1

た。
 現実には、特徴線は座標値群で与えられるから、(5.1)式は

$$\phi(p) = \frac{\sum_{p'} \phi(p') w(p, p')}{\sum_{p'} w(p, p')} \dots\dots\dots (5.2)$$

となる。
 ここで重要なのは、重み関数 $w(p, p')$ のとり方である。計算時間があまり長くなってはいけないうことや、関数の型が比較的簡単で数値的にも取り扱いやすいものを選ばねばならないこと、さらに(5.2)式で、点Pが特徴線上の場合には、特徴線上の値と一致しなければならないこと等、これら諸問題を考慮に入れると、重み関数 $w(p, p')$ としては、 p, p' の距離を r とすると、直接 r の関数である $\frac{1}{r^2}$ とか $\frac{1}{r}$ などと取ることが妥当であろう。

4. 荷重平均化法のアルゴリズム

与えられた特徴線・有限枠の値から曲面上の値を求める主なるフローチャートを図5、図6、図7に示す。以下では、特に問題となる部分のプログラム方法について述べる。

4-1 求める点かどの線分により囲まれているかの判別

例えば、図2のような特徴線を考えた時に、一点 $P(x, y)$ がどの特徴線や有限枠により囲まれているかを決定する事は、なかなか興味ある問題である。

与えられる特徴線が関数の型で与えられているならば、点Pがそれらの関数に対して、正・負・正…をとるという領域を調べていくような方法により、決定は容易であろう。しかし、現実には特徴線のデータは座標値 (x, y, z) の点列で与えられており、近似関数を求めてもすべての点列を満たすことはむずかしく、その線に近い点に対しては決定を誤る事が考えられる。

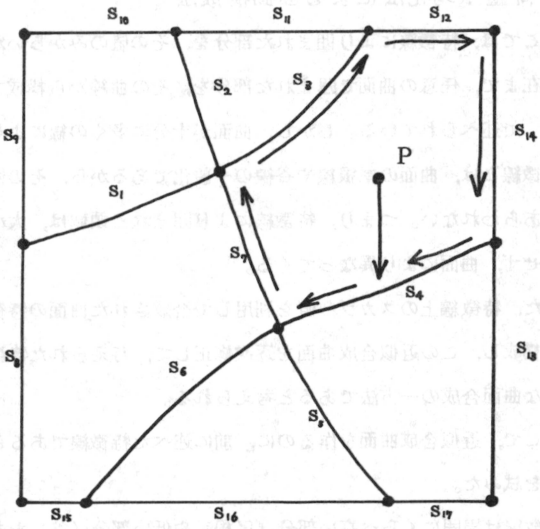


図 2

そこで、次のような手順により、点Pのまわりの点列群を決定した。

1. 点PのX座標の値をみて、すべての点列群(この場合 $S_1 \sim S_{17}$)の各点に対して、Xを横切るものがあるかをさがす。(例では、 S_{12} , S_4 , S_{17} が得られる。)
2. 点PのY座標の値をみて、Yより小さくかつ一番Yに近いものをさがす。(この場合 S_4 が得られる。)これをはじめの点列群とする。
3. 点Pより S_4 に向って進行方向右側に特徴線を一巡するようにながしていく。
 点Pより S_4 に向っての進行方向右側の交点はQである。(図3)

この点Qにおいて、 S_4 の進行方向に対し一番右側方向にある点列群が何であるかを決定するのに、次の方法を用いた。

3.1 S_4 の交点Qにおける進行方向に対する単位ベクトル Q_4 を求める。

3.2 他の3つの点列群 $S_5 \sim S_7$ に対しては、交点Qから出ていく単位ベクトル $Q_5 \sim Q_7$ を求める。

3.3 Q_4 と他ベクトルの外積の各々のZ成分を計算し、負なるものを選ぶ。(これは、 S_4 の進行方向に対して右側半分にあるものを見つけたことになる。)

3.4 3.3を満足するもののうち、さらに Q_4 との内積を計算し、一番小さなものを探す。(これは、一番手前に位置するものである、この例では S_7 である。)

4. 同様の操作(3)をくり返し、はじめの点列群があらわれるまで行う。

以上の手順により、有限枠内の任意の点がどの点列群により囲まれているかを決定することができる。(この例では、 $S_4, S_7, S_3, S_{12}, S_{14}$ が見つけられる。)

4-2 最小2乗法による平滑化

(5.2)式により、各格子上の値は得られるが、より滑らかな曲面にするために、全平面についてある局所領域の格子点の値に対する最小2乗法を適用した。平滑すべき点を中心とした周囲25点(5×5)の値を用い、近似多項式の次数は3次までとして、中心の点の値を求めた。ただし、

格子の行列の対称性がくずれる領域付近の点について、値の点数を減らし次数を下げることも考えられるが、これでは不連続となるので、求めるべき点を中心とせずに、ずらして25点を取り、次数も3次とした。つまり、図4に示すように、ある点を中心とした 5×5 の点がとれるのは、端より3行目以上3列目以上の点である。そこで、端より2行目と2列目の点はその点中心には25点がとれないので、その点のすぐとなりの3行目3列目以上の点を中心とした25点とり、求めるべき各点の値を決定した。また、端点においては、平滑化は行わないことにした。

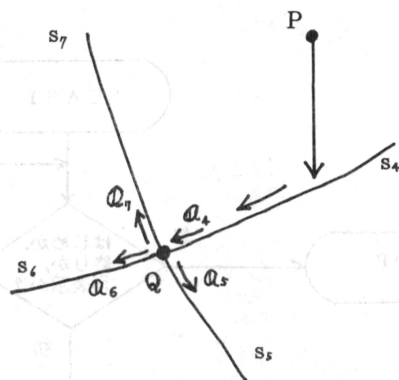


図 3

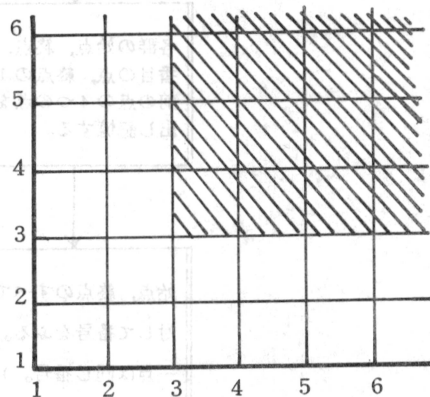


図 4

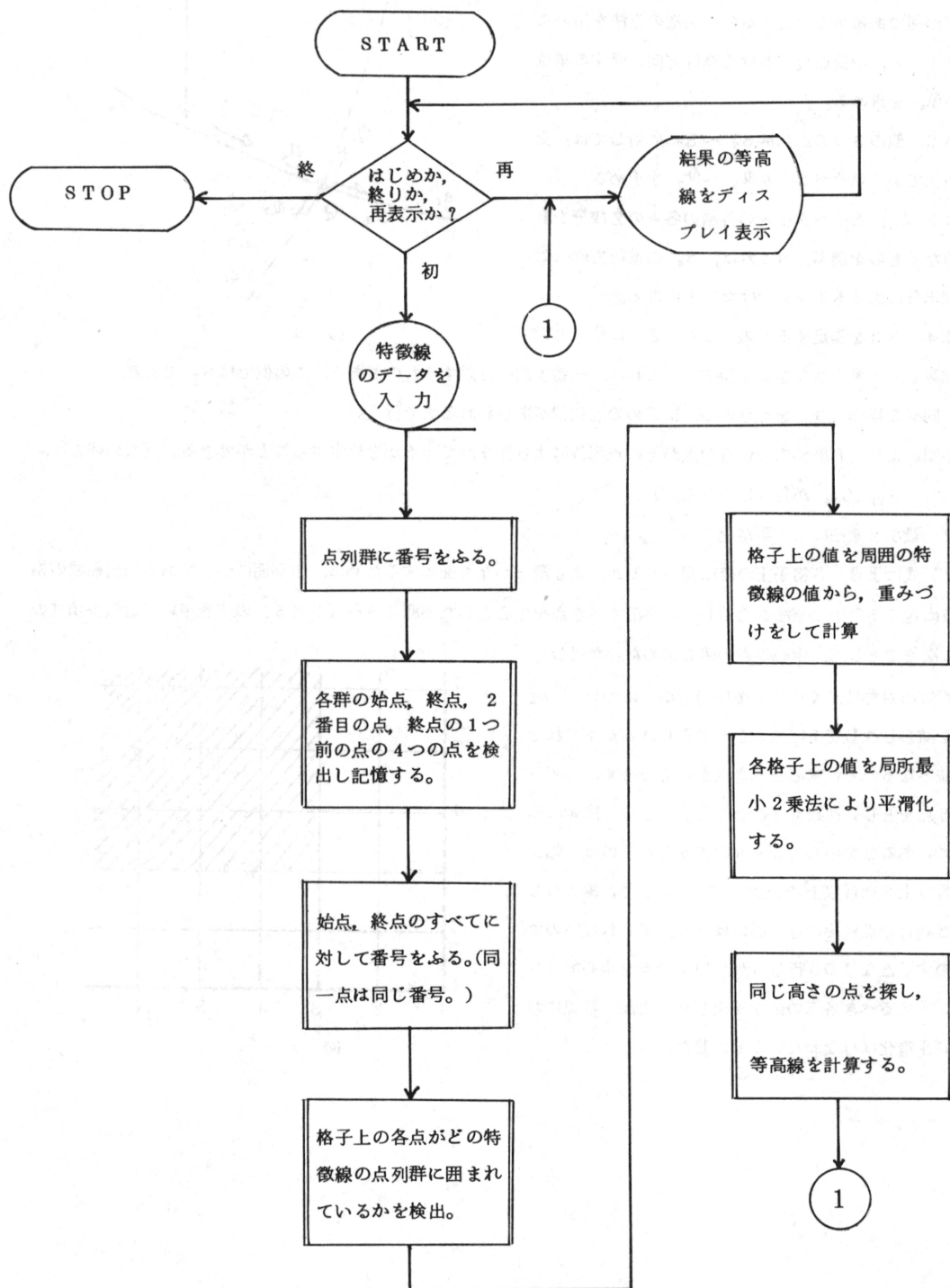


図5 プログラム全体のフローチャート

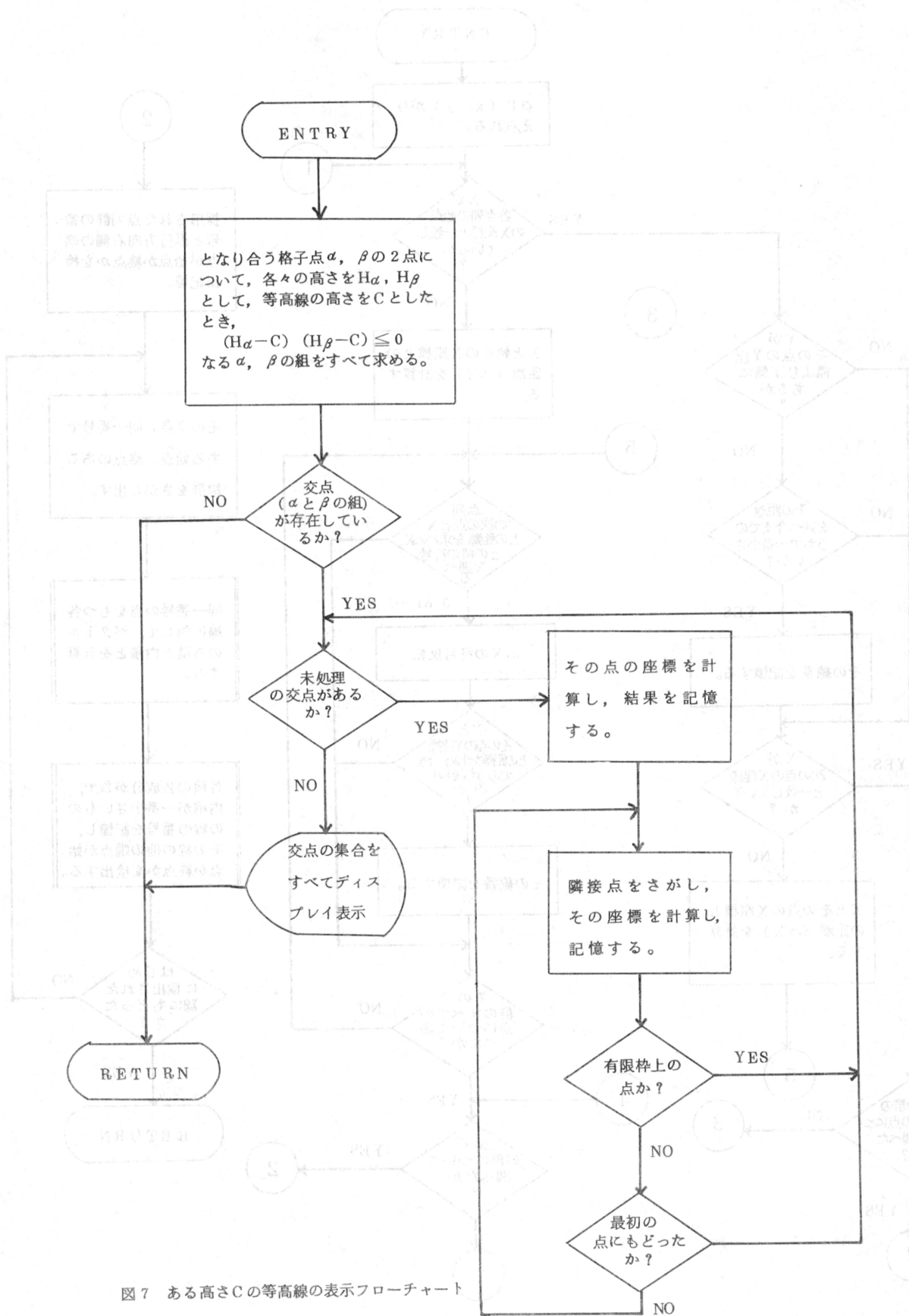


図7 ある高さCの等高線の表示フローチャート

5. 曲面の構成例

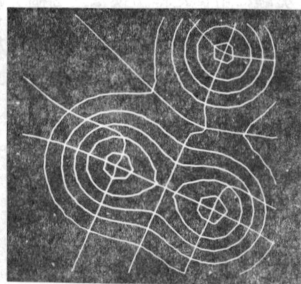
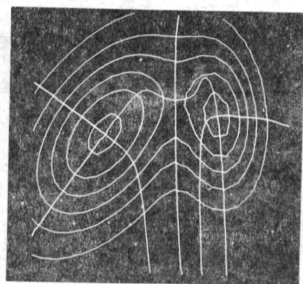
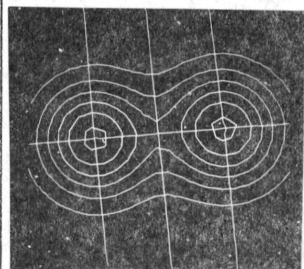
ここでは、実際に与えられた特徴線より曲面を構成し、その結果を等高線であらわしたものを示す。

実験に用いた特徴線は、2個又は3個の正規分布を重ね合せたスカラ関数 $\varphi(x, y)$ より求めたものである。又、はじめの等高線の高さと再構成した曲面の等高線の高さは同じ高さで区切ったものである。

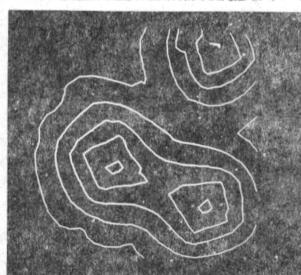
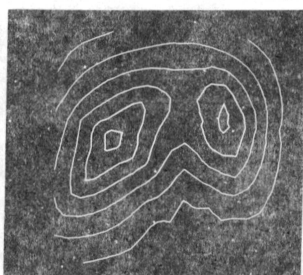
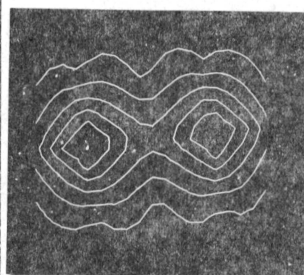
有限枠全体を 21×21 の格子で区切り、その格子上での値を求めた。又、有限枠上の値は、あらかじめ与えられているものとした。

曲面再合成の写真例

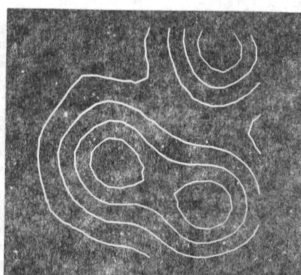
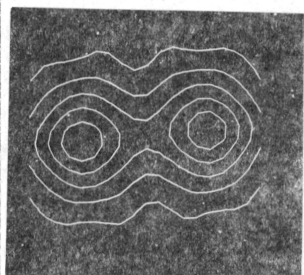
(Ⅰ)
もとの曲面
の特徴線と
等高線



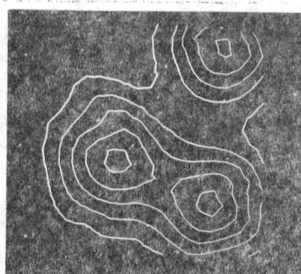
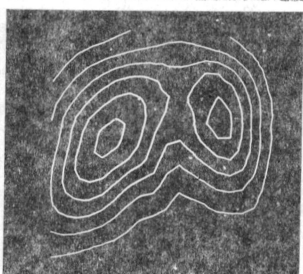
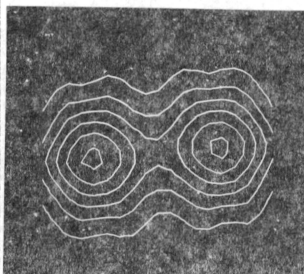
(Ⅱ)
 $\frac{1}{10}$ の重みづけをして得た再合成の曲面



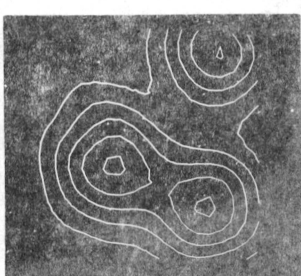
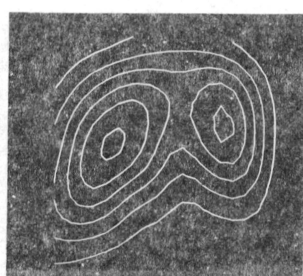
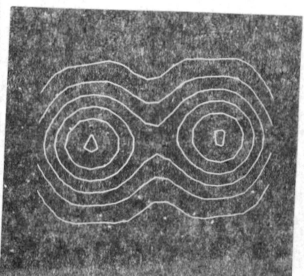
(Ⅲ)
(Ⅱ)の曲面を平滑化した曲面



(Ⅳ)
 $\frac{1}{10}$ の重みづけをして得た再合成の曲面



(Ⅴ)
(Ⅳ)の曲面を平滑化した曲面



6. その他の曲面構成法

特徴線により囲まれる部分は広い場合が多く、しかも特徴線の形状が多様であるので、曲面を適当な関数（例えば多項式）で近似構成する方法は、通常行なわれているような、こまかい規則的な配列の格子状での値から曲面を合成する方法に比較して、困難であると考えられる。しかし、より正確な曲面を構成する場合には、曲面を関数で近似する方法の方が優れていると考えられるので、以下ではこれについて若干の考察を加える。

曲面を関数で近似するとき、その近似関数を求める時の制約条件を考える。今、求めるべき関数を $f(x, y)$ とし、与えられる特徴線上の点を $P_i \{ (x_i, y_i, z_i) \mid i=1, \dots, n \}$ としたとき、

- (i) 特徴線上の点 P_i が関数を満足しなければならないことより、

$$f(x_i, y_i) = z_i \quad \dots\dots\dots (6.1)$$

である。

- (ii) 特徴線の方程式は $F(x, y) = 0$ であるから、点 P_i が関数 $f(x, y)$ においても特徴線上であるということより、

$$F(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) = 0 \quad \dots\dots\dots (6.2)$$

である。

という条件を満足するように関数 $f(x, y)$ を決定すれば良い。

具体的には、最小2乗法の考え方を導入し、(6.1)、(6.2)の誤差の2乗が最小になるようにすると、上記(i) (ii)の条件は

$$(i)' \quad \sum_1 (z_i - f(x_i, y_i))^2 \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (6.3)$$

$$(ii)' \quad \sum_1 (F(x_i, y_i, f(x_i, y_i)))^2 \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (6.4)$$

となる。

又、関数近似の領域であるが、曲面に特徴線が多くあらわれる場合など、全域を一つの関数で近似することは困難である。このような時には、特徴線で囲まれる部分を局所的に関数近似してやれば良い。しかし、隣り合う面どうしを特徴線上の微係数等で滑らかにつなげなければならない操作が加わる。また、局所的の近似には、特徴線で囲まれた内部においては、 $F(x, y)$ の値が一定符号をとるという性質も加えて考えてやれば良い。

次に問題となるのは、関数のとり方である。通常は多項式で可能と思われるが、結果が著しく異なる場合には、他の関数（例えば指数関数など）をも加えて考えれば良い。又、多項式近似する時の次数の取り方は、サンプル点の数や計算時間との兼ね合いで決定すべきである。

7. あとがき

ある曲面の特徴線が与えられたときに、その特徴線からもとの曲面を合成する方法について考察した。写真例を見てもわかるように、特徴線で囲まれる部分は広く、その曲面をその値だけから構成することは一般にはむずかしい問題である。

ここで試みた荷重平均化法についても、特徴線がより複雑な形状になった時などの処理方法に対して考慮すべき点はあるが、通常の場合、ある程度もとの曲面に近いものが得られている。

画像の特徴部分抽出としては、この特徴線に、輪郭線・分割線を加え、これら全ての線のデータから曲面を構成すれば、より正確な曲面が再構成されることが期待される。

又、曲面構成の他のいろいろな方法との比較も興味深い課題であろう。

終りに、プログラム等と一緒に検討して下さった土屋昇氏をはじめ榎本研究室の皆様に深く感謝致します。又、本研究は、科学研究費の援助を受けて行われたものであり、ここに謝意を表すものです。

参考文献

1. 榎本・堂下・村上 “画像の特徴の一考察” オートマトン研究会資料 A 71-12 (1971-04)
インホメーション IT
2. 榎本・堂下・村上 “スカラ空間の特徴部分とその抽出” オートマトン研究会資料 A 71-32 (1971-06)
インホメーション IT 33
3. 榎本・片山・鶴見 “特徴線、輪郭線、鞍部線の諸性質” オートマトンと言語研究会資料 AL 72-64 (1972-10)
パターン認識と学習 PRL
4. 榎本・片山・鶴見・伊藤 “特徴線、輪郭線、分割線のプログラムとその応用” 第14回プログラミング—シンポジウム (1973-01)
5. 榎本・片山・伊藤・鶴見 “曲面の構造線” パターン認識と学習研究会資料 PRL 72-138 (1973-03)
6. Coons “Surfaces for Computer Aided Design of Space Forms” M.I.T.
MAC-TR-41, 1967
7. 穂坂 “自由形状曲面の理論と設計” 情報処理, Vol. 8, №2 pp. 65~72, 1967. 3
8. 穂坂 “曲線、曲面の合成および平滑化理論” 情報処理, Vol. 10, №3 pp. 121~131 1969. 5

本 PDF ファイルは 1965 年発行の「第 6 回プログラミング・シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の検索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場(=情報処理学会電子図書館)で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少なからずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者(論文を執筆された故人の相続人)を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者搜索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思います。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長(tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp)までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日～2021 年 3 月 19 日

掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程

<https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html>